Księga Zagadek Gödlowskich

Zagadki, Paradoksy, Dowody

Raymond Smullyan

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski

Podstawa przekładu: Raymond Smullyan
The Gödelian Puzzle Book.
Puzzles, Paradoxes & Proofs.
Dover Publications, Inc., Mineola, New York 2013.

PRZEDMOWA

Ta książka, jak mało która, objaśnia pionierskie odkrycia zadziwiającego logika Kurta Gödla poprzez rozrywkowe zagadki logiczne. Jej tytuł uzasadniony jest tym, że prawie wszystkie zagadki w książce zgrupowane są wokół słynnego wyniku Gödla.

W pierwszej ćwierci dwudziestego wieku istniały już pewne systemy matematyczne, które były tak obszerne, że powszechnie zakładano, iż każde stwierdzenie matematyczne może bądź udowodnione, bądź odrzucone w takim systemie. W 1931 roku Gödel zadziwił cały świat matematyczny, pokazując, iż tak nie jest [Gödel 1931]: dla każdego z owych systemów muszą istnieć stwierdzenia matematyczne, których wewnątrz systemu nie można ani udowodnić, ani odrzucić. W istocie Gödel podał konkretny przepis na otrzymanie w każdym takim systemie zdania, które musi być prawdziwe, lecz niedowodliwe w tym systemie. Ten słynny wynik znany jest jako *Twierdzenie Gödla*.

Zasadnicza idea dowodu Gödla jest następująca.

Gödel przyporządkował każdemu matematycznemu zdaniu systemu liczbę, dzisiaj znaną jako *numer Gödla* tego zdania. Skonstruował następnie wielce pomysłowe zdanie S, które stwierdzało, że pewna liczba n była numerem Gödla zdania, które nie było dowodliwe w systemie. Tak więc, owo zdanie S było prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy n była numerem zdania niedowodliwego. Jednak rzeczą zadziwiającą było to, że owa n była numerem Gödla samego zdania S! Tak więc, S stwierdzało, że jego własny numer Gödla był numerem Gödla zdania niedowodliwego. Na skutek tego, S było zdaniem samozwrotnym, które stwierdzało swoją własną niedowodliwość. Oznaczało to, że albo S było prawdziwe oraz niedowodliwe, albo S było fałszywe, lecz dowodliwe. Drugi człon tej alternatywy zdawał się nie wchodzić w grę, ponieważ było oczywiste (z natury systemu), że w systemie można było udowodnić tylko zdania prawdziwe. A zatem zdanie Gödla S było prawdziwe, lecz niedowodliwe w systemie. Jego prawdziwość ustalić można było tylko poprzez wyjście poza system, badając niektóre jego własności.

W jaki sposób Gödlowi udało się skonstruować takie pomysłowe zdanie? Celem tej książki jest tego wyjaśnienie, przy użyciu pojęć całkowicie zrozumiałych dla przeciętnych czytelników – nawet tych bez jakiegokolwiek przygotowania matematycznego. Napisałem tę książkę w ten sposób, że powinna ona być doskonale zrozumiała dla dowolnego wystarczająco bystrego studenta. Jest to przy tym pierwsza z moich popularnych książek z zagadkami logicznymi, w której podaję *kompletny* dowód twierdzenia Gödla dla pewnego szczególnie ważnego systemu matematycznego, a także mnóstwo uogólnień, które nie były nigdy przedtem publikowane, a więc powinny okazać się interesujące nie tylko dla zwykłego czytelnika, lecz również dla specjalistów w dziedzinie logiki. Uogólnienia te znaleźć można w rozdziałach: XIII, XIV oraz XV.

Napisałem tę książkę w całości w stylu bardzo nieformalnym. Po gawędziarskim wstępnym rozdziale I, który składa się głównie z anegdot oraz żartów osobistych, pozostałe rozdziały części I składają się z zagadek, paradoksów, informacji o naturze nieskończoności (która często wydaje się bardziej paradoksalna niż w rzeczywistości jest) oraz pewnych osobliwych systemów związanych z twierdzeniem Gödla. Część II jest zasadniczą częścią tej książki i może być czytana niezależnie od części I. Pierwsze trzy jej rozdziały zawierają moje uogólnione twierdzenia Gödla, które są niezwykłe w tym, że nie korzystają ze zwykłej maszynerii logiki symbolicznej! Odstawiłem logikę symboliczną – spójniki logiczne oraz kwantyfikatory – do ostatnich trzech rozdziałów, które rozpoczynają się od podstaw logiki oraz tego, co znane jest jako *arytmetyka pierwszego rzędu*, po czym następuje przedstawienie słynnego systemu znanego jako *Arytmetyka Peana*. Tam też podaję kompletny dowód sławnego twierdzenia Gödla, że istnieją zdania Arytmetyki Peana, które nie mogą zostać ani udowodnione ani odrzucone wewnątrz tego systemu.

Odkrycia Gödla doprowadziły do nawet jeszcze ważniejszego wyniku: czy istnieje jakakolwiek czysto mechaniczna metoda ustalania, które stwierdzenia matematyczne są prawdziwe, a które są fałszywe? To prowadzi nas do dziedziny *teorii decyzji*, znanej pod lepszą nazwą jako *teoria rekursji*, a która pełni dziś tak żywotną rolę w informatyce. Rozdział XVI tej książki objaśnia niektóre podstawowe pojęcia tej ważnej dziedziny. Okazuje się, że istotnie nie istnieje czysto mechaniczna metoda ustalania, które stwierdzenia matematyczne są prawdziwe, a które nie są! Żaden komputer nie jest w stanie rozstrzygnąć wszystkich pytań matematycznych. Wydaje się, że mózg oraz pomysłowość są, i zawsze będą, wymagane. Paul Rosenbloom ujął to w żartobliwe słowa: „Człowiek nigdy nie może wyeliminować konieczności używania swojej własnej inteligencji, niezależnie od tego, jak sprytnie będzie tego próbował!”

Chciałbym podziękować Dr. Sue Toledo za jej bardzo pomocną pracę edytorską przy tej książce.

Spis Treści