Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Struktury topologiczne

Struktury topologiczne

- Struktury topologiczne związane są z takimi pojęciami, jak np.: *otoczenie*, *bliskość*, *odległość*, *spójność*, *zwartość*, *punkt skupienia*, *zbieżność*, *granica*, itp.
- Bada się również własności przestrzeni wyposażonych w struktury topologiczne, które są *zachowywane* przez przekształcenia na nich określone. Ustala się zatem, m.in., jakie przekształcenia zachowują *bliskość*, *kształt*, *położenie*, itd.

- W tym wykładzie rozważymy pewne szczególne przestrzenie topologiczne, a mianowicie przestrzenie *metryczne* (tj. takie, w których określić można pojęcie *odległości*) oraz *zupełne* (tj. takie przestrzenie, które – mówiąc na razie intuicyjnie – wraz z każdym ciągiem elementów przestrzeni, które są „coraz bliższe sobie" zawierają też „punkt graniczny" tego ciągu).

Aksjomatyka dla liczb rzeczywistych

Aksjomatyczny opis struktury $(\mathbb{R}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ jest *ciałem*, czyli spełnione są następujące warunki:
   1. $\mathbb{R}$ ma co najmniej dwa elementy
   2. działanie $+$ (dodawanie) jest łączne i przemienne
   3. działanie $\cdot$ (mnożenie) jest łączne i przemienne
   4. mnożenie jest rozdzielne względem dodawania
   5. 0 jest elementem neutralnym dodawania
   6. 1 jest elementem neutralnym mnożenia
2. $\leqslant$ jest porządkiem liniowym zbioru $\mathbb{R}$, który jest *zgodny* z działaniami arytmetycznymi w $\mathbb{R}$, czyli takim, że:
   1. jeśli $x \geqslant y$, to $x + z \geqslant y + z$
   2. jeśli $x > 0$ oraz $y > 0$, to $x \cdot y > 0$.
3. Porządek $\leqslant$ jest *ciągły*, czyli każdy ograniczony z góry (równoważnie: ograniczony z dołu) podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ ma kres górny (odpowiednio: kres dolny).

Komentarze

Można udowodnić, że istnieje – z dokładnością do izomorfizmu – jedna struktura, spełniająca powyższe aksjomaty. Tak więc, różne konstrukcje liczb rzeczywistych ukazują ich różne *aspekty*.

Dla liczb rzeczywistych zachodzi *aksjomat Archimedesa*: jeśli $x > 0$ oraz $x < y$, to istnieje liczba naturalna n taka, że suma $x + x + \ldots + x$ (x występuje n razy w tej sumie) spełnia warunek: $y < n \cdot x$. Własność ta wyklucza istnienie w zbiorze $\mathbb{R}$ wielkości *nieskończenie małych*.

Należy pamiętać, że każda liczba rzeczywista jest w istocie obiektem *infinitarnym*: do jej określenia potrzeba *nieskończenie* wielu liczb wymiernych, w każdej z rozważanych konstrukcji. We wszystkich praktycznych zastosowaniach (obliczeniach) wykorzystujemy jedynie skończone *przybliżenia* liczb rzeczywistych.

Przykłady ciągów rzeczywistych

Ciągi rzeczywiste (ciągi o wyrazach, będących liczbami rzeczywistymi) to funkcje ze zbioru $\mathbb{N}_+$ w zbiór $\mathbb{R}$.

- *Ciąg arytmetyczny*. Określony warunkami rekurencyjnymi: $a_1 = a$ oraz $a_n = a_{n-1} + d$ dla $n \geqslant 2$. Ogólny wzór na n-ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = a + (n-1) \cdot d$
- *Ciąg geometryczny*. Określony warunkami rekurencyjnymi: $a_1 = a \cdot x$ oraz $a_n = a_{n-1} \cdot x$. Ogólny wzór na n-ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = a \cdot x^n$
- *Ciąg harmoniczny*. $a_n = \frac{1}{n}$.
- *Ciąg Fibonacciego*. Określony warunkami rekurencyjnymi: $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.
- Ciąg $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący oraz ograniczony.

Jeśli (a_n) jest ciągiem rzeczywistym, a (k_i) dowolnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (a_{k_i}) nazywamy *podciągiem* ciągu (a_n).

a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
$a_n = a + (n-1) \cdot d$ $a_1 = 1, d = 3$	1	4	7	10	13	16	19	21	24	27
$a_n = a \cdot q^n$ $a = 2, q = \frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
$a_n = \frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$a_n =$ n-ta liczba pierwsza	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29

Początkowe wyrazy kilku ciągów.

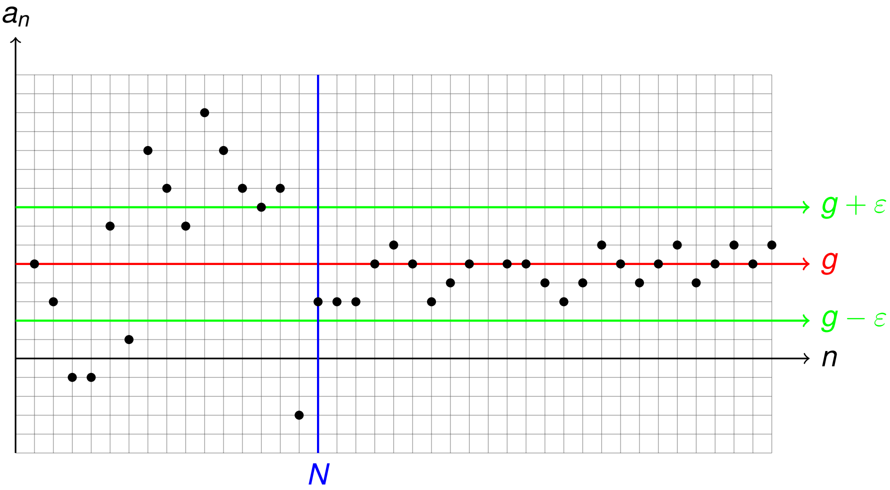
Nierówność Bernoulliego

- *Nierównośćci Bernoulliego* ustala, że dla $d \geqslant -1$ mamy: $(1+d)^n \geqslant 1 + n \cdot d$.
- Udowodnimy to poprzez indukcję matematyczną.

- Widać, że nierówność Bernoulliego zachodzi dla $k = 1$: $(1+d)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot d$.
- Przypuśćmy, że dla liczby k zachodzi $(1+d)^k \geqslant 1 + k \cdot d$. Pokażemy, że nierówność Bernoulliego zachodzi wtedy także dla $k+1$:
  $(1+d)^{k+1} = (1+d)^k \cdot (1+d) \geqslant (1+k\cdot d)\cdot(1+d) =$
  $1 + d + k \cdot d + k \cdot d^2 =$
  $= 1 + (k+1)\cdot d + k \cdot d^2 \geqslant 1 + (k+1)\cdot d$
- Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność Bernoulliego zachodzi zatem dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.

Granica ciągu

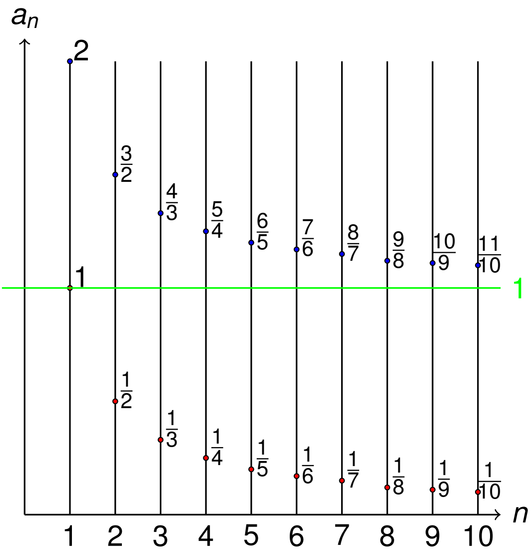
- Mówimy, że ciąg (a_n) jest *zbieżny* do liczby $g \in \mathbb{R}$, gdy dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla każdej $n > N$ zachodzi nierówność: $|a_n - g| < \varepsilon$.
- Jeśli (a_n) jest zbieżny do g, to liczbę g nazywamy granicą ciągu (a_n). Mówimy też w takim przypadku, że ciąg (a_n) *dąży* do g i stosujemy zapis: $a_n \to g$ przy $n \to \infty$ lub zapis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.
- Ciąg, który nie jest zbieżny, nazywamy *rozbieżnym*. Tak więc, rozbieżne są te ciągi, które nie są zbieżne do żadnej granicy.
- Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Jeśli bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to istnieje N taka, że $|a_n - g| < 1$ dla wszystkich $n > N$. Z tego oraz z faktu, że $|a_n| - |g| \leqslant |a_n - g|$ wynika, że dla wszystkich $n > N$ mamy: $|a_n| < |g| + 1$. Jeśli weźmiemy teraz $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |g| + 1\}$, to otrzymujemy: $|a_n| \leqslant M$ dla wszystkich $n > N$.



Jeśli ciąg a_n ma granicę g, to przedłużając ten diagram w prawo i dowolnie zmniejszając liczbę $\varepsilon > 0$, zawsze od pewnego miejsca wszystkie dalsze wyrazy ciągu znajdą się w pasie ograniczonym prostymi $y = g + \varepsilon$ i $y = g - \varepsilon$.

Przykłady

- Ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ jest zbieżny. Jego granicą jest liczba 1. Istotnie, jakkolwiek małą weźmiemy liczbę rzeczywistą $\varepsilon > 0$, to wszystkie wyrazy tego ciągu o wskaźnikach n takich, że $n > \frac{1}{\varepsilon}$ znajdą się w przedziale otwartym $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.
- Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest zbieżny. Jego granicą jest liczba 0.
- Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie jest zbieżny. Zauważmy, że jest to ciąg ograniczony. Mamy: $a_{2k} = 1$ oraz $a_{2k-1} = -1$, dla wszystkich $k \geqslant 1$.
- Ciąg $a_n = (-2)^n$ nie jest zbieżny. Zauważmy, że nie jest to ciąg ograniczony.
- Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.
- $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$. Jest to jedna z najważniejszych stałych matematycznych. Liczba $e \approx 2,71828\ldots$ jest liczbą *przestępną*.



Pierwsze 10 wyrazów ciągów: $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ (niebieski), $a_n = \frac{1}{n}$ (czerwony).

Ciąg $a_n = (-1)^n \cdot 2^{-1}$ jest zbieżny. Jego granicą jest 0: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

- $a_1 = -\frac{1}{2}$
- $a_2 = \frac{1}{4}$
- $a_3 = -\frac{1}{8}$
- $a_4 = \frac{1}{16}$
- $a_5 = -\frac{1}{32}$
- $a_6 = \frac{1}{64}$
- $a_7 = -\frac{1}{128}$
- $a_8 = \frac{1}{256}$
- $a_9 = -\frac{1}{512}$
- $a_{10} = \frac{1}{1024}$

Ćwiczenie: udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \cdot 2^{-1} = 0$.

Zbieżność ciągów: komentarze

- Zbieżność ciągu (a_n) do liczby g, jego granicy, oznacza zatem, że w dowolnie małym *otoczeniu* liczby g znajdują się wszystkie, oprócz ewentualnie skończonej ich liczby, wyrazy tego ciągu. Otoczenie liczby jest tu rozumiane jako przedział otwarty, do którego ta liczba należy.
- Należy pamiętać, że wyrażenie *ciąg dąży do granicy* jest tylko *sposobem mówienia*. Znaczenie tego wyrażenia podaje przytoczona wyżej definicja. Występują w niej jedynie terminy arytmetyczne, porządkowe oraz funkcja wartości bezwzględnej (charakteryzująca *bliskość*). Wszelkie skojarzenia z *ruchem* mają w tym kontekście jedynie walor intuicyjny.

Zbieżność ciągów: komentarze

- Zapis $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ jest *sposobem powiedzenia*, że ciąg (a_n) jest rozbieżny i jego wyrazy nie są ograniczone z góry.
- Tak więc, znak ∞ nie oznacza żadnej konkretnej liczby.

Udowodnimy, dla przykładu, że ciąg geometryczny $a_n = x^n$ jest zbieżny do 0 dla $|x| < 1$, jest zbieżny do 1 dla $x = 1$ oraz jest rozbieżny dla wszystkich pozostałych x, czyli dla $|x| > 1$ lub $x = -1$. Rozpatrzymy trzy przypadki:

1. Załóżmy, że $|x| < 1$. Wtedy istnieje dokładnie jedna liczba $d > 0$ taka, że $|x| = \frac{1}{1+d}$. Na mocy nierówności Bernoulliego mamy: $|a_n| = |x|^n = \frac{1}{(1+d)^n} < \frac{1}{1+n \cdot d}$. Ponieważ ułamek $\frac{1}{1+n \cdot d}$ zmniejsza się wraz ze wzrostem n, więc dla dowolnie małej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna N, że $\frac{1}{1+n \cdot d} < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $n > N$ (jest tak dla $N = \ulcorner \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon \cdot d} \urcorner$). Tak więc, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.
2. Jeśli $x = 1$, to ciąg a_n jest stały, jeśli jednak $x = -1$, to ciąg a_n jest rozbieżny, gdyż wszystkie jego wyrazy o wskaźnikach parzystych równe są 1, a wszystkie wyrazy o wskaźnikach nieparzystych równe są -1.
3. Wreszcie, gdy $|x| > 1$, to $x = 1 + d$ dla pewnej $d > 0$. Na mocy nierówności Bernoulliego: $|a_n| = (1 + d)^n \geqslant 1 + n \cdot d$, a to oznacza, że ciąg (a_n) nie jest ograniczony, a więc nie jest zbieżny.

Punkty skupienia

Liczbę s nazywamy *punktem skupienia* ciągu (a_n), gdy dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ oraz każdej liczby naturalnej N istnieje liczba naturalna $n > N$ taka, że $|a_n - s| < \varepsilon$.

- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to oczywiście g jest (jedynym) punktem skupienia ciągu (a_n).
- Wprost z definicji widać, że jeśli s jest punktem skupienia ciągu (a_n), to w dowolnym (dowolnie małym) *otoczeniu* punktu s znajduje się *nieskończenie wiele* wyrazów tego ciągu.
- Punktami skupienia ciągu $a_n = (-1)^n$ są liczby: 1 oraz -1. Te same liczby są punktami skupienia np. ciągu $a_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{2^n}$.
- Liczba s jest punktem skupienia ciągu (a_n) dokładnie wtedy, gdy pewien podciąg ciągu (a_n) jest zbieżny do s.

Ciąg $a_n = (-1)^{n+1} + 2^{-n}$ ma dwa punkty skupienia: -1 oraz 1.

- $a_1 = \frac{3}{2}$
- $a_2 = -\frac{3}{4}$
- $a_3 = \frac{9}{8}$
- $a_4 = -\frac{15}{16}$
- $a_5 = \frac{33}{32}$
- $a_6 = -\frac{63}{64}$
- $a_7 = \frac{129}{128}$
- $a_8 = -\frac{255}{256}$
- $a_9 = \frac{513}{512}$
- $a_{10} = -\frac{1023}{1024}$

Ćwiczenie: zdefiniuj podciągi tego ciągu, zbieżne do jego punktów skupienia.

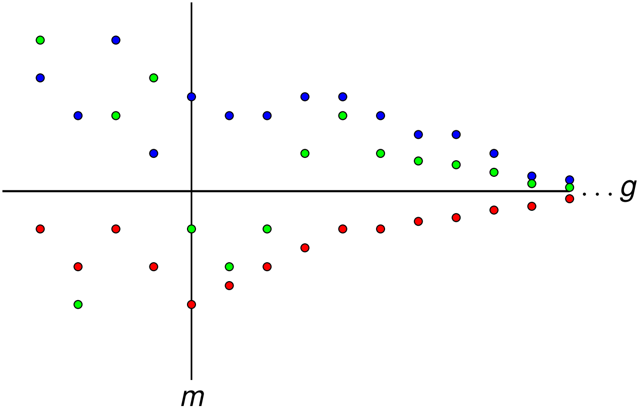
Twierdzenia o ciągach

Twierdzenie o trzech ciągach. *Jeśli ciągi (a_n) oraz (b_n) są zbieżne do tej samej granicy g oraz istnieje m taka, że $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ dla wszystkich $n > m$, to ciąg (c_n) także jest zbieżny do g.*
Dowód tego faktu jest dość prosty. Niech mianowicie $\varepsilon > 0$ oraz niech $N > m$ będzie taką liczbą, że dla $n > N$ mamy $|a_n - g| < \varepsilon$ i $|b_n - g| < \varepsilon$. Wtedy dla $n > N$ mamy:

$$g - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < g + \varepsilon,$$

z czego wynika, iż $|c_n - g| < \varepsilon$ dla $n > N$, czyli ciąg (c_n) jest zbieżny do g.
Poniższy diagram jest ilustracją sytuacji opisanej w powyższym twierdzeniu. Wyrazy ciągu c_n zaznaczono na zielono, ciągu b_n na niebiesko, a ciągu a_n na czerwono:

Twierdzenia o ciągach



Należy oczywiście pamiętać, że jest to rysunek poglądowy, pokazujący jedynie skończone fragmenty rozważanych ciągów.

Twierdzenie. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny. Przy tym, jeśli* (a_n) *jest niemalejący, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$, *natomiast gdy* (a_n) *jest nierosnący, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n a_n$.

Jeśli bowiem (a_n) jest niemalejący i ograniczony, to istnieje kres górny zbioru jego wyrazów: $s = \sup_n a_n$. Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = s$:

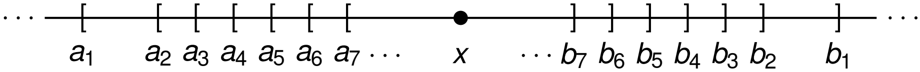
1. Niech $\varepsilon > 0$. Z definicji kresu górnego wynika, że istnieje liczba naturalna N taka, iż $s < a_N + \varepsilon$.
2. Natomiast dla każdej $n > N$ mamy $a_n \geqslant a_N$, a zatem $s < a_n + \varepsilon$ dla wszystkich $n > N$.
3. Mamy więc: $a_n > s - \varepsilon$ dla $n > N$.
4. Ponieważ $a_n \leqslant s$ dla wszystkich n, więc oczywiście także $a_n < s + \varepsilon$.
5. Łącznie daje to: $s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon$ dla $n > N$, czyli $|a_n - s| < \varepsilon$. To oznacza, że ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy s.

Podobnie pokazujemy, że nierosnący ciąg ograniczony jest zbieżny.

Twierdzenia o ciągach

Twierdzenie Ascoliego. *Niech* $[a_n, b_n]$ *będzie zstępującym ciągiem przedziałów domkniętych liczb rzeczywistych (czyli* $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$ *dla wszystkich* $i \in \mathbb{N}_+$*). Niech ponadto* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. *Wtedy istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista* $x \in \mathbb{R}$ *taka, że* $x \in [a_n, b_n]$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}_+$.

Inaczej mówiąc, część wspólna (iloczyn) zstępującego ciągu przedziałów domkniętych w zbiorze liczb rzeczywistych o długościach tych przedziałów dążących do 0, zawiera dokładnie jeden element. Istotną rolę w dowodzie tego twierdzenia odgrywa własność ciągłości porządku zbioru liczb rzeczywistych.



Twierdzenia o ciągach

Dowód. Najpierw zauważmy, że ciąg (a_n) jest niemalejący oraz ograniczony z góry przez każdy z wyrazów ciągu (b_n).
Podobnie, ciąg (b_n) jest nierosnący oraz ograniczony z dołu przez każdy z wyrazów ciągu (a_n).
Tak więc, oba te ciągi są zbieżne, a ponadto: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n} a_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\limits_{n} b_n$. Mamy dalej:

Twierdzenia o ciągach

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, czyli $\sup\limits_n a_n \leqslant \inf\limits_n b_n$.
- Dla każdej m zachodzi nierówność:

$$0 \leqslant \inf_n b_n - \sup_n a_n \leqslant b_m - a_m.$$

- Z założenia, $\lim\limits_{m\to\infty} (b_m - a_m) = 0$.
- Na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy zatem $\sup\limits_n a_n = \inf\limits_n b_n$. Niech x oznacza tę właśnie wartość obu rozważanych kresów.

Twierdzenia o ciągach

- $x \in [a_n, b_n]$ dla wszystkich n, czyli x jest punktem wspólnym wszystkich rozważanych przedziałów.
- Gdyby istniał punkt $y \neq x$ taki, że $y \in [a_n, b_n]$ dla wszystkich n, to mielibyśmy $a_n \leqslant y$ oraz $y \leqslant b_n$ dla wszystkich n.
- Na mocy pierwszej z tych nierówności otrzymujemy: $x = \sup\limits_n a_n \leqslant y$.
- Na mocy drugiej z tych nierówności otrzymujemy: $y \leqslant \inf\limits_n b_n = x$.
- Z tego wynika oczywiście, że $y = x$, a więc x jest jedynym punktem wspólnym wszystkich przedziałów $[a_n, b_n]$.

Twierdzenia o ciągach

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. *Każdy ciąg ograniczony posiada co najmniej jeden punkt skupienia*.

Dowód. Załóżmy, że ciąg (a_n) jest ograniczony. Tworzymy parę zbiorów (A, B) w sposób następujący:

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a_n$ dla nieskończenie wielu $n\}$

$B = \mathbb{R} - A$.

Para (A, B) jest przekrojem Dedekinda zbioru $\mathbb{R}$. Na mocy aksjomatu ciągłości: albo w klasie A istnieje element największy, albo w klasie B istnieje element najmniejszy. Niech s będzie tym elementem. Pokażemy, że s jest (największym) punktem skupienia ciągu (a_n).

Twierdzenia o ciągach

1. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ mamy: $s - \frac{\varepsilon}{2} \in A$ oraz $s + \frac{\varepsilon}{2} \in B$.
2. Z definicji zbiorów A i B wynika, że: $s - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_n$ dla nieskończenie wielu n, zaś $s + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_n$ dla co najwyżej skończonej liczby indeksów n.
3. Tak więc, $a_n < s + \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich n poza skończoną ich liczbą. W konsekwencji, dla nieskończenie wielu n mamy: $s - \varepsilon < s - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_n < s + \frac{\varepsilon}{2} < s + \varepsilon$.
4. To z kolei oznacza, że $|a_n - s| < \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n. Tak więc, s jest punktem skupienia ciągu (a_n).
5. Ponadto, jest to największy punkt skupienia tego ciągu. Gdyby bowiem dla pewnej $\varepsilon > 0$ punktem skupienia był $s + 2 \cdot \varepsilon$, to, ponieważ $s + \varepsilon \in B$, mielibyśmy $s + \varepsilon < a_n$ tylko dla skończonej liczby indeksów n, wbrew poczynionemu przypuszczeniu, że $s + 2 \cdot \varepsilon$ jest punktem skupienia ciągu (a_n).

Warunek Cauchy'ego

- Mówimy, że ciąg (a_n) spełnia *warunek Cauchy'ego* (jest *ciągiem Cauchy'ego*), gdy dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich $m > N$ oraz $n > N$ zachodzi nierówność: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
- Tak więc, ciąg spełnia warunek Cauchy'ego, gdy – począwszy od pewnego miejsca – wszystkie jego wyrazy są sobie dowolnie bliskie.

- Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.
- Każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.
- Ciąg Cauchy'ego zawierający podciąg zbieżny do pewnej liczby g jest zbieżny do g.

Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa wynika następujące twierdzenie:

- **Twierdzenie**. *Ciąg* (a_n) *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego*.

- *Potęgowanie w* $\mathbb{R}$. Jeśli $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ to a^x definiujemy jako granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$, gdzie (x_n) jest dowolnym ciągiem liczb wymiernych, zbieżnym do x, czyli takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Zbieżność szeregu liczbowego

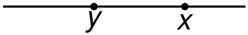
- Każdemu ciągowi rzeczywistemu (a_n) przyporządkować można ciąg $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Wyrazy tak określonego ciągu (s_n) nazywamy *sumami częściowymi* (ciągu (a_n)).
- Przykład: sumy częściowe ciągu geometrycznego $a_n = x^{n-1}$ (gdzie $x \neq 1$). Ponieważ $s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$, więc (mnożąc obie strony tego równania przez $1 - x$) mamy: $(1 - x) \cdot s_n = 1 - x^n$, co daje znany ze szkoły wzór: $s_n = \frac{1-x^n}{1-x}$.

- Jeżeli ciąg (s_n) sum częściowych ciągu (a_n) jest zbieżny do liczby s, tę liczbę nazywamy *sumą* szeregu nieskończonego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Mówimy wtedy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny* do liczby s oraz piszemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.
- Szeregi, które nie są zbieżne nazywamy *rozbieżnymi*.
- Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

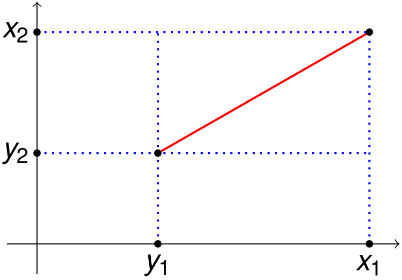
Metryka euklidesowa

- Przez *(rzeczywistą) przestrzeń euklidesową n-wymiarową* rozumiemy parę $(\mathbb{R}^n, d)$, gdzie $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wszystkich n-tek uporządkowanych elementów zbioru $\mathbb{R}$, zaś d jest funkcją $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, określoną wzorem:
  $$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$
  dla dowolnych $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ należących do $\mathbb{R}^n$. Funkcję d nazywamy *metryką euklidesową* (*euklidesową funkcją odległości*).
- Dla $n = 1$ odległość d wyrażamy przez wartość bezwzględną: $d(x, y) = |x - y|$.
- Dla $n = 2$ odległość d punktów $x = (x_1, x_2)$ oraz $y = (y_1, y_2)$ wyrażamy przez wzór: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Odległość w $\mathbb{R}$: $d(x, y) = |x - y|$.

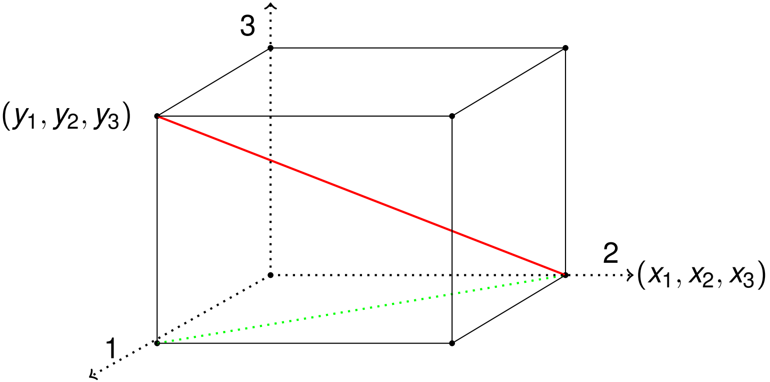


Odległość w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:



Jeśli $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ to $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Odległość w $\mathbb{R}^3$:



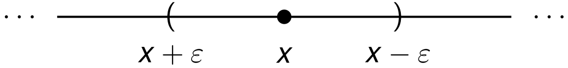
Jeśli $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$, to: $c^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$ oraz $(d(x, y))^2 = c^2 + (y_3 - x_3)^2$, a zatem $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$.

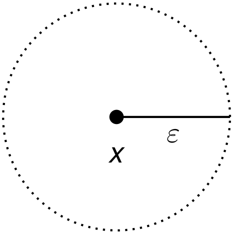
Metryka euklidesowa a zbieżność

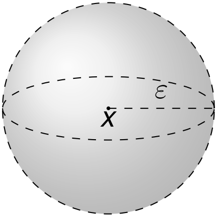
- Ciąg punktów (x_k) o wyrazach należących do $\mathbb{R}^n$ jest *zbieżny* do punktu $x \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0$.
- $K(x, \varepsilon)$ jest *kulą otwartą o środku* x *oraz promieniu* ε, gdy: $K(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \varepsilon\}$.

- W terminologii szkolnej: kule otwarte w $\mathbb{R}$ to przedziały otwarte, kule otwarte w $\mathbb{R}^2$ to koła otwarte (czyli koła bez ograniczającego je okręgu), kule otwarte w $\mathbb{R}^3$ to kule otwarte (czyli kule bez ograniczającej je sfery).
- Ciąg (x_k) o wyrazach należących do $\mathbb{R}^n$ jest zbieżny do punktu $x \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym otoczeniu punktu x (czyli w każdej kuli otwartej o dowolnie małym promieniu) znajdują się wszystkie wyrazy ciągu (x_k) oprócz co najwyżej skończonej ich liczby.

Kula otwarta o środku x i promieniu ε w $\mathbb{R}$:







Kula otwarta w $\mathbb{R}^2$ Kula otwarta w $\mathbb{R}^3$

Metryki

Parę (X, d) nazywamy *przestrzenią metryczną* (a d nazywamy *metryką* (*funkcją odległości*) w X), gdy X jest dowolnym zbiorem niepustym, zaś d jest dwuargumentową funkcją określoną na X i przyjmującą nieujemne wartości rzeczywiste taką, że:

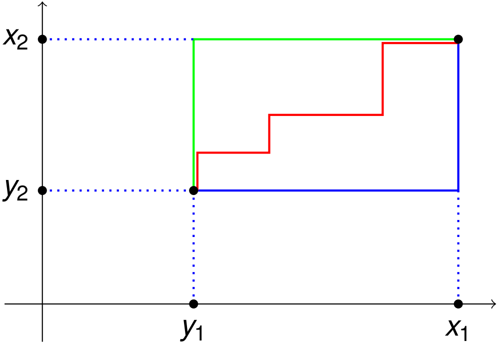
1. $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (*warunek symetrii*)
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (*warunek trójkąta*).

- Każda przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}^n, d)$, jest przestrzenią metryczną.
- Korzystając z wyjściowej metryki definiować można dalsze pojęcia metryczne, np. odległość elementu od zbioru, lub odległość między zbiorami elementów.

Przykład: metryka taksówkowa

Metryka taksówkowa. W zbiorze $\mathbb{R}^n$ określić można wiele funkcji odległości różnych od metryki euklidesowej. Przez metrykę *taksówkową* (*metrykę Manhattan*) rozumiemy funkcję d określoną następująco dla dowolnych $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$: $d(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$. Dla $n = 2$ mamy zatem: $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Metryka ta opisuje poruszanie się w mieście z prostokątną siatką ulic, prowadzących jedynie np. ze wschodu na zachód oraz z południa na północ, przy założeniu, że poruszamy się, dbając o to, aby znaleźć możliwie najkrótszą drogę między dwoma punktami. Zauważmy, że (inaczej niż w przypadku metryki euklidesowej) w tej metryce istnieje *wiele* dróg między dwoma punktami, które mają taką samą długość w sensie metryki. Kule w tej metryce wyglądają inaczej niż kule w metryce euklidesowej – czy słuchacze potrafią wyobrazić sobie kule, wyznaczone tą metryką?

Metryka Manhattan:



Jeśli $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$, to $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Wszystkie trzy zaznaczone drogi z x do y mają tę samą długść euklidesową.

Kule i zbieżność

- Ciąg punktów (x_n) przestrzeni metrycznej (X, d) jest *zbieżny* do punktu $x \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Piszemy w takim przypadku $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
- $K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ (kula otwarta).
- $\overline{K}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\}$ (kula domknięta).
- Zbiór $A \subseteq X$ punktów przestrzeni metrycznej (X, d) jest *ograniczony*, gdy istnieje kula $K(x, r)$ taka, że $A \subseteq K(x, r)$.
- Ciąg (x_n) punktów przestrzeni metrycznej (X, d) jest *ciągiem Cauchy'ego* (*spełnia warunek Cauchy'ego*), gdy dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich $m > N$ oraz $n > N$ zachodzi nierówność $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.
- Przestrzeń metryczna (X, d) jest *zupełna*, gdy każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni jest zbieżny do elementu tej przestrzeni.

Zbiory otwarte i domknięte

- Punkt x nazywamy *punktem wewnętrznym* zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, d) gdy istnieje liczba rzeczywista $r > 0$ taka, że $K(x, r) \subseteq A$.
- Punkt x nazywamy *punktem skupienia* zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, d), gdy x jest granicą co najmniej jednego ciągu (x_n) różnych od x punktów przestrzeni (X, d). Te punkty zbioru A, które nie są jego punktami skupienia nazywamy *punktami izolowanymi* zbioru A.
- Każdy zbiór A, który jest równy zbiorowi swoich punktów wewnętrznych, nazywamy zbiorem *otwartym*.
- Te zbiory A, które zawierają wszystkie swoje punkty skupienia, nazywamy zbiorami *domkniętymi*.
- Rodzina $\mathcal{A}$ zbiorów otwartych w przestrzeni metrycznej (X, d) jest *pokryciem* zbioru A, gdy $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.

Domknięcie, wnętrze, brzeg

- *Domknięciem* zbioru A nazywamy sumę zbioru A oraz zbioru wszystkich jego punktów skupienia. Domknięcie A oznaczamy przez $cl(A)$ (lub $\overline{A}$). Zbiór A jest zatem domknięty dokładnie wtedy, gdy $A = cl(A)$.
- Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru A oznaczamy przez $int(A)$ i nazywamy *wnętrzem* zbioru A.
- *Brzegiem* zbioru A nazywamy zbiór $fr(A) = cl(A) - int(A)$.
- Zbiór A jest *gęsty* w przestrzeni metrycznej (X, d), gdy każdy punkt zbioru X jest granicą zbieżnego ciągu punktów (x_n) należących do zbioru A. A zatem A jest gęsty z (X, d) dokładnie wtedy, gdy $cl(A) = X$.
- Przestrzeń metryczną (X, d) nazywamy *ośrodkową*, gdy istnieje w niej co najwyżej przeliczalny zbiór gęsty (nazywany wtedy *ośrodkiem* tej przestrzeni).

- Zbiór A w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy *zwartym*, gdy każdy ciąg (x_n) jego punktów zawiera podciąg zbieżny do pewnego punktu $x \in A$. Tak więc, zbiór A ***nie*** jest zwarty w (X, d), gdy istnieje co najmniej jeden ciąg jego elementów, który nie ma żadnego punktu skupienia należącego do A.
- **Twierdzenie Borela**. *Każde pokrycie zbioru zwartego A w przestrzeni metrycznej (X, d) zawiera podpokrycie skończone zbioru A, czyli pokrycie zbioru A skończoną rodziną zbiorów należących do wyjściowego pokrycia*.
- Zbiór A w zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy *spójnym*, gdy nie istnieją zbiory otwarte B oraz C w przestrzeni (X, d) takie, że: $A \subseteq B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$ oraz $A \cap C \neq \emptyset$.
- *Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony* (zob. następby slajd).
- Niepusty zbiór otwarty $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest spójny dokładnie wtedy, gdy dowolne dwa jego punkty można połączyć linią łamaną w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie. *Każdy zbiór zwarty w przestrzeni metrycznej* (X, d) *jest domknięty i ograniczony w tej przestrzeni*.
Szkic Dowodu. Niech A będzie zbiorem zwartym w przestrzeni metrycznej (X, d). Trzeba pokazać, że A jest: 1) domknięty oraz 2) ograniczony.

1. Weźmy dowolny ciąg (x_n) elementów zbioru A, który jest zbieżny do elementu $x \in X$. Aby udowodnić, że A jest domknięty, trzeba pokazać, że $x \in A$. Na mocy zwartości A, ciąg (x_n) zawiera podciąg (x_{m_i}) zbieżny do jakiegoś $y \in A$. Z definicji zbieżności ciągu w przestrzeni metrycznej musi zachodzić $\lim\limits_{i \to \infty} x_{m_i} = x$. Ponieważ ciąg nie może być zbieżny do dwóch różnych granic, więc $x = y$, a w konsekwencji $x \in A$.
2. Rozumujemy nie wprost. Przypuśćmy, że A nie jest ograniczony. Oznacza to, że w A można wybrać ciąg punktów tak, że odległość między dowolnymi dwoma wyrazami tego ciągu jest niemniejsza od 1. Wtedy jednak żaden podciąg takiego ciągu nie może spełniać warunku Cauchy'ego, a zatem zbiór A nie jest zwarty, co daje sprzeczność z założeniem twierdzenia i kończy dowód nie wprost.

Myśl przekornie!

- Jak wyrazić fakt, że jeden ciąg jest zbieżny (np. do zera) *szybciej* niż inny ciąg?
- Ile elementów ma część wspólna rodziny wszystkich zbiorów o postaci $\{x \in \mathbb{R} : x > n\}$ gdzie $n \in \mathbb{N}$?

- Jak klasyfikować kształty? Czy np. wszystkie powierzchnie można otrzymać przez składanie pewnych *wzorcowych* kawałków?
- Czy powierzchnia zawsze ma dwie *strony* (umownie nazywane wewnętrzną i zewnętrzną)?
- Czym jest dziura?
- Gdy z okręgu usuniemy jeden punkt, dostaniemy odcinek otwarty. Co dostaniemy, gdy do prostej dodamy jeden punkt?
- Co dostaniemy, gdy ze sfery usuniemy jeden punkt?

Co musisz ZZZ

- Ciąg zbieżny, granica ciągu, punkt skupienia ciągu.
- Warunek Cauchy'ego.
- Twierdzenie o trzech ciągach.
- Twierdzenie Ascoliego.
- Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.
- Szereg liczbowy, jego suma częściowa, definicja zbieżności szeregu.
- Przestrzeń z metryką euklidesową.
- Metryka, przestrzeń metryczna.
- Zbiory: otwarte, domknięte, zwarte, gęste, spójne.