MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

POWTÓRKA: WYKŁADY 7–11
PRZYKŁADY PYTAŃ ZALICZENIOWYCH

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Zgodnie z zapowiedzią, poprzedni i dzisiejszy wykład poświęcamy powtórce omówionego materiału. Podajemy też przykładowe pytania, zbliżone do tych, które pojawią się na zajęciach poświęconych zaliczeniu wykładu 26 stycznia 2017. Dzisiejsza powtórka dotyczy *matematyki ciągłej*.

Plan dzisiejszych działań jest następujący. W niniejszym pliku podajemy przykłady pytań zaliczeniowych, odnoszące się do poszczególnych wykładów. Pokazujemy rozwiązania zadań, pisząc je na tablicy i opatrując ustnym komentarzem.

7 Struktury topologiczne

1. Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{2}$.
2. Oblicz granicę ciągu $a_n = (\frac{n+5}{n})^n$.
3. Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{4^n + 6^n}$.
4. Pokaż, że zbiór zwarty w $\mathbb{R}$ jest domknięty w $\mathbb{R}$.
5. Udowodnij nierówność Bernoulliego: $(1+d)^n \geqslant (1+n\cdot d)$, gdzie $d \geqslant -1$.

8 Granice i ciągłość

1. Niech $f(x) = \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$. Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. Niech $f(x) = \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}$. Oblicz $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

3. Zbadaj, czy istnieje liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$ taka, że funkcja $f(x)$ określona warunkami: $f(x) = \frac{x^3-\pi^3}{x-\pi}$ dla $x \neq \pi$ oraz $f(\pi) = a$ jest ciągła w punkcie $x_0 = \pi$.

4. Zbadaj, czy funkcja $f(x) = \frac{|x|}{x}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

5. Zbadaj, czy granica lewostronna w punkcie $x_0 = 0$ funkcji określonej warunkami: $f(x) = x^2$ dla $x \leqslant 0$ oraz $f(x) = 2^x - 1$ dla $x > 0$ jest równa jej granicy prawostronnej w punkcie $x_0 = 0$.

UWAGA. Słuchacze rozpoznają zapewne źródło cytatu:

> *Ciemność, która nadciągała znad Morza Śródziemnego, okryła znienawidzone przez procuratora miasto. Zniknęły wiszące mosty, łączące świątynię ze straszliwą wieżą Antoniusza, otchłań zwaliła się z niebios i pochłonęła skrzydlatych bogów ponad hipodromem, pałac Hasmonejski wraz z jego strzelnicami, bazary, karawanseraje, zaułki, stawy. . . Jeruszalaim, wielkie miasto, zniknęło, jak gdyby nigdy nie istniało. Pożarła je ciemność, która przeraziła wszystko, co żyło w samym Jeruszalaim i w jego okolicach. Dziwna chmura przygnana została znad morza przed wieczorem czternastego dnia wiosennego miesiąca nisan.*

Otóż umysł wykładowcy spowity był ciemnością podczas omawiania na wykładzie zadania drugiego z powyżej wymienionych. Poprawnie zadanie to rozwiązujemy w sposób następujący:

Niech $f(x) = \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}$. Oblicz $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Zauważamy, że zarówno licznik, jak i mianownik ułamka $\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}$ dążą do zera, gdy x dąży do 1. Przekształcamy zatem ten ułamek do takiej postaci, aby w granicy (gdy x dąży do 1) zachodziło co najmniej jedno z dwojga: aby licznik lub mianownik dążył do granicy skończonej. Wykorzystamy w tym celu wzór skróconego mnożenia, znany ze szkoły: $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$. Mamy zatem:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^{\frac{1}{4}}}{1-x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^{\frac{1}{4}}}{1^2-(x^{\frac{1}{2}})^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^{\frac{1}{4}}}{(1+x^{\frac{1}{4}})\cdot(1-x^{\frac{1}{4}})}.$$

Teraz licznik i mianownik tego ułamka możemy podzielić przez $1 - x^{\frac{1}{4}}$, co daje:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^{\frac{1}{4}}}{(1+x^{\frac{1}{4}})\cdot(1-x^{\frac{1}{4}})} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2},$$

ponieważ licznik otrzymanego ułamka jest równy 1, zaś jego mianownik dąży do 2, przy x dążącym do 1. Ciemność ustąpiła, Jeruszalaim znów spowite jest słonecznym blaskiem.

9 Różniczkowanie

1. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x \cdot e^{\sin x}$ w punkcie $x_0 = 0$.
2. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \sin^3(\cos(\sqrt{x}))$.
3. Oblicz drugą pochodną funkcji $f(x) = \ln(\ln x)$.
4. Oblicz drugą pochodną funkcji $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ w punkcie $x_0 = 0$.
5. Udowodnij wzór Leibniza: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

10 Wybrane twierdzenia rachunku różniczkowego

1. Który z prostokątów o obwodzie L ma największe pole?
2. Znajdź ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$ w przedziale $[0, e]$.
3. Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz granicę: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}}$.
4. Ustal przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.
5. Udowodnij twierdzenie Rolle'a o wartości średniej.

11 Całkowanie

1. Oblicz całkę $\int \frac{x+3}{x^3} dx$.
2. Oblicz całkę $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.
3. Oblicz całkę $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$.
4. Kot Prezesa zbliża się do niego po prostej ze zmienną w czasie prędkością $v(t) = t^2 + 12 \cdot t$ centymetrów na sekundę. Oblicz długość drogi, którą pokona Kot Prezesa od chwili $t_1 = 1$ do chwili $t_2 = 4$.
5. Przekrój poziomy kuwety Kota Prezesa jest obszarem ograniczonym wykresami funkcji: $y = 4$ oraz $y = x^2$. Oblicz pole powierzchni tego obszaru.

Zadań o podobnej treści należy oczekiwać na zaliczeniu wykładu.