METODY DOWODZENIA TWIERDZEŃ I AUTOMATYZACJA ROZUMOWAŃ
KONWERSATORIUM 4: POSTACIE NORMALNE I PREFIKSOWE

V rok kognitywistyki UAM

1 Semantyczna równoważność formuł

Pokaż, że każda formuła języka KRZ jest semantycznie równoważna formule zawierającej jedynie:

1. koniunkcję i negację
2. alternatywę i negację
3. implikację i negację
4. implikację i falsum

2 Binegacja i kreska Sheffera

Funktory $\uparrow$ (NAND, kreska Sheffera) oraz $\downarrow$ (binegacja, strzałka Peirce'a, NOR) są jedynymi, za pomocą których można (w logice klasycznej) wyrazić (zdefiniować) wszystkie pozostałe funktory prawdziwościowe. Czy potrafisz tego dowieść?

Najpierw zauważmy, że tautologiami KRZ są:

1. $p \uparrow q \;\equiv\; \neg(p \wedge q)$
2. $\neg p \;\equiv\; p \uparrow p$
3. $(p \wedge q) \;\equiv\; ((p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q))$
4. $(p \vee q) \;\equiv\; ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q))$
5. $(p \rightarrow q) \;\equiv\; (p \uparrow (q \uparrow q))$
6. $(p \rightarrow q) \;\equiv\; (p \uparrow (p \uparrow q))$

Zob. np.: https://en.wikipedia.org/wiki/Sheffer_stroke

Ponadto, tautologiami KRZ są:

1. $(p \downarrow q) \equiv \neg(p \vee q)$
2. $\neg p \equiv p \downarrow p$
3. $(p \wedge q) \equiv ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$
4. $(p \vee q) \equiv ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q))$
5. $(p \rightarrow q) \equiv (((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q))$

Zob. np.: https://en.wikipedia.org/wiki/Logical_NOR

Załóżmy teraz, że h jest funktorem, za pomocą którego można zdefiniować wszystkie pozostałe funktory KRZ. Wtedy:

1. Gdyby $h(1,1) = 1$, to każda formuła zbudowana wyłącznie przy pomocy h przyjmowałaby wartość 1, gdy wszystkie jej zmienne zdaniowe miałyby wartość 1.
2. A zatem przez h nie dałoby się wyrazić negacji.
3. W konsekwencji, musi być $h(1,1) = 0$.
4. Analogicznie, musi być $h(0,0) = 1$.
5. Otrzymujemy zatem następujący fragment tabliczki prawdziwościowej dla funktora h:

p	q	$h(p,q)$
0	0	1
0	1	
1	0	
1	1	0

6. Jeśli w pozostałych dwóch wierszach ostatniej kolumny byłyby dwa 0 bądź dwie 1, to otrzymujemy binegację lub kreskę Sheffera.
7. Tak więc, na tych miejscach musimy mieć jedno 0 oraz jedną 1.
8. Wtedy jednak otrzymujemy funktor równoważny negacji któregoś z argumentów (czyli h jest wtedy wyrażalny przez negację).
9. Przy pomocy samej negacji nie można jednak zdefiniować ani verum ani falsum.
10. Ostatecznie, h musi być albo binegacją albo kreską Sheffera.

3 Postacie normalne

Sprowadź do kpn i ustal, czy jest tautologią:

1. $((p \to q) \wedge p) \to q$
2. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (r \to p))$
3. $(p \leftarrow (q \uparrow r)) \downarrow \neg p$

4 Postać prefiksowa

Podaj postać prefiksową formuły języka teorii mnogości:

1. $\exists x(Z(x) \wedge \forall y(y \in x)) \to \exists x(Z(x) \wedge x \in x \wedge \neg(x \in x))$

5 Skolemizacja

Dokonaj skolemizacji formuły:

1. $\exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl