

# Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM  
pogon@amu.edu.pl

Badanie funkcji

- Przypomnimy niektóre pojęcia, znane słuchaczom ze szkoły: np. ekstrema lokalne funkcji. Podamy warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremum.
  - Znajdowanie ekstremów lokalnych to ważne zagadnienie z punktu widzenia zastosowań: w praktyce bardzo często interesujemy się, kiedy jakaś wielkość, opisująca badaną zależność, przyjmuje wartość minimalną lub maksymalną.
- 
- Przebieg zmienności funkcji charakteryzują takie pojęcia jak np.: jej *ekstrema lokalne*, jej *punkty przegięcia*, jej *punkty nieciągłości*, przedziały, w których jest ona *monotoniczna*, *wypukła*, *wklęsła*, jej *asymptoty*.
  - Pojęcia te charakteryzujemy, wykorzystując pojęcia: granicy oraz pochodnej funkcji.

Załóżmy, że funkcja  $f$  o wartościach rzeczywistych jest określona w jakimś otoczeniu punktu  $x_0 \in \mathbb{R}$ , czyli w pewnym przedziale otwartym  $(x_0 - a, x_0 + a)$ , gdzie  $a > 0$ . Mówimy, że funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0$ :

- 1 *maksimum lokalne*, gdy istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, iż: jeśli  $|x - x_0| < \delta$ , to  $f(x) \leq f(x_0)$ ;
- 2 *minimum lokalne*, gdy istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, iż: jeśli  $|x - x_0| < \delta$ , to  $f(x) \geq f(x_0)$ .

Maksima oraz minima lokalne nazywamy *ekstremami lokalnymi* funkcji. Określone wyżej ekstrema nazywa się czasem *ekstremami niewłaściwymi*. Ponadto, mówimy, że funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0$ :

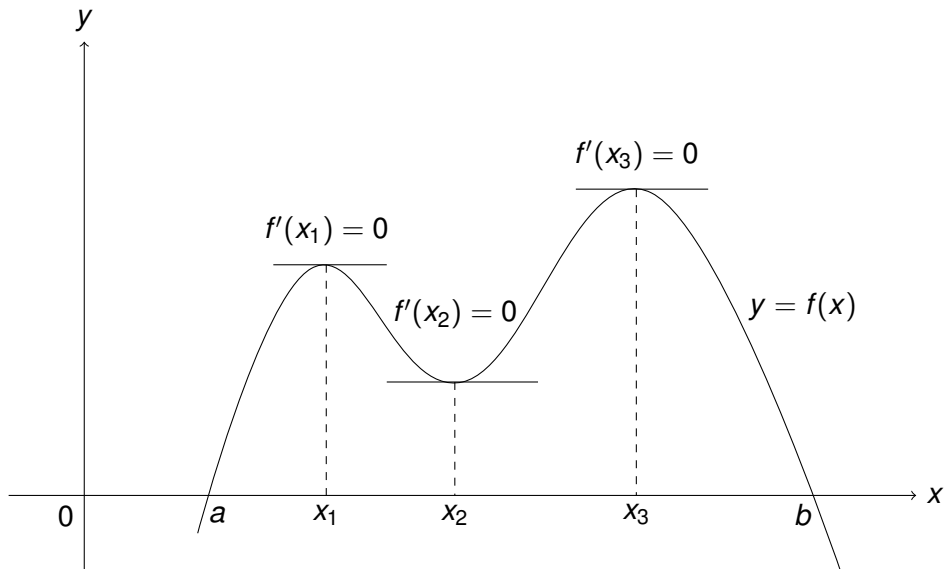
- 1 *maksimum lokalne właściwe*, gdy istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, iż: jeżeli  $x \neq x_0$  oraz  $|x - x_0| < \delta$ , to  $f(x) < f(x_0)$ ;
- 2 *minimum lokalne właściwe*, gdy istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, iż: jeżeli  $x \neq x_0$  oraz  $|x - x_0| < \delta$ , to  $f(x) > f(x_0)$ .

## Przykłady:

- Funkcja  $f(x) = -x^2 + 5$  ma maksimum lokalne w punkcie  $x_0 = 0$ .
- Funkcja  $f(x) = |x - 2|$  ma minimum lokalne w punkcie  $x_0 = 2$ .
- Funkcja  $f(x) = \sin x$  nie ma ekstremum lokalnego w przedziale  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .
- Funkcja  $f(x) = \cos x$  ma maksimum lokalne w każdym punkcie  $x = 2 \cdot n \cdot \pi$  dla  $n \in \mathbb{Z}$  oraz minimum lokalne w każdym punkcie  $x = (2 \cdot n + 1) \cdot \pi$  dla  $n \in \mathbb{Z}$ .

Warunek konieczny istnienia ekstremum podaje następujące twierdzenie:

- **Twierdzenie.** *Jeśli funkcja  $f$  jest określona w pewnym otoczeniu punktu  $x_0$  i różniczkowalna w punkcie  $x_0$  oraz posiada ekstremum lokalne w punkcie  $x_0$ , to  $f'(x_0) = 0$ .*

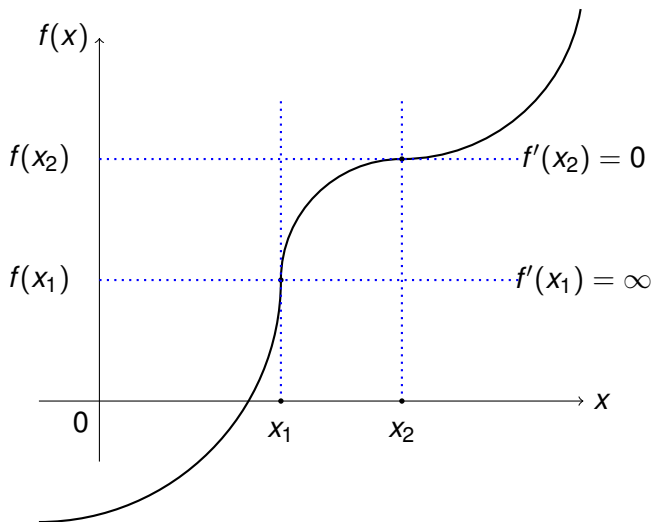


Równanie stycznej do krzywej  $y = f(x)$  w punkcie  $x_0$  ma jedną z następujących postaci (co wynika bezpośrednio z definicji ilorazu różnicowego funkcji w punkcie  $x_0$ ):

- 1  $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ , gdy  $|f'(x_0)| < \infty$
- 2  $y = x_0$ , gdy  $|f'(x_0)| = \infty$ .

*Punkt przegięcia.* Załóżmy, że funkcja  $f$  ma pochodną  $f'(x_0)$  w punkcie  $x_0$ . Mówimy, że krzywa  $y = f(x)$  ma w punkcie  $x_0$  *punkt przegięcia*, gdy: albo  $|f'(x_0)| = \infty$  albo  $|f'(x_0)| < \infty$  oraz istnieje  $\delta > 0$  taka, że dla  $0 < |h| < \delta$  zachodzi jeden z następujących przypadków:

- 1  $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \leq f(x_0 + h)$  dla  $h > 0$  oraz  $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \geq f(x_0 + h)$  dla  $h < 0$   
(krzywa  $y = f(x)$  *przewija się spod stycznej nad styczną*).
- 2  $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \geq f(x_0 + h)$  dla  $h > 0$  oraz  $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \leq f(x_0 + h)$  dla  $h < 0$   
(krzywa  $y = f(x)$  *przewija się znad stycznej pod styczną*).



- Załóżmy, że funkcja  $f$  jest określona w przedziale niewłaściwym  $(c, \infty)$ , gdzie  $c \in \mathbb{R}$ . Mówimy, że prosta  $y = a \cdot x + b$  jest *asymptotą ukośną funkcji  $f$  przy  $x \rightarrow +\infty$* , gdy
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a \cdot x - b) = 0.$$
Mówimy, że prosta  $y = a \cdot x + b$  jest *asymptotą ukośną funkcji  $f$  przy  $x \rightarrow -\infty$* , gdy
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - a \cdot x - b) = 0.$$
- Załóżmy, że funkcja  $f$  jest określona w pewnym otoczeniu  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  punktu  $x_0$ , za wyjątkiem punktu  $x_0$ . Mówimy, że funkcja  $f$  ma *asymptotę pionową  $x = x_0$  w punkcie  $x_0$* , gdy:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ lub } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$



- Załóżmy, że funkcja  $f$  jest określona w pewnym otoczeniu  $(x_0 - \delta, x_0)$  punktu  $x_0$ . Mówimy, że funkcja  $f$  ma *lewostronną asymptotę pionową*  $x = x_0$  w punkcie  $x_0$ , gdy:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$  lub

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

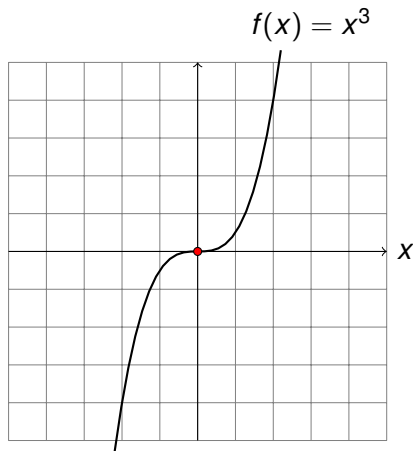
- Załóżmy, że funkcja  $f$  jest określona w pewnym otoczeniu  $(x_0, x_0 + \delta)$  punktu  $x_0$ . Mówimy, że funkcja  $f$  ma *prawostronną asymptotę pionową*  $x = x_0$  w punkcie  $x_0$ , gdy:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$  lub

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

# Przykłady

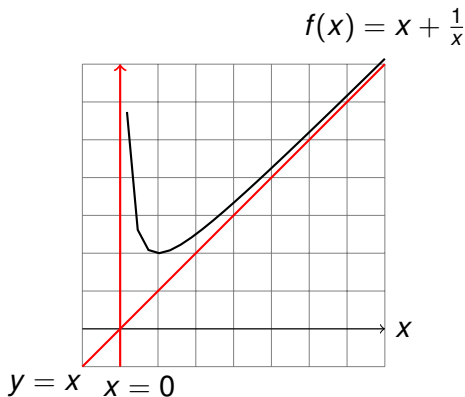
- Punkt  $x_0 = 0$  jest punktem przegięcia krzywej o równaniu  $f(x) = x^3$ .
  - Funkcja  $f(x) = x^2$  nie ma punktów przegięcia.
  - Asymptotami funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$  są proste o równaniach  $y = 0$  oraz  $x = 0$ .
  - Asymptotami funkcji  $f(x) = \frac{1}{x} + x$  są proste o równaniach  $y = x$  oraz  $x = 0$ .
- 
- Pod koniec wykładu dowiemy się, jak wyznaczać punkty przegięcia oraz asymptoty.

# Punkt przegięcia



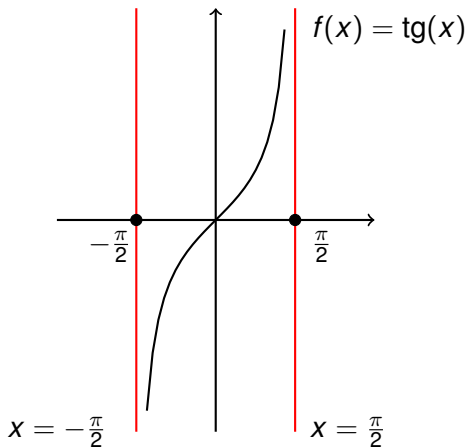
Funkcja  $f(x) = x^3$  ma punkt przegięcia w  $x_0 = 0$ .

# Asymptota ukośna



Funkcja  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  rozważana w przedziale  $(0, \infty)$  ma asymptotę ukośną  $y = x$  i asymptotę pionową  $x = 0$ .

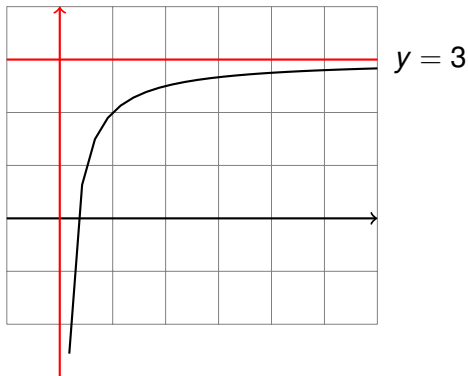
# Asymptota pionowa



Funkcja  $f(x) = \text{tg}(x)$  rozważana w przedziale  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ma asymptoty pionowe  $x = -\frac{\pi}{2}$  oraz  $x = \frac{\pi}{2}$

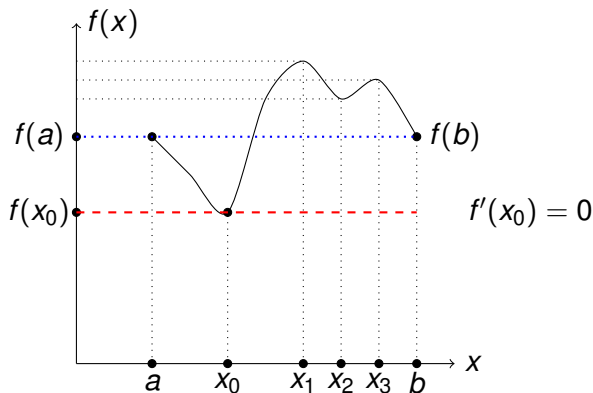
# Asymptota pozioma

$$x = 0$$



Funkcja  $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$  rozważana w przedziale  $(0, \infty)$  ma asymptotę poziomą  $y = 3$  i asymptotę pionową  $x = 0$ .

- **Twierdzenie Rolle'a.** *Jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła w przedziale  $[a, b]$  i różniczkowalna w każdym punkcie należącym do przedziału  $(a, b)$ , a ponadto  $f(a) = f(b)$ , to istnieje punkt  $x_0 \in (a, b)$  taki, że  $f'(x_0) = 0$ .*
- W interpretacji geometrycznej twierdzenie Rolle'a głosi, że przy założeniu równości wartości funkcji na końcach przedziału wewnątrz tego przedziału istnieje punkt  $x_0$  taki, że styczna do krzywej  $f(x)$  przechodząca przez punkt  $(x_0, f(x_0))$  jest równoległa do osi odciętych.

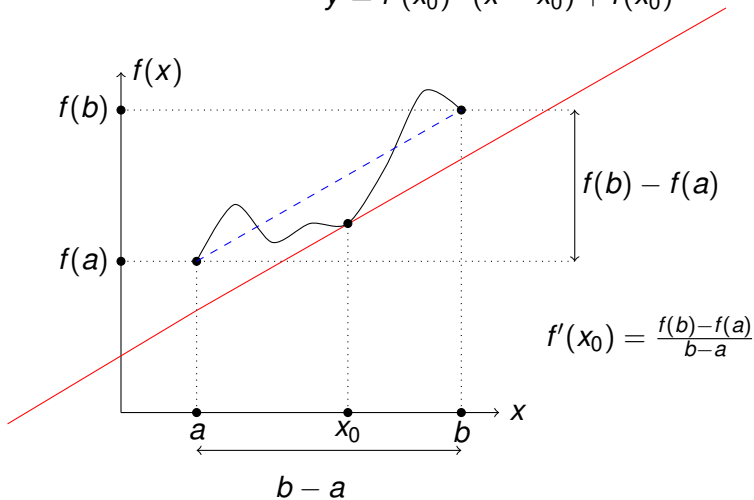


Punkt  $x_0$  istnieje na mocy twierdzenia Rolle'a. Punkty  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  także spełniają tezę tego twierdzenia.



- **Twierdzenie Lagrange'a.** *Jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła w przedziale  $[a, b]$  i różniczkowalna w każdym punkcie należącym do przedziału  $(a, b)$ , to istnieje punkt  $x_0 \in (a, b)$  taki, że:  $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .*
- W interpretacji geometrycznej teza powyższego twierdzenia głosi, że styczna do krzywej  $f(x)$  przechodząca przez punkt  $(x_0, f(x_0))$  jest równoległa do siecznej łączącej punkty  $(a, f(a))$  oraz  $(b, f(b))$ .

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$



**Twierdzenie.** Załóżmy, że funkcja  $f$  jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału  $(a, b)$ . Wtedy:

- 1  $f$  jest niemalejąca w  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f'(x) \geq 0$  w  $(a, b)$ .
- 2  $f$  jest nierosnąca w  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f'(x) \leq 0$  w  $(a, b)$ .

Ponadto, jeśli  $f'(x) > 0$  w  $(a, b)$ , to  $f$  jest ściśle rosnąca w  $(a, b)$ , natomiast jeśli  $f'(x) < 0$  w  $(a, b)$ , to  $f$  jest ściśle malejąca w  $(a, b)$ .

Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego:

**Twierdzenie.** Załóżmy, że funkcja  $f$  jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu  $x_0$ . Wtedy:

- 1 Jeżeli istnieje  $\delta > 0$  taka, że  $f'(x) \geq 0$  dla  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  oraz  $f'(x) \leq 0$  dla  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , to funkcja  $f$  ma maksimum lokalne w punkcie  $x_0$ .
- 2 Jeżeli istnieje  $\delta > 0$  taka, że  $f'(x) \leq 0$  dla  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  oraz  $f'(x) \geq 0$  dla  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , to funkcja  $f$  ma minimum lokalne w punkcie  $x_0$ .

- **Twierdzenie Cauchy'ego.** *Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  są ciągłe w przedziale  $[a, b]$  oraz różniczkowalne w każdym punkcie należącym do przedziału  $(a, b)$ , a ponadto  $g'(x) \neq 0$  dla  $x \in (a, b)$ , to istnieje punkt  $x_0 \in (a, b)$  taki, że:*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

- Z omówionych wyżej twierdzeń o wartości średniej mamy wiele pożytków. Między innymi, pozwalają one uzasadnić regułę postępowania z wyrażeniami, zawierającymi granice, których obliczenie nie jest – na pierwszy rzut oka – oczywiste.

- Tak jest np. w sytuacjach, gdy otrzymujemy wyrażenie ułamkowe, w którym licznik oraz mianownik dążą do zera, lub licznik i mianownik dążą do nieskończoności.
- Procedurę postępowania w takich przypadkach opisuje *reguła de l'Hospitala*. Zachodzą mianowicie następujące cztery twierdzenia:

1. Załóżmy, że funkcje  $f$  i  $g$  są ciągłe w przedziale  $[x_0, x_0 + \delta]$ , gdzie  $\delta > 0$  oraz różniczkowalne we wszystkich punktach przedziału otwartego  $(x_0, x_0 + \delta)$ . Załóżmy też, że  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  oraz  $g(x) \neq 0$  dla wszystkich  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . Jeżeli istnieje granica prawostronna  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , to istnieje również granica prawostronna

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  i zachodzi równość:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy przedział  $[x_0, x_0 + \delta]$  przedziałem  $[x_0 - \delta, x_0]$ , a granice prawostronne przy  $x \rightarrow x_0^+$  granicami lewostronnymi przy  $x \rightarrow x_0^-$ .

2. Załóżmy, że funkcje  $f$  i  $g$  są ciągłe w przedziale niewłaściwym  $(a, \infty)$ , gdzie  $a > 0$  oraz różniczkowalne we wszystkich punktach tego przedziału. Załóżmy też, że  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  oraz  $g'(x) \neq 0$  dla  $x \in (a, \infty)$ . Jeżeli istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , to istnieje także granica  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  oraz zachodzi równość:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .



3. Załóżmy, że funkcje  $f$  i  $g$  są ciągłe w przedziale  $(x_0, x_0 + \delta)$ , gdzie  $\delta > 0$  oraz różniczkowalne we wszystkich punktach tego przedziału. Załóżmy też, że  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \infty$  oraz  $g(x) \neq 0$  dla

$x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . Jeśli istnieje granica prawostronna  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , to

istnieje również granica prawostronna  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  i zachodzi równość:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy przedział  $(x_0, x_0 + \delta)$  przedziałem  $(x_0 - \delta, x_0)$ , a granice prawostronne przy  $x \rightarrow x_0^+$  granicami lewostronnymi przy  $x \rightarrow x_0^-$ .

4. Załóżmy, że funkcje  $f$  i  $g$  są ciągłe w przedziale  $[x_0, x_0 + \delta]$ , gdzie  $\delta > 0$  i mają ciągłe pochodne aż do rzędu  $n - 1$  w tym przedziale oraz ich  $n$ -te pochodne są skończone w każdym punkcie przedziału otwartego  $(x_0, x_0 + \delta)$ . Załóżmy też, że dla  $0 \leq k \leq n - 1$  mamy  $g^{(k)}(x) \neq 0$  dla  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  oraz że zachodzą równości:

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Jeśli istnieje granica prawostronna  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ , to istnieje też granica

prawostronna  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  oraz zachodzi równość:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy przedział  $[x_0, x_0 + \delta]$  przedziałem  $[x_0 - \delta, x_0]$ , a granice prawostronne przy  $x \rightarrow x_0^+$  granicami lewostronnymi przy  $x \rightarrow x_0^-$ .

- Omówione wyżej przejścia od liczenia granicy ilorazu funkcji do liczenia granicy ilorazu ich pochodnych (przy zakładanych założeniach) nazywamy *regułą de l'Hospitala*.
- W powyższych twierdzeniach używaliśmy terminu *symbol nieoznaczony* dla sytuacji, gdy obliczane granice mają postać  $\frac{0}{0}$  lub  $\frac{\infty}{\infty}$ .
- Sformułowania powyższych twierdzeń jawić się mogą studentom kognitywistyki UAM jako odrobinę skomplikowane. Ich dowody (podobnie jak dowody wszystkich innych twierdzeń wspomnianych na tym wykładzie) znajdą zainteresowani słuchacze w tekstach wykładów zamieszczonych na naszej stronie internetowej oraz w podręcznikach, np.: Musielak, H., Musielak, J. 2004. *Analiza matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Sugerujemy, aby słuchacze korzystali z następującej *Uwagi Praktycznej* dotyczącej stosowania reguły de l'Hospitala:

## Uwaga Praktyczna

Przez *symbole nieoznaczone* rozumiemy wyrażenia następujących postaci:  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$

Reguła de l'Hospitala pokazuje, jak radzić sobie z symbolami  $\frac{0}{0}$  oraz  $\frac{\infty}{\infty}$ . Pozostałe sytuacje możemy zredukować do tych dwóch, poprzez przekształcenia:

Dla  $\infty - \infty$  stosujemy przekształcenie:  $f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$ ,

prowadzące do symbolu  $\frac{0}{0}$ , do którego stosujemy regułę de l'Hospitala.

Dla  $0 \cdot \infty$  stosujemy przekształcenie:  $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ , prowadzące do

symbolu  $\frac{\infty}{\infty}$ , do którego stosujemy regułę de l'Hospitala.

Dla symboli  $0^0$ ,  $1^\infty$  oraz  $\infty^0$  stosujemy przekształcenie:

$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ , prowadzące do przypadku rozważanego w punkcie 2.

## Przykłady

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ . Mamy do czynienia z symbolem  $\frac{0}{0}$ . Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x^2}$ . Mamy do czynienia z symbolem  $\frac{\infty}{\infty}$ . Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(\ln x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x \cdot \ln x}}{2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot x^2 \cdot \ln x} = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x)$ . Mamy do czynienia z symbolem  $0 \cdot \infty$ . Korzystając z przekształcenia zalecanego w *Uwadze Praktycznej* oraz z reguły de l'Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x^2})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Założmy, że funkcja  $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ma ciągle pochodne aż do  $n + 1$ -tego rzędu w przedziale  $[a, b]$  (na krańcach przedziału pochodne jednostronne). Wtedy dla każdego  $x \in (a, b)$  zachodzi **wzór Taylora**:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^n \left( \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \right) + R_n(x, a), \text{ gdzie } \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x, a)}{(x-a)^n} = 0.$$

Wzór Taylora pozwala na przybliżanie wartości funkcji wielomianami, których współczynniki wyznaczone są przez pochodne wyjściowej funkcji.

**Twierdzenie Maclaurina.** Założmy, że funkcja  $f$  ma w przedziale  $[0, x]$  (gdzie  $x > 0$ ) ciągłą pochodną  $f^{(n-1)}$  oraz ma skończoną pochodną  $f^{(n)}$  wewnątrz tego przedziału. Dla każdej liczby naturalnej  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  istnieje liczba rzeczywista  $t \in (0, 1)$  taka, że:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + R_n(x), \text{ gdzie}$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)! \cdot k} \cdot (1-t)^{n-k} \cdot f^{(n)}(t \cdot x).$$

## Przykłady

- *Funkcja wykładnicza*  $e^x$ . Zastosowanie twierdzenia Maclaurina daje następujące przedstawienie tej funkcji:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \frac{e^{t \cdot x}}{n!} \cdot x^n, \text{ gdzie } 0 < t < 1.$$

- *Funkcja logarymiczna*  $\ln(1+x)$ . Zastosowanie twierdzenia Maclaurina daje następujące przedstawienie tej funkcji:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n \cdot (1+t \cdot x)^n}, \text{ gdzie } 0 < t < 1 \text{ oraz } x > -1.$$

- *Funkcja trygonometryczna*  $\sin x$ . Zastosowanie twierdzenia Maclaurina daje następujące przedstawienie tej funkcji:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot \sin(t \cdot x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \text{ gdzie } 0 < t < 1.$$

- *Funkcja trygonometryczna*  $\cos x$ . Zastosowanie twierdzenia Maclaurina daje następujące przedstawienie tej funkcji:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot \cos(t \cdot x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \text{ gdzie } 0 < t < 1.$$

Dodajmy jeszcze, dla zainteresowanych słuchaczy, że z omawianych wyżej twierdzeń wynika również, że jeśli szereg  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  ma promień zbieżności  $R > 0$ , to dla  $|x| < R$  zachodzi równość:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Ponadto, z twierdzeń tych wynika, że funkcja  $f$  posiadająca pochodne wszystkich rzędów (wspólnie ograniczone przez pewną stałą) w punktach pewnego przedziału domkniętego może zostać przedstawiona w postaci szeregu potęgowego:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Te wnioski mają duże znaczenie praktyczne w analizie matematycznej.

Poniżej podajemy szereg warunków dotyczących badania funkcji:



*Warunek wystarczający istnienia ekstremum sformułowany przy użyciu drugiej pochodnej.* Załóżmy, że funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0$  skończoną drugą pochodną  $f''(x_0)$ . Jeżeli  $f'(x_0) = 0$  oraz  $f''(x_0) \neq 0$ , to  $f$  ma w  $x_0$  ekstremum lokalne. Przy tym jest to:

- 1 maksimum lokalne, gdy  $f''(x_0) < 0$
- 2 minimum lokalne, gdy  $f''(x_0) > 0$ .

*Warunek wystarczający istnienia ekstremum sformułowany przy użyciu pochodnych wyższych rzędów.* Załóżmy, że funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0$  skończoną pochodną  $f^{(n)}(x_0)$ , dla pewnego  $n > 1$ . Jeśli ponadto  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$  oraz  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , to:

- 1 Gdy  $n$  jest parzysta, to  $f$  ma w  $x_0$  ekstremum lokalne. Przy tym jest to: maksimum lokalne, gdy  $f^{(n)}(x_0) < 0$  zaś minimum lokalne, gdy  $f^{(n)}(x_0) > 0$ .
- 2 Gdy  $n$  jest nieparzysta, to  $f$  nie ma w  $x_0$  ekstremum lokalnego.

*Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia.* Jeżeli funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0$  skończoną drugą pochodną  $f''(x_0)$  oraz ma w  $x_0$  punkt przegięcia, to  $f''(x_0) = 0$ .

*Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia sformułowany przy użyciu drugiej pochodnej.* Załóżmy, że funkcja  $f$  ma w pewnym otoczeniu punktu  $x_0$  skończoną drugą pochodną  $f''(x_0)$ . Jeżeli istnieje  $\delta > 0$  taka, że zachodzi jedno z dwojga:

- 1  $f''(x_0) \geq 0$  dla  $x_0 - \delta < x \leq x_0$  oraz  $f''(x_0) \leq 0$  dla  $x_0 \leq x < x_0 + \delta$
- 2  $f''(x_0) \leq 0$  dla  $x_0 - \delta < x \leq x_0$  oraz  $f''(x_0) \geq 0$  dla  $x_0 \leq x < x_0 + \delta$

to krzywa  $y = f(x)$  ma w punkcie o odciętej  $x_0$  punkt przegięcia. W pierwszym z tych przypadków krzywa przewija się nad stycznej pod styczną, a w drugim z nich przewija się spod stycznej nad styczną.

Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia sformułowany przy użyciu pochodnych wyższych rzędów. Załóżmy, że funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0$  skończoną pochodną  $f^{(n)}(x_0)$ , dla pewnego  $n > 2$ . Jeśli ponadto  $f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$  oraz  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , to:

- 1 Gdy  $n$  jest parzysta, to krzywa  $y = f(x)$  ma w punkcie o odciętej  $x_0$  punkt przegięcia. Przy tym:
  - 1 gdy  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , to krzywa przewija się spod stycznej nad styczną
  - 2 gdy  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , to krzywa przewija się znad stycznej pod styczną.
- 2 Gdy  $n$  jest nieparzysta, to krzywa  $y = f(x)$  nie ma w punkcie o odciętej  $x_0$  punktu przegięcia.

*Ciągłość funkcji wypukłej.* Załóżmy, że funkcja  $f$  jest wypukła w pewnym otoczeniu punktu  $x_0$ . Wtedy  $f$  jest ciągła w tym punkcie. Twierdzenie to zachowuje ważność, gdy wypukłość zamienimy na wklęsłość.

*Wypukłość funkcji a monotoniczność pochodnej.* Funkcja  $f$  różniczkowalna w przedziale  $(a, b)$  jest wypukła w  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna  $f'$  jest niemalejąca w  $(a, b)$ . Funkcja  $f$  różniczkowalna w przedziale  $(a, b)$  jest wklęsła w  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna  $f'$  jest nierosnąca w  $(a, b)$ .

*Wypukłość funkcji a położenie stycznej.* Funkcja  $f$  różniczkowalna w przedziale  $(a, b)$  jest wypukła w  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie  $x_0 \in (a, b)$  styczna do krzywej  $y = f(x)$  w punkcie o odciętej  $x_0$  leży poniżej tej krzywej, bądź jest odcinkami identyczna z tą krzywą. Funkcja  $f$  różniczkowalna w przedziale  $(a, b)$  jest wklęsła w  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie  $x_0 \in (a, b)$  styczna do krzywej  $y = f(x)$  w punkcie o odciętej  $x_0$  leży powyżej tej krzywej, bądź jest odcinkami identyczna z tą krzywą.

*Warunek konieczny i wystarczający wypukłości funkcji.* Załóżmy, że funkcja  $f$  ma skończoną drugą pochodną  $f''$  w przedziale otwartym  $(a, b)$ . Wtedy:

- 1  $f$  jest wypukła w  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f''(x) \geq 0$  dla wszystkich  $x \in (a, b)$ .
- 2  $f$  jest wklęsła w  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f''(x) \leq 0$  dla wszystkich  $x \in (a, b)$ .

*Asymptoty ukośne.* Załóżmy, że funkcja  $f$  jest określona w przedziale niewłaściwym  $(c, +\infty)$ , gdzie  $c \in \mathbb{R}$ . Prosta  $y = a \cdot x + b$  jest asymptotą ukośną funkcji  $f$  przy  $x \rightarrow +\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  oraz  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a \cdot x) = b$ . To twierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy zamienimy przedział  $(c, +\infty)$  na przedział  $(-\infty, c)$  oraz napiszemy wszędzie  $x \rightarrow -\infty$  zamiast  $x \rightarrow +\infty$ .

## Ogólny schemat badania przebiegu zmienności funkcji:

- 1 Określamy dziedzinę oraz przeciwdziedzinę funkcji.
- 2 Badamy granice funkcji w punktach krańcowych jej przedziałów określoności.
- 3 Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji oraz jej wartość dla argumentu równego 0 (czyli wyznaczamy miejsca przecięcia się wykresu funkcji z osiami współrzędnych).
- 4 Wyznaczamy asymptoty funkcji.
- 5 Obliczamy pierwszą i drugą pochodną funkcji.
- 6 Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji.
- 7 Ustalamy przedziały monotoniczności, wklęsłości i wypukłości funkcji.
- 8 Wyznaczamy punkty przegięcia funkcji.
- 9 Wyniki tych ustaleń przedstawiamy w tabeli, na podstawie której szkicujemy wykres funkcji.

# Rozkład normalny

Bardzo ważna w zastosowaniach (jako funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej, o czym słuchacze dowiedzą się na zajęciach ze statystyki) jest funkcja:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Zbadamy przebieg zmienności tej funkcji. Jej dziedziną jest oczywiście cały zbiór  $\mathbb{R}$ .

- Funkcja ta nie przyjmuje wartości 0 dla żadnego  $x \in \mathbb{R}$ , a więc nie ma miejsc zerowych.
- Dla argumentu  $x = 0$  funkcja  $f$  przyjmuje następującą wartość:

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}}.$$

- Wyznaczamy granice funkcji w nieskończoności:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Obliczamy pierwszą i drugą pochodną badanej funkcji:

$$f'(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$





$$f''(x) = \left( \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (x^2 - 1).$$

- $f'(x) = 0$  dla  $x = 0$ .
- Dla  $x \in (-\infty, 0)$  mamy  $f'(x) > 0$ , a więc funkcja  $f$  jest rosnąca w przedziale niewłaściwym  $(-\infty, 0)$ . Dla  $x \in (0, +\infty)$  mamy  $f'(x) < 0$ , a więc funkcja  $f$  jest malejąca w przedziale niewłaściwym  $(0, +\infty)$ . Funkcja  $f$  ma zatem maksimum lokalne w punkcie  $x = 0$ .

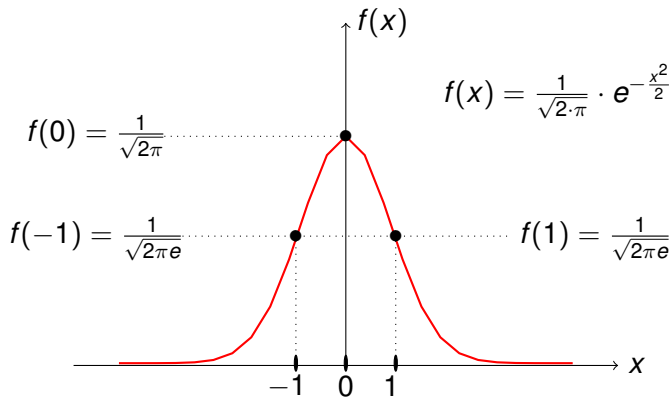


- $f''(x) = 0$  dla  $x = 1$  lub  $x = -1$ .
- Ponieważ dla  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  mamy  $f''(x) > 0$ , więc funkcja  $f$  jest wypukła w przedziałach niewłaściwych  $(-\infty, -1)$  oraz  $(1, +\infty)$ . Ponieważ dla  $x \in (-1, 1)$  mamy  $f''(x) < 0$ , więc funkcja  $f$  jest wklęsła w przedziale  $(-1, 1)$ . Funkcja  $f$  ma zatem punkty przegięcia dla  $x = -1$  oraz  $x = 1$ .

Ponieważ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ , więc prosta  $y = 0$  jest asymptotą badanej funkcji. Jest to jej jedyna asymptota. Możemy zebrać w tabeli poczynione wyżej ustalenia:

$x$	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$		+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$		+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	0		$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}}$		$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}}$	

Na podstawie tej tabeli możemy teraz naszkicować wykres rozważanej funkcji:



# Krzywa logistyczna

*Trend logistyczny* jest charakterystyczny dla sytuacji, gdy pewna wielkość z początku szybko rośnie, ale po osiągnięciu pewnego poziomu rośnie już wolniej, po czym stabilizuje się. Sytuacji takiej odpowiada funkcja:

$f(x) = \frac{a}{1+b \cdot e^{-c \cdot x}}$ , gdzie  $a, b, c > 0$  są pewnymi parametrami. Zbadamy przebieg zmienności tej funkcji. Załóżmy, że badamy ją w przedziale  $[0, \infty)$ , a zatem to jest jej dziedzina.

- Dla  $x = 0$  wartość funkcji  $f$  jest równa:  $f(0) = \frac{a}{1+b \cdot e^{-c \cdot 0}} = \frac{a}{1+b}$ , a więc krzywa ta ma punkt wspólny z osią rzędnych: jest to punkt o współrzędnych  $(0, \frac{a}{1+b})$ . Funkcja przyjmuje jedynie wartości dodatnie, a więc nie ma ona miejsc zerowych.
- Obliczając granicę tej funkcji przy  $x$  dążącym do  $\infty$  widzimy, że:  
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1+b \cdot e^{-c \cdot x}} = a$$
, ponieważ mianownik rozważanego ułamka dąży do 1 przy  $x$  dążącym do  $\infty$ .

Obliczamy pierwszą oraz drugą pochodną rozważanej funkcji:

$$f'(x) = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-c \cdot x}}{(1 + b \cdot e^{-c \cdot x})^2}$$

$$f''(x) = a \cdot b \cdot c^2 \cdot e^{-c \cdot x} \cdot \frac{b \cdot e^{-c \cdot x} - 1}{(1 + b \cdot e^{-c \cdot x})^3}$$



Ponieważ  $f'(x) > 0$  w rozważanej dziedzinie, więc funkcja  $f$  jest rosnąca w tej dziedzinie. Nie ma zatem ekstremum lokalnego.

Mamy  $f''(x) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $b \cdot e^{-c \cdot x} = 1$ , czyli  $e^{-c \cdot x} = \frac{1}{b}$ .  
To zachodzi wtedy, gdy  $e^{c \cdot x} = b$ , czyli gdy  $x = \frac{\ln b}{c}$ . Zauważmy, że:

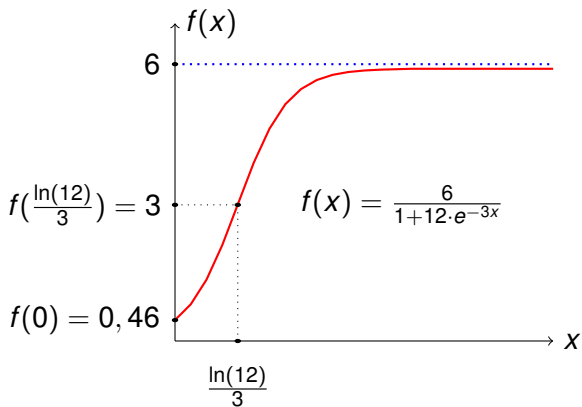
- 1 Dla  $x \in [0, \frac{\ln b}{c})$  mamy  $f''(x) > 0$ , czyli funkcja  $f$  jest wypukła w tym przedziale.
- 2 Dla  $x \in (\frac{\ln b}{c}, \infty)$  mamy  $f''(x) < 0$ , czyli funkcja  $f$  jest wklęsła w tym przedziale.
- 3 Punkt  $(\frac{\ln b}{c}, \frac{a}{2})$  jest punktem przegięcia funkcji  $f$ .

Ponieważ  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1+b \cdot e^{-c \cdot x}} = a$ , więc  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1+b \cdot e^{-c \cdot x}} \cdot \frac{1}{x} = 0$ . Wynika z tego, że prosta o równaniu  $y = a$  jest asymptotą badanej funkcji. Jest to jej jedyna asymptota (dla funkcji rozważanej w  $[0, \infty)$ ); jeśli rozważamy krzywą logistyczną dla argumentów z całego zbioru  $\mathbb{R}$ , to asymptotą poziomą jest też prosta o równaniu  $y = 0$ ).

Tabela zmienności funkcji  $f$  wygląda zatem następująco:

$x$	0	$(0, \frac{\ln b}{c})$	$\frac{\ln b}{c}$	$(\frac{\ln b}{c}, \infty)$	$\infty$
$f'(x)$		+	+	+	
$f''(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{a}{1+b}$		$\frac{a}{2}$		$a$

Na podstawie tej tabeli możemy teraz naszkicować wykres rozważanej funkcji, dla ustalonych parametrów  $a = 6$ ,  $b = 12$ ,  $c = 3$ :





# Myśl przekornie!

- Czy w danym przedziale funkcja może mieć tylko skończoną liczbę ekstremów lokalnych (punktów nieciągłości, punktów przegięcia, punktów, w których nie jest różniczkowalna)?
- Dotąd omawiano pojęcia: granicy, ciągłości i różniczkowalności funkcji jednej zmiennej. W tym przypadku argumenty „dążą” do wybranej wielkości po „drogach” wewnątrz jednowymiarowego kontinuum. A co z funkcjami *wielu* zmiennych (np. dwóch)? Cóż miałyby znaczyć, że ciąg punktów  $(x_n, y_n)$  dąży do punktu  $(a, b)$ ?
- Skoro funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych wyznacza pewną powierzchnię, to czy istnieje odpowiednik pojęcia *stycznej* w tym przypadku?

# Co musisz ZZZ

- Ekstrema lokalne funkcji.
- Reguła de l'Hospitala.
- Wzór Taylora.
- Procedura badania przebiegu zmienności funkcji:
  - Określamy dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji.
  - Badamy granice funkcji w punktach krańcowych jej przedziałów określoności.
  - Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji oraz jej wartość dla argumentu równego 0.
  - Wyznaczamy asymptoty funkcji.
  - Obliczamy pierwszą i drugą pochodną funkcji.
  - Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji.
  - Ustalamy przedziały monotoniczności, wklęsłości i wypukłości funkcji. Wyznaczamy punkty przegięcia funkcji.
  - Sporządzamy tabelę zmienności funkcji oraz wykres funkcji.