STRUKTURALNA CHARAKTERYSTYKA OPERATORA ELIMINACJI

Zakład Logiki Stosowanej IJ UAM 2012-06-13

ROBERT SOCHACKI

Instytut Filozofii, Uniwersytet Opolski

OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA OPERATORA ELIMINACJI

Niech S będzie dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję E: $2^S \to 2^S$ będziemy nazywać operatorem eliminacji, jeśli dla dowolnych X, $Y \in 2^S$ spełnione są warunki:

- $E(X) \subseteq X$,
- $X \subseteq Y \Rightarrow E(X) \subseteq E(Y)$,
- $E(X) \subseteq E(E(X))$.

własności operatora eliminacji

Łatwo zauważyć, że dla dowolnego operatora eliminacji E oraz dowolnego zbioru $X \subseteq S$ zachodzą zależności:

- $E(\emptyset) = \emptyset$,
- $E(E(X)) = E(X)$.

Niech $\mathbb{T}$ będzie dowolną rodziną podzbiorów ustalonego niepustego zbioru S. Można pokazać, że zachodzą następujące związki:

- $\mathbb{T} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap\{E(X) \colon X \in \mathbb{T}\} \subseteq E(S)$,
- $\mathbb{T} = \emptyset \Rightarrow \bigcap\{E(X) \colon X \in \mathbb{T}\} = S$,

własności operatora eliminacji

- $E(\bigcap \mathbb{T}) \subseteq \bigcap\{E(X) \colon X \in \mathbb{T}\}$.

  Operator eliminacji ze swoimi własnościami przypomina inny operator znany z topologii – operator wnętrza *INT*, ale jest od niego słabszy. Warunki charakteryzujące operator wnętrza topologicznego są następujące:

i. $INT(X) \subseteq X$,

ii. $INT(X \cap Y) = INT(X) \cap INT(Y)$,

iii. $INT(X) \subseteq INT(INT(X))$,

iv. $INT\,(S) = S$.

Z warunku ii. wynika własność monotoniczności dla operatora *INT* , ale nie na odwrót. W literaturze naukowej (P. Łukowski: *A reductive approach to Ł-decidability*, BSL 28/3, (1999)) można spotkać także związek między operatorem konsekwencji Tarskiego a operatorem eliminacji. Przypomnijmy, że funkcję $Cn\colon 2^S \to 2^S$ będziemy nazywać operatorem konsekwencji Tarskiego, jeśli dla dowolnych $X, Y \in 2^S$ spełnione są warunki:

operator eliminacji a inne operatory

- $X \subseteq Cn(X)$,
- $X \subseteq Y \Rightarrow Cn(X) \subseteq Cn(Y)$,
- $Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X)$.

P. Łukowski przyjmuje w swoich pracach wzajemną definiowalność operatorów eliminacji i konsekwencji w postaci:

- $E(X) = S \setminus Cn(S \setminus X)$

lub też dualnie

- $Cn(X) = S \setminus E(S \setminus X)$.

operator eliminacji a inne operatory

Przyjmując jako wyjściowe np. aksjomaty operatora konsekwencji Tarskiego można udowodnić wszystkie własności operatora eliminacji i na odwrót. Pokażemy jak z definicji $E(X) = S \setminus Cn(S \setminus X)$ na bazie aksjomatów operatora konsekwencji Tarskiego wynika własność $E(X) \subseteq E(E(X))$. Mamy zatem:

1. $\alpha \in E(X)$ {zał.}
2. $\alpha \notin E(E(X))$ {z. d. n.}

3. $\alpha \notin S \setminus Cn\,(S \setminus E(X))$ {2, Def., $X/E(X)$}
4. $\alpha \notin S \setminus Cn\,[S \setminus (S \setminus Cn\,(S \setminus X))]$ {3, Def.}
5. $\alpha \notin S \setminus Cn\,[Cn\,(S \setminus X)]$ {4}
6. $\alpha \notin S \setminus Cn\,(S \setminus X)$ {5, własność Cn}
7. $\alpha \notin E(X)$ {6, Def.}

sprzeczność {1, 7}

Podobnie dowodzi się pozostałe dwie własności operatora eliminacji. Dla różnych operatorów konsekwencji można w sposó standardowy wyprowadzić różne własności operatora eliminacji, np. $\alpha\rightarrow\alpha\in Cn(\varnothing)$ wtw $\alpha\rightarrow\alpha\notin E(S)$, o ile $E(S) \subset S$.

KLASA WSZYSTKICH OPERATORÓW ELIMINACJI NAD DANYM UNIWERSUM

Klasę wszystkich operatorów eliminacji na zbiorze niepustym S będziemy oznaczać symbolem Ω. Załóżmy, że mamy daną pewną rodzinę zbiorów $\mathfrak{R} \subseteq 2^{S}$. Rozpatrzmy teraz pewien operator $E_{\mathfrak{R}}$ postaci:

DEF. 1. $E_{\mathfrak{R}}(X) = \bigcup\{Y: Y \subseteq X \text{ i } Y \in \mathfrak{R}\}$

dla dowolnego $X \subseteq S$. Można łatwo pokazać, że tak zdefiniowany operator spełnia aksjomaty operatora eliminacji, czyli $E_{\mathfrak{R}} \in \Omega$.

operator eliminacji $E_{\mathfrak{R}}$

Do dalszych rozważań przyjmujemy definicję E-systemów (E-teorii) postaci:

DEF. 2. $Th(E) = \{X \in 2^S : E(X) = X\}$.

Przykładami E-teorii są np. zbiór $\varnothing$ oraz $E(X)$, dla dowolnego $X \subseteq S$. Operator Th: $\Omega \to 2^S$ jest iniekcją, tzn. spełniony jest warunek:

$(E_1, E_2 \in \Omega$ i $E_1 \neq E_2) \Rightarrow Th(E_1) \neq Th(E_2)$.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać pewne dodatkowe własności rodziny zbiorów $\mathfrak{R}$.

operator eliminacji $E_{\mathfrak{R}}$

Rozpatrzmy teraz pewną klasę rodzin zbiorów domkniętych ze względu na sumę mnogościową. Oznaczmy tę klasę przez $\boldsymbol{K}$. Mamy zatem:

DEF. 3. $\boldsymbol{K} = \{\mathfrak{R} \subseteq 2^S : \forall_{\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}} \bigcup \mathfrak{R}_1 \in \mathfrak{R}\}$.

Zachodzą następujące zależności:

LEMAT 1.

a) $\mathfrak{R} \in \boldsymbol{K} \Rightarrow Th\,(E_{\mathfrak{R}}) = \mathfrak{R}$,

b) $E \in \boldsymbol{\Omega} \Rightarrow Th\,(E) \in \boldsymbol{K}$.

operator eliminacji $E_{\Re}$

Dowód a). Niech $\Re \in \boldsymbol{K}$.

<u>**Załóżmy**</u> dodatkowo, że $X \in Th\ (E_{\Re})$. Mamy więc (na mocy definicji 1 i 2): $E_{\Re}(X) = \bigcup\{Y\colon Y \subseteq X$ i $Y \in \Re\} = X$. Niech dana będzie pewna rodzina $\Re_1$ postaci $\{Y\colon Y \subseteq X$ i $Y \in \Re\}$. Ponieważ $\Re_1 \subseteq \Re$ oraz $\bigcup \Re_1 \in \Re$, więc $X \in \Re$. Mamy zatem inkluzję postaci: $Th\ (E_{\Re}) \subseteq \Re$.

<u>**Załóżmy**</u> teraz, że $X \in \Re$ i dodatkowo przyjmijmy, że $x \in X$. Ponieważ $x \in \bigcup\{Y\colon Y \subseteq X$ i $Y \in \Re\}$, stąd $x \in E_{\Re}(X)$, zatem $X \subseteq E_{\Re}(X)$. Ponieważ $E_{\Re}$ jest operatorem eliminacji, więc zachodzi także $E_{\Re}(X) \subseteq X$, czyli otrzymujemy zależność postaci $E_{\Re}(X) = X$. Na mocy definicji 2 mamy więc warunek $X \in Th\ (E_{\Re})$. Pokazaliśmy zatem inkluzję $\Re \subseteq Th\ (E_{\Re})$, co kończy dowód. □

W zbiorze Ω wszystkich operatorów eliminacji wprowadzamy porządek następująco:

DEF. 4. $E_1 \leq E_2$ wtw $\forall_{X \subseteq S}\ E_1(X) \subseteq E_2(X)$.

Na mocy definicji 4 oraz 2 można łatwo pokazać, że zachodzi lemat:

LEMAT 2.

$E_1 \leq E_2$ wtw $Th(E_1) \subseteq Th(E_2)$.

Zachodzi ważne twierdzenie charakteryzujące strukturalnie klasę uporządkowanych operatorów ze zbioru Ω .

TWIERDZENIE 1.

Funkcja φ: $\Omega \rightarrow \boldsymbol{K}$ określona wzorem $\varphi(E) = Th(E)$ ustala izomorfizm struktur $(\Omega, \leq)$ oraz $(\boldsymbol{K}, \subseteq)$.

Dowód. Z lematu 1b) oraz z określenia funkcji φ wynika, że $\varphi(E) \in \boldsymbol{K}$. Z poprzednich rozważań wynika, że funkcja φ jest różnowartościowa, a na podstawie lematu 1a) jest także „na”. Funkcja φ jest zatem bijekcją, która zachowuje porządek, a zatem ustala izomorfizm między strukturami $(\Omega, \leq)$ oraz $(\boldsymbol{K}, \subseteq)$. □

izomorfizm struktur

Przypomnijmy, że izomorfizmy struktur relacyjnych zachowują wszystkie własności algebraiczne działań i relacji strukturalnych. Dlatego struktury izomorficzne są z algebraicznego punktu widzenia nierozróżnialne i uznajemy je za identyczne.

KLASA OPERATORÓW ELIMINACJI ZUPEŁNIE MULTIPLIKATYWNYCH

Rozważymy tutaj dwie podklasy operatorów eliminacji ze zbioru Ω spełniających dodatkowe założenia. Rozróżnimy przypadki, gdy (I) $E(S) \subset S$ oraz (II) $E(S) = S$. Ponadto nałożymy na operator eliminacji dodatkowy warunek postaci:

$$\forall_{X \subseteq S} \, [E(S) \cap \bigcap \{E(X) \colon X \in \mathbb{T}\} \subseteq E(\bigcap \mathbb{T})].$$

Także w klasie ***K*** rozróżnimy pewne podklasy.

(I). **DEF. 5.** $\Omega_P = \{E \in \Omega :$

$\forall_{T \subseteq 2^S} [E(S) \cap \bigcap \{E(X) : X \in \mathbb{T}\} \subseteq E(\bigcap \mathbb{T})]$

DEF. 6.

$\boldsymbol{K}_\cap = \{\mathfrak{R} \in \boldsymbol{K} : [\mathfrak{R}_1 \neq \emptyset \Rightarrow \forall_{\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}} \bigcap \mathfrak{R}_1 \in \mathfrak{R}]\}.$

LEMAT 3.

a) $\mathfrak{R} \in \boldsymbol{K}_\cap \Rightarrow E_{\mathfrak{R}} \in \Omega_P$,

b) $E \in \Omega_P \Rightarrow Th(E) \in \boldsymbol{K}_\cap$.

Pomiędzy strukturami $(\Omega_P, \leq)$ oraz $(\boldsymbol{K}_\cap, \subseteq)$ zachodzi następująca odpowiedniość:

TWIERDZENIE 2.

Funkcja ψ: $\Omega_P \to \boldsymbol{K}_\cap$ określona wzorem $\varphi(E) = Th(E)$ ustala izomorfizm struktur $(\Omega_P, \leq)$ oraz $(\boldsymbol{K}_\cap, \subseteq)$.

Dowód.

Jest analogiczny do dowodu twierdzenia 1. Łatwo zauważyć, że izomorfizm ψ jest po prostu obcięciem izomorfizmu φ (z twierdzenia 1) do zbioru Ω_P. □

(II). DEF. 7. $\Omega_P^{*} = \{E \in \Omega :$

$\forall_{T \subseteq 2^S} \bigcap \{E(X) : X \in \mathcal{T}\} \subseteq E(\bigcap \mathcal{T})\}$

DEF. 8.

$\boldsymbol{K}_{\cap}^{*} = \{\mathfrak{R} \in \boldsymbol{K} : \forall_{\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}} \bigcap \mathfrak{R}_1 \in \mathfrak{R}\}.$

LEMAT 4.

a) $\mathfrak{R} \in \boldsymbol{K}_{\cap}^{*} \Rightarrow E_{\mathfrak{R}} \in \Omega_P^{*}$,

b) $E \in \Omega_P^{*} \Rightarrow Th(E) \in \boldsymbol{K}_{\cap}^{*}$.

Pomiędzy strukturami $(\Omega_P^{*}, \leq)$ oraz $(\boldsymbol{K}_{\cap}^{*}, \subseteq)$ zachodzi następująca odpowiedniość:

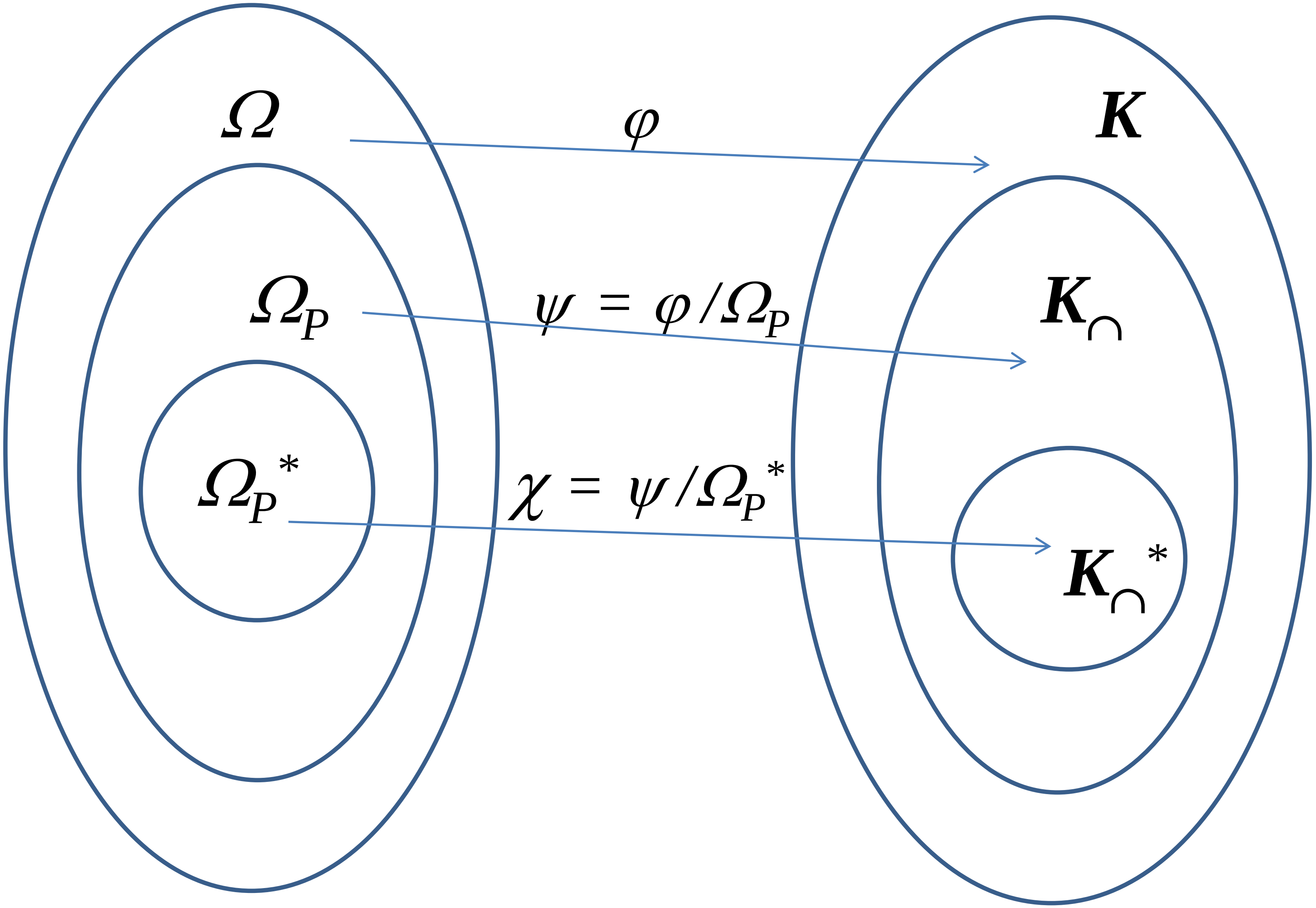
TWIERDZENIE 3.

Funkcja χ: $\Omega_P{}^* \to \boldsymbol{K}_\cap{}^*$ określona wzorem $\chi(E) = Th(E)$ ustala izomorfizm struktur $(\Omega_P{}^*, \leq)$ oraz $(\boldsymbol{K}_\cap{}^*, \subseteq)$.

Dowód.

Jest analogiczny do dowodu twierdzenia 1. Łatwo zauważyć, że izomorfizm χ jest po prostu obcięciem izomorfizmu ψ (z twierdzenia 2) do zbioru $\Omega_P{}^*$. □

obrazek graficzny izomorficznych zależności



QUASI-PORZĄDKI A OPERATORY ELIMINACJI ZUPEŁNIE MULTIPLIKATYWNE

DEF. 9. Relację $r \subseteq S \times S$ nazywamy quasi-porządkiem wtw gdy jest ona zwrotna i przechodnia, tzn. spełnia warunki postaci:

- $\forall_{x \in S}\ (x, x) \in r$,
- $\forall_{x, y, z \in S}\ [(x, y) \in r \text{ i } (y, z) \in r] \Rightarrow (x, z) \in r$.

DEF. 10. Obrazem zbioru X w relacji r nazywamy zbiór postaci:

$$r(X) = \{y \in S\colon \exists_{x \in X}\ (x, y) \in r\}$$

LEMAT 5.

Dla dowolnych zbiorów X, $Y \in 2^S$ mamy:

a) $X \subseteq r(X)$,

b) $X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \subseteq r(Y)$,

c) $r(r(X)) \subseteq r(X)$,

d) $x \in r(X) \Rightarrow x \in r(Y)$ dla pewnego skończonego podzbioru Y zbioru X.

Powyższe warunki charakteryzują algebraiczny operator domknięcia na zbiorze S.

operator eliminacji a quasi-porządek

Niech Q oznacza zbiór wszystkich quasi-porządków określonych na zbiorze S. Dla dowolnej relacji r ze zbioru Q definiujemy operator E_r postaci:

$$E_r(X) = S \setminus r(S \setminus X).$$

TWIERDZENIE 4.

i. $E_r \in \Omega$,

ii. $E_r(S) = S$,

iii. $\bigcap\{E_r(X)\colon X \in \mathbb{T}\} \subseteq E_r(\bigcap \mathbb{T})$,

dla dowolnego $\mathbb{T} \subseteq 2^S$.

Łatwo zauważyć, że zachodzą oczywiste wnioski:

- $r \in Q \Rightarrow E_r \in \Omega_P{}^*$,
- $(r_1, r_2 \in Q \text{ i } r_1 \neq r_2) \Rightarrow E_{r_1} \neq E_{r_2}$.

Podamy teraz określenie relacji zrelatywizowanej do dowolnego operatora eliminacji.

DEF. 11.

$E \in \Omega \Rightarrow [(x, y) \in r_E \Leftrightarrow y \notin E\,(S \setminus \{x\})]$

operator eliminacji a quasi-porządek

LEMAT 6. $E \in \Omega \Rightarrow r_E \in Q.$

<u>Dowód:</u>

Ponieważ z własności operatora E wynika, że $E\ (S \setminus \{x\}) \subseteq S \setminus \{x\}$, a zatem $x \notin E\ (S \setminus \{x\})$, czyli zgodnie z definicją relacji r_E mamy $(x, x) \in r_E$. Niech teraz $(x, y) \in r_E$ oraz $(y, z) \in r_E$ i $(x, z) \notin r_E$. Mamy więc: $y \notin E(x')$ i $z \notin E(y')$ i $z \in E(x')$, gdzie symbol a' oznacza dopełnienie zbioru $\{a\}$ w zbiorze S. Warunki te prowadzą jednak do sprzeczności na mocy własności operatora E postaci:

$$E(z) = E(x' \cap y' \cap z) \subseteq E(x') \cap E(y') \cap E(z)$$

LEMAT 7. $E \in \Omega_P{}^* \Rightarrow E_{r_E} = E$.

<u>Dowód.</u>

Niech $E \in \Omega_P{}^*$. Mamy wówczas: $y \in E_{r_E}(X')$ $\Leftrightarrow y \notin r_E(X) \Leftrightarrow \forall_{x \in X}\, (x, y) \notin r_E \Leftrightarrow \forall_{x \in X}\, y \in E(x')$ $\Leftrightarrow y \in \bigcap\{E(x'): x \in \mathbb{X}\}$. Niech $\mathfrak{R}_0 = \{x': x \in \mathbb{X}\}$, wtedy $\bigcap \mathfrak{R}_0 = X'$. Uwzględniając teraz wcześniejsze zależności mamy: $\bigcap\{E(Y): Y \in \mathfrak{R}_0\} = E(\bigcap \mathfrak{R}_0)$, tzn. $\bigcap\{E(x'): x \in \mathbb{X}\} = E(X')$. Pokazaliśmy zatem, że $y \in E_{r_E}(X') \Leftrightarrow y \in E(X')$.

□

LEMAT 8. $r_1, r_2 \in Q \Rightarrow (r_1 \subseteq r_2 \Leftrightarrow E_{r_2} \leq E_{r_1})$.

Dowód. Niech $r_1, r_2 \in Q$. Załóżmy dodatkowo, że $r_1 \subseteq r_2$ oraz $y \in E_{r_2}(X')$. Na mocy def. E_r mamy, że $y \notin r_2(X)$. Z założenia mamy zatem $y \notin r_1(X)$, a stąd i z def. E_r mamy $y \in E_{r_1}(X')$. Pokazaliśmy więc, że $E_{r_2} \leq E_{r_1}$. Niech teraz $E_{r_2} \leq E_{r_1}$ i niech $(x, y) \in r_1$. Wynika stąd, że $E_{r_2}(x') \subseteq E_{r_1}(x')$, a zatem $r_1(\{x\}) \subseteq r_2(\{x\})$. Ponieważ $(x, y) \in r_1$, więc $y \in r_1(\{x\})$, a stąd $y \in r_2(\{x\})$. Ostatecznie $(x, y) \in r_2$, czyli $r_1 \subseteq r_2$. $\square$

TWIERDZENIE 5.

Funkcja ρ: $Q \to \Omega_P^*$ określona wzorem $\rho(r)=E_r$ ustala izomorfizm dualny struktur $(Q, \subseteq)$ oraz $(\Omega_P^*, \leq)$.

Dowód. Funkcja ρ jest iniekcją – wynika to z tego, że $(r_1, r_2 \in Q$ i $r_1 \neq r_2) \Rightarrow E_{r_1} \neq E_{r_2}$ oraz jest suriekcją, bo z lematu 6 i lematu 7 łatwo wynika zależność postaci: $\forall E \in \Omega_P^*$ $\exists r \in Q$ $(E_r = E)$.To, że jest to dualny izomorfizm, wynika z lematu 8. □

LITERATURA

Grzegorz Bryll, Robert Sochacki:

ON A RELATIONSHIP BETWEEN SOME CLASSES OF ELIMINATION OPERATORS AND SOME CLASSES OF FAMILIES OF SETS

Bulletin of the Section of Logic 29/4 (2000), 1-10.