Drobinka semantyki KRP

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Uniwersytet Opolski

Wstęp

Niniejsza prezentacja zawiera przypomnienie wybranych ważnych pojęć semantycznych **Klasycznego Rachunku Predykatów** (KRP). Omawiamy:

- składnię i semantykę języka KRP
- tautologie oraz wynikanie logiczne w KRP.

Podajemy jedynie potrzebne definicje oraz formułujemy twierdzenia. Dowody wszystkich twierdzeń oraz przykłady i ćwiczenia podano w pliku: **http://www.logic.amu.edu.pl/images/8/8d/Semkrp.pdf**

Literatura zalecana

Zalecaną literaturą do tej problematyki jest:

- Batóg, T. 2003. *Podstawy logiki.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań (strony 109–112 oraz 238–261).
- Ławrow, I.A., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (strony 85–89 oraz 95–96, a zwłaszcza przypis tłumacza na stronach 87–88).
- Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej.* Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.
- Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów. Zarys teorii.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Stanosz, B. 2005. *Ćwiczenia z logiki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Alfabet

Niech I, J, K będą dowolnymi zbiorami. Rozpatrzmy **alfabet** $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_5 \cup \Sigma_6$, gdzie:

$\Sigma_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$	—	*zmienne indywiduowe*,
$\Sigma_2 = \{P_i^{n_i}\}_{i \in I}$ $(n_i \in \mathcal{N})$	—	*predykaty*,
$\Sigma_3 = \{f_j^{n_j}\}_{j \in J}$ $(n_j \in \mathcal{N})$	—	*symbole funkcyjne*,
$\Sigma_4 = \{a_k\}_{k \in K}$	—	*stałe indywiduowe*,
$\Sigma_5 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \equiv, \forall, \exists\}$	—	*stałe logiczne*,
$\Sigma_6 = \{\ ,\ ,\ (\ ,\ )\}$	—	*symbole pomocnicze*.

Alfabet

- $P_i^{n_i}$ nazywamy n_i-***argumentowym predykatem***,
- $f_j^{n_j}$ nazywamy n_j-***argumentowym symbolem funkcyjnym***,
- symbol $\forall$ nazywamy ***kwantyfikatorem generalnym***,
- symbol $\exists$ nazywamy ***kwantyfikatorem egzystencjalnym***,
- symbole: $\wedge$ (***koniunkcja***), $\vee$ (***alternatywa***), $\rightarrow$ (***implikacja***), $\neg$ (***negacja***) i $\equiv$ (***równoważność***) znane są z wykładu semestru zimowego,
- symbole pomocnicze to: przecinek oraz lewy i prawy nawias.

Zbiór $\sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ nazwiemy ***sygnaturą***. W dalszym ciągu mówić będziemy o pewnej ustalonej sygnaturze σ. Zwykle rozważa się przypadek, gdy $I = J = K = \mathcal{N}$ (zbiór wszystkich liczb naturalnych).
Wyrażeniem języka KRP nazywamy każdy skończony ciąg symboli alfabetu tego języka.

Termy

Definicja ***termu*** języka KRP jest indukcyjna:

- (i) wszystkie zmienne indywiduowe x_n oraz wszystkie stałe indywiduowe a_k są termami;
- (ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami, to wyrażenie $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ jest termem;
- (iii) nie ma innych termów (języka KRP) prócz zmiennych indywiduowych oraz stałych indywiduowych oraz tych termów, które można skonstruować wedle reguły (ii).

Termy, w których nie występują żadne zmienne nazywamy ***termami bazowymi***.

Formuły

Formułą atomową języka KRP nazywamy każde wyrażenie postaci $P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_i}$ są dowolnymi termami.

Definicja ***formuły*** języka KRP jest indukcyjna:

- (i) każda formuła atomowa jest formułą;
- (ii) jeśli α jest dowolną formułą, to wyrażenia $\neg(\alpha)$, $\forall x_n\,(\alpha)$, $\exists x_n\,(\alpha)$ są formułami;
- (iii) jeśli α i β są dowolnymi formułami, to wyrażenia $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \equiv (\beta)$ są formułami;
- (iv) nie ma innych formuł (języka KRP) prócz tych, które można utworzyć wedle reguł (i)–(iii).

Zmienne wolne i związane

Wyrażenie α w dowolnej formule o postaci $\forall x_n\ (\alpha)$ lub o postaci $\exists x_n\ (\alpha)$ nazywamy ***zasięgiem*** odpowiedniego kwantyfikatora.
Zmienna x_n występująca na danym miejscu w formule α jest ***na tym miejscu związana***, jeżeli jest ona podpisana pod którymś z kwantyfikatorów lub też znajduje się w zasięgu jakiegoś kwantyfikatora, pod którym podpisana jest również zmienna x_n.

Jeżeli zmienna x_n, występująca na danym miejscu w formule α, nie jest na tym miejscu związana, to mówimy, że jest ona ***na tym miejscu wolna w*** α.
Mówimy, że x_n jest ***zmienną wolną w*** α wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednym miejscu zmienna ta jest wolna w α.

Formuły nie zawierające żadnych zmiennych wolnych nazywamy ***zdaniami*** (języka KRP).

Podstawialność termu za zmienną w formule

Mówimy, że term t jest ***podstawialny*** za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_i nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego którąś ze zmiennych występujących w termie t.

Jeśli t jest podstawialny za x_i do α, to żadna zmienna występująca w t nie stanie się związana po podstawieniu t za wszystkie wolne wystąpienia x_i w formule α.

W szczególności, zmienna x_j jest podstawialna za zmienną x_i w α, jeżeli po podstawieniu x_j w miejscach wolnych wystąpień x_i w α, zmienna x_j nie stanie się na tych miejscach związana w α.

Operacja podstawiania termu za zmienną w formule

Definicja operacji $S(t, x, A)$ ***podstawiania termu t za zmienną x_i*** (w dowolnym termie A lub formule A języka KRP) ma postać indukcyjną (poniżej t jest termem, x_i jest zmienną, a_j jest stałą, α i β są formułami, a reszta oznaczeń jest oczywista):

- $S(t, x_i, x_j)$ jest termem x_j, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, x_j)$ jest termem t, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, a_j)$ jest termem a_j
- $S(t, x_i, f_j(t_1, \ldots, t_n))$ jest termem $f_j(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))$
- $S(t, x_i, P_j(t_1, \ldots, t_n))$ jest formułą $P_j(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))$
- $S(t, x_i, \neg(\alpha))$ jest formułą $\neg S(t, x_i, \alpha)$

Operacja podstawiania termu za zmienną w formule

- $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ S(t, x_i \alpha)$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ S(t, x_i \alpha)$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, \alpha \wedge \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \wedge S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \vee \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \vee S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \rightarrow \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \rightarrow S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \equiv \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \equiv S(t, x_i, \beta)$.

Gdy x i y są zmiennymi, to zamiast $S(y, x, \alpha)$ piszemy czasem $\alpha(x/y)$.

Interpretacje

Nazwiemy ***interpretacją języka o sygnaturze*** σ dowolny układ $\langle M, \sigma, \triangle \rangle$, gdzie M jest zbiorem, a $\triangle$ funkcją (***funkcją denotacji***) o dziedzinie σ, która przyporządkowuje:

- każdej stałej indywiduowej a_k element $\triangle(a_k) \in M$;
- każdemu predykatowi $P_i^{n_i}$ relację n_i-argumentową $\triangle(P_i^{n_i}) \subseteq M^{n_i}$;
- każdemu symbolowi funkcyjnemu $f_j^{n_j}$ funkcję n_j-argumentową $\triangle(f_j^{n_j}) : M^{n_j} \to M$.

Wtedy ***strukturami relacyjnymi sygnatury*** σ są dowolne układy $\langle M, \triangle[\sigma] \rangle$, gdzie $\triangle$ jest funkcją denotacji, a $\triangle[\sigma]$ oznacza ciąg (indeksowany elementami zbioru $I \cup J \cup K$) wszystkich wartości funkcji σ. Jeśli $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$ jest strukturą relacyjną, to M nazywamy ***uniwersum*** struktury $\mathfrak{M}$.

Interpretacje

Jeśli $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$ jest strukturą relacyjną, to czasem wygodnie jest używać następujących oznaczeń:

- $|\mathfrak{M}|$ dla oznaczenia uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, czyli dla oznaczenia zbioru M;
- $\triangle^{\mathfrak{M}}$ dla oznaczenia funkcji denotacji struktury $\mathfrak{M}$.

Uwaga terminologiczna. W polskiej literaturze przedmiotu terminów ***struktura relacyjna***, ***system relacyjny*** oraz ***struktura algebraiczna*** używa się wymiennie. Gdy sygnatura nie zawiera predykatów, to mówimy o ***algebrach***, gdy zaś sygnatura nie zawiera ani stałych ani symboli funkcyjnych, to mówimy o strukturach relacyjnych ***czystych***.

Wartościowania

Wartościowaniem zmiennych w uniwersum M nazywamy dowolny nieskończony przeliczalny ciąg $w = \langle w_n \rangle$ elementów zbioru M. Gdy

$$w = \langle w_n \rangle = \langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots \rangle$$

jest wartościowaniem w M oraz $m \in M$, to przez w_i^m oznaczamy wartościowanie:

$$\langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots \rangle.$$

Uwaga. Nie myl wartościowań w KRZ z wartościowaniami w KRP. W KRZ wartościowania to nieskończone ciągi wartości logicznych, w KRP wartościowania to nieskończone ciągi elementów uniwersum interpretacji.

Wartości termów

Jeśli t jest termem sygnatury σ, a $\langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ strukturą relacyjną sygnatury σ oraz $w = \langle w_i \rangle$ jest wartościowaniem zmiennych w M, to ***wartość termu t w strukturze $\langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ przy wartościowaniu w***, oznaczana przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$ określona jest indukcyjnie:

- gdy t jest zmienną x_i, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = w_i$;
- gdy t jest stałą a_k, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(a_k)$;
- gdy t jest termem złożonym postaci $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są termami, to
  $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(f_j^{n_j})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_j}))$.

Relacja spełniania

Definicja relacji $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ ***spełniania formuły*** α ***w strukturze*** $\mathfrak{M}$ ***przez wartościowanie*** w ma następującą postać indukcyjną:

- $\mathfrak{M} \models_w P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $\triangle(P_i^{n_i})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_i}))$;
- $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \wedge (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
- $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \vee (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
- $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \rightarrow (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
- $\mathfrak{M} \models_w \neg(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$;
- $\mathfrak{M} \models_w \forall x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla każdego $m \in M$;
- $\mathfrak{M} \models_w \exists x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla pewnego $m \in M$.

Relacja spełniania

Ćwiczenie. Podaj definicję dla przypadku $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \equiv (\beta)$.

Jeśli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla każdego wartościowania w, to mówimy, że formuła α jest ***prawdziwa w*** $\mathfrak{M}$ i piszemy wtedy $\mathfrak{M} \models \alpha$.
Piszemy $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models \alpha$.

Mówimy, że formuła α jest ***fałszywa*** w $\mathfrak{M}$, gdy nie jest ona prawdziwa w $\mathfrak{M}$.

Formuła α jest zatem fałszywa w $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

Przykład 1

Niech w sygnaturze rozważanego języka będzie dwuargumentowy predykat $\prec$. Niech interpretacją tego predykatu w zbiorze wszystkich liczb naturalnych będzie relacja $<$ mniejszości między liczbami naturalnymi. Zastanówmy się, jakie wartościowania (czyli ciągi liczb naturalnych) spełniają każdą z podanych niżej formuł:

- (1) $x_1 \prec x_2$
- (2) $\exists x_2 \, (x_1 \prec x_2)$
- (3) $\forall x_1 \, (x_1 \prec x_2)$
- (4) $\forall x_1 \exists x_2 \, (x_1 \prec x_2)$
- (5) $\exists x_2 \forall x_1 \, (x_1 \prec x_2)$.

Przykład 1

Formuła (1) jest spełniona przez wszystkie ciągi w, dla których: $w_1 < w_2$.
Formuła (2) jest spełniona przez takie ciągi w, które różnią się od ciągów spełniających formułę (1) co najwyżej na drugim miejscu. Ponieważ dla dowolnej liczby w_1 możemy znaleźć liczbę c taką, że $w_1 < c$, więc formułę (2) spełniają ***wszystkie*** ciągi liczb naturalnych.
Formuły (3) nie spełnia ***żaden*** ciąg. Przypuśćmy bowiem, że jakieś wartościowanie w spełnia (3). Wtedy ***każdy*** ciąg v różniący się od w na pierwszym miejscu (tj. taki, że $w_1 \neq v_1$) musiałby spełniać formułę (1). Ale np. ciąg stały $\langle w_2, w_2, w_2, \ldots \rangle$ nie spełnia formuły (1) — sprzeczność. Nie ma zatem ciągu spełniającego (3).
Jakiś ciąg w spełnia formułę (4), gdy każdy ciąg v otrzymany z w przez zastąpienie w_1 ***dowolną*** liczbą naturalną spełnia formułę (2). Ale formułę (2) spełniają ***wszystkie*** ciągi. Zatem również formułę (4) spełniają ***wszystkie*** ciągi.
Ponieważ ***żaden*** ciąg nie spełnia formuły (3), więc również ***żaden*** ciąg nie spełnia formuły (5) (bo ciągi spełniające (5) miałyby się różnić od jakiegoś ciągu spełniającego (3) co najwyżej na drugim miejscu).

Przykład 2

Niech N będzie predykatem jednoarumentowym, $\doteq$ predykatem dwuargumentowym, S jednoargumentowym symbolem funkcyjnym, a $\bigcirc$ stałą. Zamiast $\doteq(t_1, t_2)$, dla termów t_1 oraz t_2 piszemy: $t_1 \doteq t_2$. Rozważmy następujące zdania:

- $N(\bigcirc)$
- $\forall x\, \neg(\bigcirc \doteq S(x))$
- $\forall x\, (N(x) \rightarrow N(S(x)))$
- $\forall x \forall y\, (S(x) \doteq S(y) \;\rightarrow\; x \doteq y)$
- $\forall x\, (x \doteq x)$
- $\forall x \forall y\, (x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$
- $\forall x \forall y \forall z\, ((x \doteq y \wedge y \doteq z) \rightarrow x \doteq z)$
- $\forall x \forall y\, ((N(x) \wedge x \doteq y) \rightarrow N(y))$
- $\forall x \forall y\, (x \doteq y \rightarrow S(x) \doteq S(y))$.

Przykład 2

Wtedy modelem powyższego zbioru zdań będzie każda struktura $\mathfrak{M}$ o uniwersum M zawierającym wszystkie liczby naturalne oraz następującej interpretacji stałej $\bigcirc$, symbolu funkcyjnego S, predykatu N oraz predykatu $\doteq$:

- $\bigcirc$ denotuje liczbę 0;
- S denotuję funkcję następnika, tj. $S(t)$ jest liczbą (oznaczaną przez) $t + 1$, dla dowolnej liczby (oznaczanej przez) t;
- predykat N denotuje własność „być liczbą naturalną";
- predykat $\doteq$ denotuje relację identyczności $=$.

Proszę podumać nad następującym pytaniem: czy w takim modelu $\mathfrak{M}$ prawdziwe jest zdanie: $\forall x\, N(x)$? Oczywiście, dla dowolnego modelu $\mathfrak{N}$ powyższego zbioru zdań, denotacja predykatu N w $\mathfrak{N}$ będzie zbiorem nieskończonym. Ale czy musi to być zbiór pokrywający się z całym uniwersum modelu?

Przykład 3

Rozważmy następujące formuły, zawierające predykat dwuargumentowy R:

- $\forall x \forall y \forall z\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) toR(x,z))$ (R nazywa relację przechodnią)
- $\forall x \forall y\ (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$ (R nazywa relację asymetryczną)
- $\forall x \exists y\ R(x,y)$ (R nazywa relację serialną).

Wtedy każda interpretacja, w której prawdziwe są powyższe zdania, ma uniwersum nieskończone.

Dygresja

Dla tych, którzy narzekają na abstrakcyjność przykładów:

Politechnika. Profesor dyktuje zadanie:
— Na sznurku wisi metalowa sztabka. Pocisk, lecący prostopadle do powierzchni sztabki, przebija sztabkę, tracąc przy tym połowę swojej prędkości. Oblicz kąt wychylenia sztabki.
Na to jedno z Dziewcząt (pragnące zostać Panią Inżynier, lub choćby Panią Inżynierową):
— Panie Psorze, my zawsze liczymy takie schematyczne zadania. Czy nie moglibyśmy rozważać przyjemniejszych, weselszych problemów. Jakieś kwiatki, Zwierzątka,. . .
Na to profesor:
— Proszę bardzo. Na sznurku wisi Wiewiórka. . .

Tautologie i wynikanie logiczne w KRP

Tautologią (klasycznego rachunku predykatów sygnatury σ) nazywamy każdą formułę (sygnatury σ), która jest prawdziwa we wszystkich strukturach relacyjnych (sygnatury σ).

Jeśli $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich α ze zbioru X, to mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest ***modelem*** X i piszemy $\mathfrak{M} \models X$.
Mówimy, że α ***wynika logicznie*** z X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem $\{\alpha\}$. Piszemy wtedy $X \models_{krp} \alpha$.
Ogólniej, mówimy, że ze zbioru X ***wynika logicznie*** (na gruncie KRP) zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem zbioru Y. Piszemy wtedy $X \models_{krp} Y$.
Jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} Y$, to piszemy $X \not\models_{krp} Y$. Podobnie, jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} \alpha$, to piszemy $X \not\models_{krp} \alpha$

Uwaga!

Należy zwracać uwagę, w jakich kontekstach występuje symbol $\models$ i jak poszczególne relacje semantyczne są definiowane:

- $\mathfrak{M} \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla wszystkich w.
- $\mathfrak{M} \not\models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ dla co najmniej jednego w.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich $\alpha \in X$.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\alpha \in X$ oraz dla wszystkich w: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in X$ taka, że $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\alpha \in X$ oraz w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

Uwaga!

- $X \models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury $\mathfrak{M}$: jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models Y$.
- $X \not\models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$.
- $X \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury $\mathfrak{M}$: jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

Niektóre własności pojęć semantycznych

Wyrazimy teraz precyzyjnie intuicyjne sformułowania:

- wartość termu w ustalonej interpretacji zależy jedynie od wartościowań zmiennych wolnych tego termu
- spełnianie formuły w ustalonej interpretacji zależy jedynie od wartościowań zmiennych wolnych tej formuły.

Twierdzenie 1.
Niech $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ będą wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$. Jeżeli $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w termie t, to:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t).$$

Niektóre własności pojęć semantycznych

Twierdzenie 2.
Jeżeli $w = \langle w_n \rangle$ i $v = \langle v_n \rangle$ są wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$ oraz $v = \langle w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle$, to: $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t')$.

Twierdzenie 3.
Niech $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ będą wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M}\langle M, \triangle[\sigma] \rangle$. Jeżeli $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α, to:

$$\mathfrak{M} \models_w \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

Niektóre własności pojęć semantycznych

Twierdzenie 4.
Jeżeli α jest zdaniem, a $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ są dowolnymi wartościowaniami w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, to:

$$\mathfrak{M} \models_w \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_w \alpha.$$

Twierdzenie 5.
Jeśli α jest zdaniem, to następujące warunki są równoważne:

- (1) Istnieje wartościowanie $w = \langle w_n \rangle$ w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ takie, że $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.
- (2) Dla każdego wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ mamy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.

Niektóre własności pojęć semantycznych

Twierdzenie 6.
Jeśli t jest termem podstawialnym za zmienną x_i do α, a $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ są wartościowaniami w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ oraz

$$v = \langle w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle,$$

to:

$$\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

Dowody wszystkich powyższych twierdzeń przeprowadza sie przez indukcję strukturalną.

Niektóre własności pojęć semantycznych

Twierdzenie 7.
Relacja $\models_{krp}$ ma następujące własności:

- (1) $\models_{krp}$ jest zwrotna: $X \models_{krp} X$ dla każdego X.
- (2) $\models_{krp}$ jest przechodnia: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $Y \models_{krp} Z$, to $X \models_{krp} Z$, dla wszystkich X, Y, Z.
- (3) $\models_{krp}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \models_{krp} Y$.
- (4) $\models_{krp}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \models_{krp} Z$.
- (5) $\emptyset \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRP.

Niektóre własności pojęć semantycznych

Twierdzenie 8.
Niech α, β oraz γ będą dowolnymi formułami języka KRP. Wtedy tautologiami KRP są wszystkie formuły postaci:

- (A1) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- (A2) $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
- (A6) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)))$
- (A7) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- (A8) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

Niektóre własności pojęć semantycznych

- (A9) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta))$
- (A10) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A11) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- (A12) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \equiv \beta))$
- (A13) $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A14) $\forall x_n\, \alpha \rightarrow S(t, x_n, \alpha)$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A15) $S(t, x_n, \alpha) \rightarrow \exists x_n\, \alpha$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A16) $\forall x_n\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x_n\, \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w α
- (A17) $\forall x_n\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x_n\, \alpha \rightarrow \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w β.

Komentarza wymagają warunki umieszczone w punktach (A14)–(A17). Podamy mianowicie przykłady wskazujące, że jeśli warunki te nie są spełnione, to odnośne formuły nie są tautologiami KRP.

Niektóre własności pojęć semantycznych

1. Pokażemy, że istnieje formuła α, dla której t nie jest podstawialny za x_n w α i dla której $\forall x_n\, \alpha \rightarrow S(t, x_n, \alpha)$ nie jest tautologią KRP.

Niech α będzie formułą: $\exists x_m P(x_n, x_m)$, gdzie P jest dowolnym predykatem dwuargumentowym. Wtedy $S(x_m, x_n, \alpha)$ jest formułą $\exists x_m\, P(x_m, x_m)$. Formuła (A14) ma wtedy postać:

$$\forall x_n \exists x_m\, P(x_n, x_m) \;\rightarrow\; \exists x_m\, P(x_m, x_m).$$

Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których jest ona fałszywa. Dla przykładu: niech uniwersum $\mathfrak{M}$ będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych, a interpretacją P w $\mathfrak{M}$ niech będzie relacja mniejszości. Wtedy poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy w $\mathfrak{M}$, a jej następnik jest w $\mathfrak{M}$ fałszywy.

Niektóre własności pojęć semantycznych

2. Pokażemy, że istnieje formuła α, dla której t nie jest podstawialny za x_n w α i dla której $S(t, x_n, \alpha) \rightarrow \exists x_n \, \alpha$ nie jest tautologią KRP.

Niech α będzie formułą: $\forall x_m P(x_n, x_m)$, gdzie P jest dowolnym predykatem dwuargumentowym. Wtedy $S(x_m, x_n, \alpha)$ jest formułą $\forall x_m P(x_m, x_m)$. Formuła (A14) ma wtedy postać:

$$\forall x_m P(x_m, x_m) \ \rightarrow \ \exists x_n \forall x_m P(x_n, x_m).$$

Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których jest ona fałszywa. Dla przykładu: niech uniwersum $\mathfrak{M}$ będzie zbiorem wszystkich liczb całkowitych, a interpretacją P w $\mathfrak{M}$ niech będzie relacja mniejszości. Wtedy poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy w $\mathfrak{M}$, a jej następnik jest w $\mathfrak{M}$ fałszywy.

3. Pokażemy, że istnieją formuły α oraz β takie, że x_n jest wolna w α i dla których $\forall x_n\,(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x_n\,\beta)$ nie jest tautologią KRP.
Niech P oraz Q będą dowolnymi predykatami jednoargumentowymi. Niech α będzie formułą $P(x_n)$, a β formułą $Q(x_n)$. Zauważmy, że x_n jest zmienną wolną formuły α. Formuła (A16) ma w tym przypadku postać:

$$\forall x_n\,(P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (P(x_n)\ \rightarrow\ \forall x_n\,Q(x_n)).$$

Zauważmy, że powyższa formuła zawiera wolne wystąpienie zmiennej x_n.
Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których nie jest ona spełniona przez pewne wartościowania. Dla przykładu, niech struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w będą określone w sposób następujący:

- uniwersum $\mathfrak{M}$ jest zbiór wszystkich liczb naturalnych
- interpretacją predykatu P jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 4
- interpretacją predykatu Q jest jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 2
- wartościowanie w określone jest następująco: $w_i = 0$, dla wszystkich i.

Wtedy $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n\,(P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (P(x_n)\ \rightarrow\ \forall x_n\,Q(x_n))$.

4. Pokażemy, że istnieją formuły α oraz β takie, że x_n jest wolna w β i dla których $\forall x_n\,(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x_n\,\alpha \rightarrow \beta)$ nie jest tautologią KRP.
Niech P oraz Q będą dowolnymi predykatami jednoargumentowymi. Niech α będzie formułą $P(x_n)$, a β formułą $Q(x_n)$. Zauważmy, że x_n jest zmienną wolną formuły β. Formuła (A17) ma w tym przypadku postać:

$$\forall x_n\,(P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (\exists x_n\,P(x_n) \rightarrow Q(x_n)).$$

Zauważmy, że powyższa formuła zawiera wolne wystąpienie zmiennej x_n.
Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których nie jest ona spełniona przez pewne wartościowania. Dla przykładu, niech struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w będą określone w sposób następujący:

- uniwersum $\mathfrak{M}$ jest zbiór zbiór wszystkich liczb naturalnych
- interpretacją predykatu P jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 4
- interpretacją predykatu Q jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 2
- wartościowanie w określone jest następująco: $w_i = 1$, dla wszystkich i.

Wtedy $\mathfrak{M} \nvDash_w \forall x_n\,(P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (\exists x_n\,P(x_n) \rightarrow Q(x_n))$.

Reguły wnioskowania

Niech $\mathcal{R}$ będzie regułą wnioskowania w KRP. Mówimy, że $\mathcal{R}$ jest ***niezawodna*** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego sekwentu $(X, \alpha) \in \mathcal{R}$: $X \models_{krp} \alpha$.
Reguła (o schemacie) (X, α) **zachowuje własność bycia tautologią**, wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli wszystkie elementy zbioru X są tautologiami KRP, to również α jest tautologią KRP.

Przez ***regułę generalizacji*** rozumiemy następującą regułę wnioskowania:

$$(RG) \quad \frac{\alpha}{\forall x_n \ \alpha}.$$

Reguła odrywania:

$$(RO) \quad \frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}$$

jest znana z wykładów semestru zimowego.

Reguły wnioskowania

Twierdzenie 9.
Reguła odrywania i reguła generalizacji zachowują własność bycia tautologią.

Twierdzenie 10.
Schematy tautologii KRZ są schematami tautologii KRP.

Podobnie jak w KRZ, również w KRP każda reguła niezawodna zachowuje własność bycia tautologią.

Reguły wnioskowania

Przy omawianiu aksjomatycznego ujęcia KRP rozważa się zwykle wiele dalszych reguł wnioskowania, np.:

$$\frac{\forall x_n\ \alpha}{S(t, x_n, \alpha)},$$

o ile term t jest podstawialny za x_n w α.

$$\frac{S(t, x_n, \alpha)}{\exists x_n\ \alpha},$$

o ile term t jest podstawialny za x_n w α.

Reguły wnioskowania

$$\frac{\forall x_n\,(\alpha \to \beta)}{\alpha \to \forall x_n\,\beta},$$

o ile zmienna x_n nie jest wolna w α.

$$\frac{\forall x_n\,(\alpha \to \beta)}{\exists x_n\,\alpha \to \beta},$$

o ile zmienna x_n nie jest wolna w β.

Można pokazać, że powyższe cztery reguły są niezawodne. Zachowują też własność bycia tautologią.

Twierdzenie o dedukcji wprost

Twierdzenie 11. ***Twierdzenie o dedukcji wprost*** (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzi następująca równoważność:

$$X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \models_{krp} \alpha \rightarrow \beta.$$

Twierdzenie o dedukcji nie wprost

Twierdzenie 12. ***Twierdzenie o dedukcji nie wprost*** (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzą następujące równoważności:

- (a) $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \neg\alpha$.
- (b) $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \alpha$.

Niektóre ważne tautologie KRP

- 1. $\forall x\, \alpha \rightarrow \alpha$.
- 2. $\forall x\, \alpha \rightarrow \alpha(x/t)$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
- 3. $\alpha \rightarrow \exists x\, \alpha$.
- 4. $\alpha(x/t) \rightarrow \exists x\, \alpha$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
- 5. $\forall x\, \alpha \rightarrow \exists x\, \alpha$.
- 6. $\forall x\, \alpha \equiv \forall y\, \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α.
- 7. $\exists x\, \alpha \equiv \exists y\, \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α.
- 8. $\forall x\, \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
- 9. $\exists x\, \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
- 10. $\forall x \forall y\, \alpha \equiv \forall y \forall x\, \alpha$.

Niektóre ważne tautologie KRP

- 11. $\exists x \exists y\ \alpha \equiv \exists y \exists x\ \alpha$.
- 12. $\exists x \forall y\ \alpha \rightarrow \forall y \exists x\ \alpha$.
- 13. $\forall x \forall y\ \alpha \rightarrow \forall x\ \alpha(y/x)$, o ile x jest podstawialna za y w α.
- 14. $\exists x\ \alpha(y/x) \rightarrow \exists x \exists y\ \alpha$, o ile x jest podstawialna za y w α.
- 15. $\neg \forall x\ \alpha \equiv \exists x\ \neg \alpha$.
- 16. $\neg \exists x\ \alpha \equiv \forall x\ \neg \alpha$.
- 17. $\forall x\ \alpha \equiv \neg \exists x\ \neg \alpha$.
- 18. $\exists x\ \alpha \equiv \neg \forall x\ \neg \alpha$.
- 19. $(\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$.
- 20. $(\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha(x/t)) \rightarrow \beta(x/t)$, o ile t jest podstawialny za x do α i do β.

Niektóre ważne tautologie KRP

- 21. $\forall x\,(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\,\alpha \rightarrow \beta)$.
- 22. $\forall x\,(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\,\alpha \rightarrow \forall x\,\beta)$.
- 23. $(\forall x\,(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \exists x\,\beta$.
- 24. $\forall x\,(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \exists x\,\beta)$.
- 25. $\forall x\,(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x\,\alpha \rightarrow \exists x\,\beta)$.
- 26. $\forall x\,(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\exists x\,\alpha \rightarrow \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 27. $\forall x\,(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \forall x\,\beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 28. $\exists x\,(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\forall x\,\alpha \rightarrow \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 29. $\exists x\,(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \exists x\,\beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 30. $\forall x\,(\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\,\alpha \wedge \forall x\,\beta)$.

Niektóre ważne tautologie KRP

- 31. $\exists x\,(\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\,\alpha \vee \exists x\,\beta)$.
- 32. $(\forall x\,\alpha \vee \forall x\,\beta) \rightarrow \forall x\,(\alpha \vee \beta)$.
- 33. $\exists x\,(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\exists x\,\alpha \wedge \exists x\,\beta)$.
- 34. $\forall x\,(\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\,\alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 35. $\forall x\,(\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \forall x\,\beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 36. $\forall x\,(\alpha \vee \beta) \equiv (\forall x\,\alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 37. $\forall x\,(\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \forall x\,\beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 38. $\exists x\,(\alpha \wedge \beta) \equiv (\exists x\,\alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 39. $\exists x\,(\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \exists x\,\beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 40. $\exists x\,(\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\,\alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

Niektóre ważne tautologie KRP

- 41. $\exists x\,(\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \exists x\,\beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 42. $\forall x\,(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\forall x\,(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \forall x\,(\beta \rightarrow \alpha))$.
- 43. $\forall x\,(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\forall x\,\alpha \equiv \forall x\,\beta)$.
- 44. $\forall x\,(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\exists x\,\alpha \equiv \exists x\,\beta)$.

Odpowiedź na pytanie Państwa Studentek i Studentów:

Czy trzeba znać te tautologie?

jest krótka i brzmi:

TAK.