METALOGIKA

DODATEK 2:
DOWODY NIEKTÓRYCH TWIERDZEŃ
DOTYCZĄCYCH
OPERACJI KONSEKWENCJI
W JĘZYKACH ZDANIOWYCH

DEFINICJA 1. ***Operacja konsekwencji wyznaczona przez reguły wnioskowania.***

Niech S będzie zbiorem wszystkich wyrażeń poprawnych (formuł) języka zdaniowego J. Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w J. Przez ***operację konsekwencji w*** J ***wyznaczoną przez*** $\mathcal{R}$ rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \rightarrow 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka J:

- (1) $C^0_{\mathcal{R}}(X) = X$
- (2) $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X) = C^k_{\mathcal{R}}(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C^k_{\mathcal{R}}(X))\ (P, \alpha) \in R\}$
- (3) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C^k_{\mathcal{R}}(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: α jest ***wyprowadzalna*** z X za pomocą reguł należących do $\mathcal{R}$.

Niech $Cld(\mathcal{R}, X)$ oznacza, że zbiór formuł X języka J jest ***domknięty na wszystkie reguły ze zbioru*** $\mathcal{R}$: $Cld(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall R \in \mathcal{R})(\forall P \subseteq S)(\forall \alpha \in S)(((P, \alpha) \in R \wedge P \subseteq X) \Rightarrow \alpha \in X).$$

UWAGA. Proszę odróżniać symbol implikacji $\rightarrow$ w KRZ od używanego tu metajęzykowego symbolu $\Rightarrow$.

Twierdzenie A. Operacja konsekwencji wyznaczona przez reguły $\mathcal{R}$ ma następujące własności:

- (1) Jeśli $n < m$, to $C^n_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C^m_{\mathcal{R}}(X)$.
- (2) $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Y$ dla każdego zbioru Y takiego, że $X \subseteq Y$ oraz $Cld(\mathcal{R}, Y)$.

- (3) $((P, \alpha) \in R \wedge R \in \mathcal{R}) \Rightarrow \alpha \in C_{\mathcal{R}}(P)$.
- (4) $((P, \alpha) \in R \wedge R \in \mathcal{R} \wedge P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)) \Rightarrow \alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.
- (5) $X \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$ (zwrotność).
- (6) $X \subseteq Y \Rightarrow C_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(Y)$ (monotoniczność).
- (7) $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \Rightarrow C_{\mathcal{R}_1}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}_2}(X)$ (monotoniczność).
- (8) $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) = C_{\mathcal{R}}(X)$ (idempotencja).
- (9) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
- (10) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}'}(X) : \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} \wedge \overline{\overline{\mathcal{R}'}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
- (11) Jeśli dla dowolnych elementów X, Y niepustej rodziny $\mathcal{X}$ zachodzi alternatywa $X \subseteq Y \ \vee \ Y \subseteq X$, to: $C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$.

DOWÓD.

(1). Dowód przeprowadzimy przez indukcję. Załóżmy, że $n < m$.

Jeśli $n = m - 1$, to $C^n_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C^m_{\mathcal{R}}(X)$ na mocy punktu (2) definicji 1. Załóżmy teraz, że teza twierdzenia zachodzi dla $n = m - k$, gdzie $k < m$. Pokażemy, że zachodzi ona także dla $n = m - (k + 1)$.

Zakładamy zatem, że $C^{m-k}_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$. Niech $\alpha \in C^{m-(k+1)}_{\mathcal{R}}(X)$. Oznacza to, że $\alpha \in C^{(m-k)-1)}_{\mathcal{R}}(X)$, a więc, na mocy punktu (2) definicji 1., $\alpha \in C^{m-k}_{\mathcal{R}}(X)$. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy wtedy $\alpha \in C^m_{\mathcal{R}}(X)$.

(2). Trzeba dowieść implikacje: prostą i odwrotną.

Dowód $\Leftarrow$. Załóżmy, że $\alpha \in Y$ dla każdego zbioru Y takiego, że $X \subseteq Y$ oraz $Cld(\mathcal{R}, Y)$. Wprost z definicji 1. widać, że $X \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$. Pokażemy, że $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest domknięty na wszystkie reguły ze zbioru $\mathcal{R}$.

Jeśli $R \in \mathcal{R}$, $(P, \alpha) \in R$ oraz $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, gdzie $P = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, to dla wszystkich $i \leqslant n$: $\beta_i \in C^{k_i}_{\mathcal{R}}(X)$. Niech $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$. Na mocy udowodnionego przed chwilą punktu (1) twierdzenia A., $P \subseteq C^k_{\mathcal{R}}(X)$, a stąd, zgodnie z punktem (2) definicji 1., $\alpha \in C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X)$. Ponieważ $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, więc $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Dowód $\Rightarrow$. Załóżmy, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ oraz niech $X \subseteq$ i $Cld(Y)$. Otrzymujemy stąd, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(Y)$. Skoro $Cld(\mathcal{R}, Y)$, to $\alpha \in Y$.

(3). Wynika wprost z definicji 1. oraz z udowodnionego przed chwilą punktu (1) twierdzenia A.

(4). Wynika wprost z definicji 1. oraz z udowodnionego przed chwilą punktu (1) twierdzenia A.

(5). Wynika wprost z definicji 1.

(6). Wynika wprost z definicji 5.1.

(7). Wynika wprost z definicji 1.

(8). Inkluzja $C_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X))$ jest konsekwencją monotoniczności operatora $C_{\mathcal{R}}$.

Dla dowodu inkluzji $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$ załóżmy, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X))$. Istnieją wtedy $\beta_1, \ldots, \beta_n \in C_{\mathcal{R}}(X)$ takie, że $\alpha \in C^h_{\mathcal{R}}(\{\beta_1, \ldots, \beta_n\})$, dla pewnej liczby h.

Z kolei, dla każdej formuły β_i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$ istnieją formuły $\gamma^i_1, \ldots \gamma^i_{m_i} \in X$ takie, że:

- $\beta_1 \in C^{k_1}_{\mathcal{R}}(\{\gamma^1_1, \ldots \gamma^1_{m_1}\})$
- $\vdots$
- $\beta_n \in C^{k_n}_{\mathcal{R}}(\{\gamma^n_1, \ldots \gamma^n_{m_n}\})$.

Niech $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$. Wtedy:

$$\alpha \in C^{h+k}_{\mathcal{R}}(\{\gamma^1_1, \ldots \gamma^1_{m_1}, \ldots, \gamma^n_1, \ldots \gamma^n_{m_n}\}).$$

A zatem $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$. Ostatecznie, mamy: $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) = C_{\mathcal{R}}(X)$.

(9). Wynika z faktu, że rozważane zbiory przesłanek są skończone.

(10). Wynika z faktu, że rozważane zbiory przesłanek są skończone.

(11). Inkluzja $\bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\} \subseteq C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\})$ wynika z monotoniczności operatora $C_{\mathcal{R}}$.

Dla dowodu inkluzji $C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}) \subseteq \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$ niech $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\})$. Musimy pokazać, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ dla pewnego $X \in \mathcal{X}$.

Skoro $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\})$, to istnieją $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}$ takie, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(\{\beta_1, \ldots, \beta_n\})$. Z założenia, rodzina $\mathcal{X}$ jest liniowo uporządkowana przez inkluzję. Ponieważ zbiór $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ jest skończony, więc istnieje najmniejszy (względem inkluzji) zbiór $X \in \mathcal{X}$ taki, że $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq X$. Z monotoniczności operatora $C_{\mathcal{R}}$ otrzymujemy: $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Ostatecznie, mamy: $C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$.

DEFINICJA 2. ***Reguły dopuszczalne i reguły wyprowadzalne.***

Zbiór $Perm(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł ***dopuszczalnych*** ze względu na X i $\mathcal{R}$ definiujemy następująco:

$R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$ i $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Zbiór $Der(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł ***wyprowadzalnych*** ze względu na X i $\mathcal{R}$ definiujemy następująco:

$R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X \cup P)$.

Twierdzenie B.
$R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{\mathcal{R}\cup\{R\}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$.

DOWÓD. Trzeba dowieść implikacje: prostą i odwrotną.

Dowód $\Rightarrow$.
Załóżmy, że $R \in Perm(\mathcal{R}, X)$. Niech $\alpha \in C_{\mathcal{R}\cup\{R\}}(X)$. Na mocy punktu (2) twierdzenia A. mamy wtedy: jeśli $Cld(\mathcal{R} \cup \{R\}, X)$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$. Stąd i z założenia, że $R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ mamy: $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Dowód $\Leftarrow$.
Niech $(P, \alpha) \in R$ oraz $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$. Na mocy monotoniczności (względem reguł) operatora $C_{\mathcal{R}}$ mamy: $P \subseteq C_{\mathcal{R}\cup\{R\}}(X)$. Stąd, na mocy punktu (4) twierdzenia A. otrzymujemy: $\alpha \in C_{\mathcal{R}\cup\{R\}}(X) = C_{\mathcal{R}}(X)$.

Twierdzenie C.

- (1) $R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $Y \subseteq S$ oraz każdej rodziny reguł $\mathcal{R}'$: $C_{\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'\cup\{R\}}(X \cup Y) \subseteq C_{\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'}(X \cup Y)$.
- (2) $Der(\mathcal{R}, X) \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (3) Istnieją: $\mathcal{R}$ oraz X takie, że $Perm(\mathcal{R}, X) - Der(\mathcal{R}, X) \neq \emptyset$.

DOWÓD.

(1). Dowód implikacji $\Leftarrow$ otrzymujemy bezpośrednio z punktu (3) twierdzenia A.
Dla dowodu implikacji $\Rightarrow$ zauważmy, że jeśli $R \in Der(\mathcal{R}, X)$, to, na mocy punktów (5)–(10), zbiór $C_{\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'\cup\{R\}}(X \cup Y)$ jest domknięty na regułę R, dla dowolnego zbioru Y.
Z powyższego, jeśli $\alpha \in C_{\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'\cup\{R\}}(X \cup Y)$, to, na mocy punktu (2) twierdzenia A., $\alpha \in C_{\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'}(X \cup Y)$.

(2). Wynika bezpośrednio z definicji pojęć reguły dopuszczalnej oraz reguły wyprowadzalnej.

(3). Niech R_{triv} będzie regułą o schemacie $\frac{\alpha}{\alpha}$. Niech R_{sub} będzie regułą podstawiania (formuł za zmienne zdaniowe, określoną w wykładach 5-7). Wtedy:

$$R_{sub} \in Perm(\{R_{triv}\}, \{p \to p\}) - Der(\{R_{triv}\}, \{p \to p\}).$$

Zanotujmy jeszcze, bez dowodów, pewne dalsze fakty dotyczące dopuszczalności oraz wyprowadzalności reguł:

- (4) $\mathcal{R} \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (5) $Perm(Perm(\mathcal{R}, X), X) = Perm(\mathcal{R}, X)$.

- (6) Funkcja $Perm$ nie jest finitystyczna względem argumentu X. Nie jest monotoniczna ani względem argumentu $\mathcal{R}$, ani względem argumentu X.
- (7) $Der(\mathcal{R}, X) = \bigcap\{Perm(\mathcal{R}', X') : \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}' \wedge X \subseteq X'\}$.
- (8) $\mathcal{R} \subseteq Der(\mathcal{R}, X)$.
- (9) Jeśli $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$, to $Der(\mathcal{R}, X) \subseteq Der(\mathcal{R}', X)$.
- (10) Jeśli $X \subseteq Y$, to $Der(\mathcal{R}, X) \subseteq Der(\mathcal{R}, Y)$.
- (11) $Der(Der(\mathcal{R}, X), X) = Der(\mathcal{R}, X)$.
- (12) Funkcja Der nie jest finitystyczna ani względem argumentu $\mathcal{R}$, ani względem argumentu X.

* * *

UWAGA. Twierdzenia dotyczące wielu dalszych własności operatorów i relacji konsekwencji w językach zdaniowych znaleźć można np. w cytowanych niżej pracach.

W wykładach LOGIKA MATEMATYCZNA omówiliśmy następujące tego typu relacje i operacje dla KRZ:

- relacja konsekwencji $\vdash_{krz}$ oraz operacja C_{krz}, wyznaczone przez aksjomatykę KRZ i regułę odrywania RO;
- relacja konsekwencji $\vdash_{\mathfrak{B}_2}$ oraz operacja $C_{\mathfrak{B}_2}$, wyznaczone przez matrycę $\mathfrak{B}_2$ (tu przez $X \vdash_{\mathfrak{B}_2} \alpha$ rozumiemy, że $\alpha \in C_{\mathfrak{B}_2}(X)$);
- relacja konsekwencji $\vdash_{jas}$ oraz operacja C_{jas}, wyznaczone przez reguły pierwotne systemu założeniowego KRZ;
- relacja konsekwencji $\vdash_{rez}$ oraz operacja C_{rez}, wyznaczone przez regułę rezolucji w KRZ;
- relacja konsekwencji $\vdash_{tab}$ oraz operacja C_{tab}, wyznaczone przez tablice analityczne dla KRZ.

Pokazaliśmy, że wszystkie te relacje konsekwencji są równe:

$$\vdash_{krz} = \vdash_{\mathfrak{B}_2} = \vdash_{jas} = \vdash_{rez} = \vdash_{tab} .$$

Wszystkie wymienione wyżej operacje konsekwencji dla KRZ spełniają warunki (C1)–(C4) omówione w wykładach 5–7.

* * *

UWAGA. Przytoczone wyżej szkice dowodów wzorowano na dowodach przedstawionych w cytowanej na wykładzie monografii W.A. Pogorzelskiego: *Klasyczny Rachunek Zdań. Zarys teorii.*, PWN, Warszawa 1975[3].

Ogólne własności pojęcia konsekwencji przedstawione zostały w pracach Alfreda Tarskiego:

Tarski, A. 1930. Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. *Monatshefte für Mathematik und Physik* Bd **XXXVII**, 361–404.

Tarski, A. 1934. Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów. *Przegląd Filozoficzny.* **37**, 438–460. Zob. też: *Alfred Tarski: Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 2. Metalogika.* (Redakcja naukowa: Jan Zygmunt), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

Wymieńmy kilka dalszych prac o fundamentalnym znaczeniu dla tej problematyki:

Czelakowski, J. 2001. *Protoalgebraic logics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Łoś, J., Suszko, R. 1956. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae* **XX**, 177–183.

Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Elements of the theory of completeness in propositional logic.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin.

Wójcicki, R. 1984. *Lectures on propositional calculi.* Ossolineum, Wrocław.

* * *

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM

www.logic.amu.edu.pl