Matematyczne Podstawy Kognitywistyki

Plan Wykładów

Kognitywistyka UAM, 2016–2017

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

W tym pliku wyliczamy pojęcia, twierdzenia, konstrukcje, przykłady, które omówione zostaną podczas wykładu. Przypominamy również niektóre pojęcia, omawiane w szkole. Dla uciechy dodajemy garść zagadek matematycznych, których rozwiązania podane zostaną podczas dalszych wykładów.

Plan wykładów

1. *Rachunek zbiorów*.
2. *Rachunek relacji*.
3. *Funkcje*.
4. *Kombinatoryka i ciągi liczbowe*.
5. *Struktury porządkowe*.
6. *Struktury algebraiczne*.
7. *Struktury topologiczne*.
8. *Granice i ciągłość*.
9. *Różniczkowanie*.
10. *Wybrane twierdzenia rachunku różniczkowego*.
11. *Całkowanie*.
12. *Miara i prawdopodobieństwo*.
13. *Algorytmy*.
14. *Powtórka: przygotowanie do zaliczenia wykładu*.

1 Rachunek zbiorów

Na pierwszym wykładzie omówimy najbardziej elementarne pojęcia dotyczące zbiorów. Niektóre bardziej złożone konstrukcje pojawią się nieco później.

1. Pojęcia pierwotne teorii mnogości.
2. Sposoby określania zbiorów: wyliczenie elementów i warunki definiujące.
3. Operacje na zbiorach.
4. Relacje między zbiorami.
5. Pary uporządkowane.
6. Zbiór pusty, zbiór potęgowy, produkty i potęgi kartezjańskie.
7. Zbiory skończone i nieskończone: intuicje.
8. Operacje nieskończone na zbiorach.
9. Wizualizacje: diagramy Venna i Carrolla.
10. Przykłady liczbowe.
11. Przykłady geometryczne.
12. Aksjomaty teorii mnogości.
13. Zachęta do refleksji:
    - (a) Czy można *wszystkie* zbiory zebrać w jeden zbiór?
    - (b) Czy dowolna własność wyznacza jakiś zbiór?
    - (c) Czy ręka jest zbiorem palców?
    - (d) Czy zbiór może mieć *rozmyte granice*?
    - (e) Obecnie dość powszechnie uważa się teorię mnogości za podstawę całej matematyki. Ale przecież teoria ta powstała stosunkowo niedawno. W jaki zatem sposób uprawiano wcześniej matematykę, na czym bazowano?
    - (f) Czy liczby są zbiorami?
    - (g) Czy można *opisać* rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$?
    - (h) Czy można narysować diagram Venna dla *dowolnej* skończonej liczby zbiorów?

2 Rachunek relacji

Ważne: uświadomienie studentom, że np. struktury liczbowe rozpatrujemy zwykle jako zbiory obiektów powiązanych relacjami (w tym funkcjami).

1. Proste przykłady arytmetyczne i geometryczne.
2. Własności relacji dwuargumentowych.
   (a) Zwrotność, przeciwzwrotność, symetria, asymetria, przechodniość, spójność, antysymetria, serialność, itd.
   (b) Podobieństwa i opozycje.
   (c) Relacje równoważności, podziały, klasyfikacje.
3. Operacje na relacjach.
   (a) Operacje boolowskie.
   (b) Konwers.
   (c) Złożenie.
   (d) Związki między własnościami relacji a operacjami na nich.
4. Reprezentacje: grafy, macierze incydencji, reprezentacje geometryczne.
5. Zachęta do refleksji:
   (a) Jakiego typu relacją jest związek przyczynowo skutkowy?
   (b) Jak wyrazić *siłę* (stopień) zachodzenia relacji?
   (c) Jakiego typu relacją jest *analogia*?
   (d) Jak wiadomo, *do zdrady trzeba trojga*. Jakie własności mają relacje trójargumentowe (czteroargumentowe, itd.)?
   (e) Czy relacje mogą mieć zmienną liczbę argumentów?
   (f) Czy relacje mogą mieć nieograniczoną liczbę argumentów?

3 Funkcje

Ważne: uświadomienie studentom, że funkcje traktujemy jako obiekty matematyczne (relacje, zbiory), a nie jako procesy itp.

1. Proste przykłady arytmetyczne i geometryczne.

2. Podstawowe pojęcia związane z funkcjami (dziedzina, przeciwdziedzina, obrazy i przeciwobrazy zbiorów, złożenie funkcji, funkcja odwrotna, itd.).

3. Rodzaje funkcji: iniekcje, surjekcje, bijekcje.

4. Definicja Dedekinda zbiorów nieskończonych.

5. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne.

6. Definicja von Neumanna liczb naturalnych.

7. Przypomnienie: funkcje poznane w szkole.

8. Notacje dla funkcji.

9. Zachęta do refleksji:

   (a) Czy każda funkcja ma jakiś opis językowy?

   (b) Czy można sporządzić wykres dowolnej funkcji?

   (c) Co to znaczy, że jedna funkcja rośnie szybciej od drugiej?

   (d) Ze szkoły znasz funkcję *silnia*, zdefiniowaną dla liczb naturalnych. Czy istnieje podobna do niej funkcja dla liczb rzeczywistych?

   (e) Przypuśćmy, że Wszechświat jest skończony. Jaki jest wtedy sens mówienia o zbiorach nieskończonych?

4 Kombinatoryka i ciągi liczbowe

Celem tego wykładu jest oswojenie studentów z prostymi własnościami kombinatorycznymi, pojęciem rekurencji, zastosowaniami zasady indukcji matematycznej. Przygotowujemy również studentów do rozumienia pojęć rachunku różniczkowego. Można też oswajać studentów z zagadnieniami probabilistycznymi w skończonych przestrzeniach zdarzeń elementarnych.

1. Przykłady prostych zagadnień kombinatorycznych.

2. Permutacje, wariacje, kombinacje.

3. Wzór dwumianowy, trójkąt Pascala.

4. Ciągi liczbowe. Rekurencja.

5. Ciągi liczbowe. Zastosowania zasady indukcji matematycznej.

6. Ciągi liczbowe: ograniczenie, monotoniczność, zbieżność.
7. Proste przykłady szeregów liczbowych.
8. Prawdopodobieństwo w skończonych przestrzeniach probabilistycznych.
9. Zachęta do refleksji:
    (a) Czy stosując zasadę indukcji matematycznej wykorzystujemy skończoną czy też nieskończoną liczbę przesłanek?
    (b) Czy istnieje ciąg (liczb rzeczywistych) najszybciej zbieżny?
    (c) Czy istnieje ciąg (liczb rzeczywistych) najwolniej rozbieżny?
    (d) Liczby wymierne mają skończone lub okresowe rozwinięcia dziesiętne. Czy w rozwinięciach dziesiętnych liczb niewymiernych nie ma *żadnych* regularności? A co z zapisami w innej bazie liczbowej? A jak wyglądają *ułamki łańcuchowe* reprezentujące liczby?

5 Struktury porządkowe

Relacje porządkujące przedstawiane są jako jeden z typów regularności.

1. Porządki częściowe i liniowe.
2. Porządki ostre i nieostre.
3. Porządki dyskretne i gęste.
4. Łańcuchy i antyłańcuchy.
5. Elementy: minimalne, maksymalne, najmniejszy i największy.
6. Ograniczenia i kresy.
7. Lemat Kuratowskiego-Zorna.
8. Drzewa.
9. Lemat Königa.
10. Dobre porządki.
11. Porządki ciągłe.
12. Kraty i algebry Boole'a: definicja porządkowa.

13. Informacja o liczbach porządkowych.

14. Zachęta do refleksji:

    (a) Czy można uporządkować liniowo wszystkie gałęzie nieskończonego drzewa dwójkowego?

    (b) Czy w zbiorach $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ jakiś porządek jest wyróżniony (np. przez własności arytmetyczne)?

    (c) Czy gęstość porządku może być stopniowalna?

    (d) Czy jest sensowne mówienie o porządku *kołowym*?

    (e) Przypuśćmy, że – w jakiejś świadomie aktywnej formie – byłbyś istotą trwającą wiecznie. W jaki sposób uporządkowałbyś tę wieczność? Zauważ, że jeśli poświęcisz np. pierwsze sto miliardów lat na śpiewanie pieśni religijnych, a następne sto miliardów lat na picie piwa, to po owych dwustu miliardach lat znów jesteś w punkcie wyjścia: masz przed sobą nieskończoność trwania. Możesz powtórzyć dwa poprzednie wybory. I jeszcze raz. I jeszcze raz. Na pewno masz ciekawsze pomysły na wieczność trwania – podziel się nimi.

6 Struktury algebraiczne

Ten wykład nie ma epatować studenta mnogością struktur algebraicznych, ale raczej oswoić go ze strukturalnym ujęciem współczesnej matematyki. Ważne: rozumienie pojęć homomorfizmu oraz izomorfizmu.

1. Przykłady: symetrie, arytmetyka modularna, itd.

2. Struktury, podstruktury, struktury ilorazowe.

3. Homomorfizmy i izomorfizmy.

4. Kongruencje.

5. Konstrukcje systemów liczbowych.

6. Działania na macierzach.

7. Kraty i algebry Boole'a: definicja algebraiczna.

8. Grupy, pierścienie, ciała: definicje i proste przykłady.

9. Zachęta do refleksji:

(a) Czy możliwe jest nieokresowe pokrycie płaszczyzny za pomocą wielokątów np. dwóch rodzajów?

(b) Składanie obrotów na płaszczyźnie jest przemienne. Czy przemienne jest składanie obrotów w przestrzeni trójwymiarowej?

(c) Zakresy pojęć są zbiorami, a więc można na nich wykonywać operacje boolowskie. Jaką strukturę tworzy zestaw wszystkich zakresów pojęć *rzeczywiście* używanych w danym języku?

(d) Czy oprócz grup, pierścieni i ciał istnieją inne ważne struktury matematyczne? W szkole mówiło się o *wektorach* – jaką strukturę tworzą wektory?

7 Struktury topologiczne

Nie planuje się wykładu topologii ogólnej. Omawiane będą właściwie tylko te pojęcia topologiczne, które wykorzystywane są później w wykładach dotyczących analizy rzeczywistej.

1. Bliskość, otoczenie, przekształcenie zachowujące bliskość: nieformalna dyskusja.

2. Punkty: wewnętrzne, zewnętrzne, brzegowe, domknięcia, izolowane, skupienia – nieformalna dyskusja.

3. Zbiory otwarte i domknięte, wnętrze, domknięcie, brzeg: nieformalna dyskusja.

4. Odległość: nieformalna dyskusja.

5. Zwartość i spójność: nieformalna dyskusja.

6. Kształt i położenie: nieformalna dyskusja.

7. Formalne definicje wyżej wymienionych pojęć.

8. Topologia naturalna w przestrzeniach euklidesowych: przykłady dla $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

9. Zachęta do refleksji:

   (a) Jak klasyfikować kształty?

   (b) Czym jest dziura?

(c) Jak wyobrażamy sobie wymiar?

(d) Jak sensownie określać odległość?

(e) Gdy z okręgu usuniemy jeden punkt, dostaniemy odcinek otwarty. Co dostaniemy, gdy do prostej dodamy jeden punkt?

(f) Co dostaniemy, gdy ze sfery usuniemy jeden punkt?

8 Granice i ciągłość

Wykład ograniczony jest do omówienia pojęć granicy oraz ciągłości w przypadku funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

1. Różne możliwości definiowania liczb rzeczywistych (np.: przekroje Dedekinda, klasy równoważności ciągów Cauchy'ego).

2. Rola aksjomatu ciągłości.

3. Ciało uporządkowane w sposób zupełny (z metryką) jako podstawa analizy rzeczywistej.

4. Przypomnienie: ciągi liczbowe, ich własności i zbieżność. Punkty skupienia i twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.

5. Zbieżność szeregów liczbowych.

6. Granica funkcji w punkcie. Granice niewłaściwe.

7. Ciągłość funkcji w punkcie.

8. Wybrane własności funkcji ciągłych.

9. Jednostajna ciągłość funkcji.

10. Zbieżność i jednostajna zbieżność ciągów funkcji.

11. Szeregi funkcyjne i potęgowe.

12. Zachęta do refleksji:

    (a) Czy własność ciągłości ma realność fizyczną?

    (b) Ustaliliśmy, że nie istnieją *nieskończone* liczby rzeczywiste (aksjomat Archimedesa!). Jaki jest zatem sens napisu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$?

(c) Czy do mówienia o ciągłości funkcji konieczne jest założenie aksjomatu ciągłości?

(d) Każdy potrafi pomalować płot zwykłym pędzlem. Zastanów się nad możliwościami „pomalowania” np. wnętrza koła pędzlem, którego końcówka jest dokładnie jednym punktem.

9 Różniczkowanie

Wykład wprowadza pojęcie pochodnej funkcji rzeczywistej jednej zmiennej oraz podaje podstawowe wzory dotyczące różniczkowania.

1. Problem: wyznaczanie stycznej do krzywej.
2. Problem: ustalanie prędkości chwilowej.
3. Iloraz różnicowy.
4. Pochodna funkcji w punkcie. Pochodna funkcji.
5. Przykłady obliczania pochodnych; reguła łańcuchowa, pochodna funkcji odwrotnej, pochodna iloczynu i ilorazu funkcji, itd.
6. Ciągłość a różniczkowalność.
7. Pochodne wyższych rzędów.
8. Reguła de l’Hospitala.
9. Zachęta do refleksji:

   (a) Jaki jest sens fizyczny wyższych pochodnych (np. dla funkcji opisującej zależność przebytej drogi od czasu)?

   (b) Czy do mówienia o różniczkowalności funkcji konieczne jest założenie aksjomatu ciągłości?

   (c) Czy istnieją funkcje, które nie mają pochodnej w żadnym punkcie?

   (d) Czy różniczkowanie jest procesem algorytmicznym?

10 Wybrane twierdzenia rachunku różniczkowego

Dwa cele tego wykładu to: podanie podstawowych twierdzeń charakteryzujących różniczkowanie oraz wskazanie zastosowań rachunku różniczkowego.

1. Przykłady problemów fizycznych.
2. Monotoniczność a pochodna.
3. Ekstrema lokalne i punkty przegięcia.
4. Twierdzenie Rolle'a.
5. Twierdzenie Lagrange'a.
6. Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego.
7. Wzór Taylora.
8. Badanie przebiegu zmienności funkcji.
9. Zachęta do refleksji:
   (a) Czy w danym przedziale funkcja może mieć tylko skończoną liczbę ekstremów lokalnych (punktów nieciągłości, punktów przegięcia, punktów, w których nie jest różniczkowalna)?
   (b) Dotąd omawiano pojęcia: granicy, ciągłości i różniczkowalności funkcji jednej zmiennej. W tym przypadku argumenty „dążą” do wybranej wielkości po „drogach” wewnątrz jednowymiarowego kontinuum. A co z funkcjami *wielu* zmiennych (np. dwóch)? Cóż miałoby znaczyć, że ciąg punktów (x_n, y_n) *dąży* do punktu (a, b)?
   (c) Skoro funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych wyznacza pewną powierzchnię, to czy istnieje odpowiednik pojęcia *stycznej* w tym przypadku?

11 Całkowanie

Wykład ma charakter wyłącznie usługowy. Wprowadza pojęcie całki Riemanna (funkcji rzeczywistej jednej zmiennej).

1. Problem: obliczanie pola powierzchni pod wykresem krzywej.
2. Funkcje pierwotne i całka nieoznaczona.

3. Funkcje schodkowe i całka Riemanna.
4. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego.
5. Przykłady fizyczne.
6. Zachęta do refleksji:
   (a) Czy całkowanie jest procesem algorytmicznym?
   (b) Jak obliczamy pole powierzchni „zakrzywionej”?
   (c) Jak obliczamy objętość bryły ograniczonej takim „zakrzywionymi” powierzchniami?
   (d) Jak obliczamy długość krzywej na takiej „zakrzywionej” powierzchni?

12 Miara i prawdopodobieństwo

Celem tego wykładu jest uświadomienie studentom, że pojęcie prawdopodobieństwa (oraz pojęcia definiowane w jego terminach) nie jest absolutne, lecz jest zależne od przyjętej wprzódy miary.

1. Proste przykłady: prawdopodobieństwo geometryczne.
2. Miara.
3. Przestrzeń probabilistyczna.
4. Aksjomaty Kołmogorowa.
5. Prawdopodobieństwo warunkowe.
6. Niezależność zdarzeń.
7. Prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa.
8. Zmienna losowa, dystrybuanta, wartość oczekiwana, wariancja, odchylenie standardowe, przykłady rozkładów.
9. Zachęta do refleksji:
   (a) Dlaczego prawa fizyki (makroskopowej) formułujemy w formie kategorycznej, a nie jedynie w formie przypuszczeń, z pewnym stopniem prawdopodobieństwa prawdziwych?
   (b) Co sprawia, że uważamy, iż potrafimy trafnie oceniać prawdopodobieństwa zdarzeń?
   (c) Czy możemy stopniować *niemożliwość*?

13 Algorytmy

Przykłady algorytmów podawane były w poprzednich wykładach. Program studiów przewiduje też osobny przedmiot poświęcony algorytmom. Wykład ze wstępu do matematyki również powinien jednak uwzględniać informacje o algorytmach.

1. Metoda efektywna. Algorytm. Przykłady.
2. Poprawność algorytmu.
3. Reprezentacje algorytmów, notacja.
4. Typy algorytmów, strategie obliczania.
5. Złożoność obliczeniowa problemów.
6. Zachęta do refleksji:
   (a) Jakie są związki algorytmów z językami programowania?
   (b) Problemy, dla których istnieją rozwiązania algorytmiczne można klasyfikować ze względu na złożoność obliczeniową. Czy problemy, dla których nie istnieją rozwiązania algorytmiczne też można jakoś klasyfikować?
   (c) Czy prawdziwość zdań arytmetycznych może być ustalana metodami algorytmicznymi?
   (d) Jakie pożytki mamy z badania zagadnień, które nie podlegają algorytmicznemu opisowi?

WSPOMNIENIA ZE SZKOŁY

14 Systemy liczbowe

Zapewne nikt ze słuchaczy nie pamięta, w jaki sposób został oswojony z liczbami naturalnymi w szkole. Podobnie, nikt z dorosłych raczej nie pamięta, w jaki sposób nauczył się tabliczek dodawania i mnożenia. Zapominamy o tych początkach łatwiej niż o początkach nauki pływania lub prowadzenia pojazdów mechanicznych. Nauki kognitywne interesują się rzecz jasna tworzeniem i przyswajaniem sobie pojęć arytmetycznych, ale o tym słuchacze dowiedzą się na innych wykładach.

Podstawowym pojęciem wpajanym uczniom przez szkołę jest *oś liczbowa*. Jest to geometryczna reprezentacja tworu arytmetycznego: uporządkowanego zbioru wszystkich liczb rzeczywistych, w którym – jako jego podzbiory – znajdują się liczby naturalne, całkowite, wymierne oraz niewymierne. Jest to w istocie przedstawienie metaforyczne, a z wyjaśnieniem trafności tej metafory poczekać musimy do dalszych wykładów. W niektórych szkołach zaznajamia się uczniów także z liczbami zespolonymi, wprowadzając pojęcie płaszczyzny zespolonej, wraz z geometryczną interpretacją działań na liczbach zespolonych.

Celem tego fragmentu niniejszej notatki jest przypomnienie tych intuicji oraz podanie charakterystyk rozważanych rodzajów liczb (a w drugiej części także przypomnienie wybranych pojęć geometrycznych) Precyzyjne definicje różnych rodzajów liczb podane zostaną nieco później.

14.1 Liczby naturalne

Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczać będziemy przez $\mathbb{N}$. *Wyobrażamy* sobie ten zbiór zwykle jako wyposażony w pewną strukturę porządkową oraz algebraiczną:

1. Zawierający początkowy element: liczbę zero.
2. Uporządkowany dyskretnie i liniowo: za każdą liczbą naturalną bezpośrednio następuje dokładnie jedna liczba naturalna.
3. Nie zawierający elementu ostatniego w tym porządku.
4. Wyposażony w operację dodawania: dla każdych dwóch liczb naturalnych możemy utworzyć ich sumę, która też jest liczbą naturalną.

5. Wyposażony w operację mnożenia: dla każdych dwóch liczb naturalnych możemy utworzyć ich iloczyn, który też jest liczbą naturalną.

Te intuicyjne wyobrażenia znajdują formalny wyraz w aksjomatycznym ujęciu arytmetyki. Wychodzimy w nim od pojęć pierwotnych:

1. liczba zero
2. operacja następnika
3. operacja dodawania
4. operacja mnożenia.

Pojęciem pierwotnym jest także *identyczność*, charakteryzowana poprzez stosowne aksjomaty.

Sposób rozumienia tych pojęć zawarty jest w przyjmowanych aksjomatach:

1. Zero nie jest następnikiem żadnej liczby.
2. Jeśli dwie liczby mają równe następniki, to są równe.
3. Zero dodane do jakiejkolwiek liczby jest równe tej liczbie (zero jest modułem dodawania).
4. Jedna liczba dodana do następnika drugiej daje w sumie następnik sumy tych liczb.
5. Następnik zera (czyli jedynka) pomnożony przez jakąkolwiek liczbę daje w wyniku tę liczbę (jedynka jest modułem mnożenia).
6. Jedna liczba pomnożona przez następnik drugiej daje w wyniku sumę, której składnikami są: iloczyn obu branych pod uwagę liczb oraz pierwsza z nich.
7. Dla dowolnej własności liczb (wyrażalnej w języku arytmetyki): jeśli zero ma tę własność oraz fakt, że jakaś liczba ma tę własność implikuje fakt, że następnik tej liczby również ma tę własność, to rozważaną własność mają wszystkie liczby naturalne.

Ostatnia na tej liście jest *zasada indukcji matematycznej*. Jak widać (w języku pierwszego rzędu), nie jest ona pojedynczym aksjomatem, lecz *schematem* nieskończenie wielu aksjomatów.

Powyższe niezbyt zgrabne stylistycznie sformułowania znajdują przejrzystą formę w zapisie symbolicznym, z którym słuchacze oswoją się podczas kursu logiki na pierwszym roku studiów, w ramach którego omówione zostaną spójniki logiczne, kwantyfikatory oraz dalsze pojęcia dotyczące zapisu symbolicznego:

1. $\forall x \neg(0 = s(x))$
2. $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \to x = y)$
3. $\forall x (0 + x = 0)$
4. $\forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$
5. $\forall x (s(0) \cdot x = x)$
6. $\forall x \forall y (x \cdot s(y) = x \cdot y + x)$
7. $(\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \to \varphi(s(x)))) \to \forall x \varphi(x)$,
   gdzie φ jest formułą języka arytmetyki o jednej zmiennej wolnej.

Liczbę zero oznaczamy przez 0, operację następnika przez s, operacje dodawania i mnożenia przez, odpowiednio: $+$ oraz $\cdot$.

Przyjmuje się oznaczenia:

1. 1 dla $s(0)$
2. 2 dla $s(s(0))$
3. 3 dla $s(s(s(0)))$
4. itd.

Na mocy Tradycji, piszemy często $x + 1$ zamiast $s(x)$.

Tak więc, $\mathbb{N}$ to zbiór, zawierający elementy: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...

UWAGA. Zaliczyliśmy do liczb naturalnych liczbę zero. Możliwe jest również inne rozwiązanie: zbiór liczb naturalnych to zbiór zawierający elementy: 1, 2, 3, 4, 5,... (a więc z pominięciem zera). Wtedy oczywiście nieco inną postać przyjmują definicje dodawania i mnożenia. Jak zobaczymy później, liczb naturalnych używa się do numerowania elementów ciągów. Jest kwestią umowy, czy w takiej numeracji zaczynamy od zera czy też jedynki.

Definiujemy relację *niewiększości*: $x \leqslant y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x + z = y$ dla pewnej liczby naturalnej z. Przez relację *mniejszości* rozumiemy relację zdefiniowaną następująco: $x < y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leqslant y$ oraz $x \neq y$. Tutaj $x \neq y$ oznacza, że x nie jest równa y.

Definiujemy relację podzielności: $x|y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \neq 0$ oraz istnieje liczba naturalna z taka, że $x \cdot z = y$. Jeśli $x|y$, to mówimy, że x *dzieli* y (lub: *y jest podzielna przez x*).

Mówimy, że x jest liczbą *pierwszą*, jeśli: $x \neq 1$ oraz dla każdej liczby naturalnej y, jeśli $y|x$, to $y = 1$ lub $y = x$. Zbiór wszystkich liczb pierwszych będziemy oznaczać przez $\mathbb{P}$.

PRZYKŁAD. Pokażemy, że dla każdej liczby x ze zbioru $\mathbb{P}$ istnieje w zbiorze $\mathbb{P}$ liczba y taka, że $x < y$.

DOWÓD. Dowód przeprowadzimy metodą *nie wprost*. Jej istota polega na tym, że pragnąc udowodnić twierdzenie A, czynimy *przypuszczenie dowodu nie wprost*, iż A nie zachodzi, czyli że zachodzi jego zaprzeczenie. Jeśli uda nam się wyprowadzić z tego parę zdań wzajem sprzecznych, to uznajemy, że przypuszczenie dowodu nie wprost należy odrzucić, a w konsekwencji przyjąć za prawdziwe samo twierdzenie A.

Przypuśćmy zatem, że w zbiorze $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych istnieje liczba największa, czyli taka, że w $\mathbb{P}$ nie istnieje większa od niej liczba. Możemy wtedy utworzyć listę wszystkich liczb pierwszych, poczynając od najmniejszej takiej liczby (czyli 2), a kończąc na rzekomo największej takiej liczbie. Niech lista ta składa się z liczb $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Mamy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, itd. Liczba p_n miałaby być największą liczbą pierwszą.

Tworzymy iloczyn $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$. Następnie tworzymy sumę:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Oczywiście p jest większa od p_n. Tak utworzona liczba p jest bądź liczbą pierwszą, bądź liczbą złożoną. Gdyby p była liczbą złożoną, to musiałaby dzielić się bez reszty przez którąś z liczb pierwszych $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, powiedzmy przez p_i ($1 \leqslant i \leqslant n$). To jednak jest niemożliwe, ponieważ wtedy p_i musiałaby dzielić oba składniki sumy tworzącej p: zarówno iloczyn $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$, jak i liczbę 1. To jest niemożliwe, ponieważ liczba 1 nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą. Jeśli p jest liczbą pierwszą, to otrzymujemy sprzeczność z przypuszczeniem, że p_n jest największą liczbą pierwszą. W konsekwencji, musimy odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost i otrzymujemy tezę twierdzenia.

Definiujemy operację potęgowania liczb naturalnych:

1. x^0=1
2. $x^{s(y)} = x^y \cdot x$.

Tak więc, na liczbach naturalnych można bez ograniczeń wykonywać operacje: dodawania, mnożenia oraz potęgowania. W ograniczonym zakresie można dokonywać odejmowania. Dysponujemy też relacją podzielności (bez reszty).

Zachodzi PODSTAWOWE TWIERDZENIE ARYTMETYKI: każda liczba naturalna ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci iloczynu kolejnych liczb pierwszych podniesionych do stosownych potęg.

PRZYKŁAD. Pokażemy, jak korzystać z zasady indukcji matematycznej w dowodzeniu twierdzeń o liczbach naturalnych.

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
2. $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

DOWÓD. Dowody, korzystające z zasady indukcji matematycznej mają następującą strukturę:

1. *Krok początkowy*. Pokazujemy, że teza twierdzenia zachodzi dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu. Najczęściej jest to liczba 0 lub liczba 1. Zdarzają się jednak dowody indukcyjne, w których krok początkowy dotyczy innej liczby naturalnej.
2. *Krok następnikowy*. Zakładamy, że teza twierdzenia zachodzi dla liczby k (czynimy *założenie indukcyjne*). Pokazujemy, że przy tym założeniu teza twierdzenia zachodzi dla liczby $k + 1$.
3. *Konkluzja*. Jeśli powodzeniem zakończyły się oba powyższe kroki, to jesteśmy uprawnieni do przyjęcia, że rozważane twierdzenie zachodzi dla *wszystkich* liczb naturalnych z rozważanego zakresu (patrz: krok początkowy).

Dowód równości $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.

Krok początkowy. Dla $k = 1$ powyższa równość sprowadza się do: $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, co jest oczywiście prawdą.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby k, czyli zakładamy, że:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}.$$

Musimy wykazać, że badany wzór zachodzi także dla $k + 1$, czyli musimy udowodnić, że:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + k) + k + 1 = \frac{(k+1) \cdot ((k+1) + 1)}{2}.$$

Na mocy założenia indukcyjnego, lewa strona tej równości jest postaci:

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + k + 1.$$

Obliczamy tę sumę:

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}.$$

Pokazaliśmy zatem, że że jeśli rozważany wzór zachodzi dla liczby k, to zachodzi także dla liczby $k+1$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

Dowód równości $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.

Krok początkowy. Dla $k = 1$ powyższa równość sprowadza się do: $2^1 = 2^{1+1} - 2$, co jest oczywiście prawdą.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby k, czyli zakładamy, że:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 2.$$

Musimy wykazać, że:

$$(2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k) + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2.$$

Na mocy założenia indukcyjnego, lewa strona tej równości jest postaci:

$$2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}.$$

Ta liczba jest oczywiście równa $2 \cdot 2^{k+1} - 2$, czyli równa $2^{k+2} - 2$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli rozważany wzór zachodzi dla liczby k, to zachodzi także dla liczby $k+1$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

Podano tu aksjomatyczną charakterystykę liczb naturalnych w języku pierwszego rzędu. Na dalszych wykładach słuchacze dowiedzą się np. jak *zdefiniować* liczby naturalne w teorii mnogości.

Oryginalna aksjomatyka dla liczb naturalnych (Giuseppe Peano, 1889) została sformułowana z użyciem pojęć: zbioru, relacji należenia elementu do zbioru, relacji identyczności, operacji następnika oraz wyróżnionego elementu początkowego. W zależności od tego, czy ów element początkowy interpretujemy jako zero czy też jako jedynkę, formułujemy odpowiednie definicje dodawania, mnożenia oraz mniejszości. Aksjomatyka ta przybiera następującą postać:

1. Element początkowy jest liczbą naturalną.

2. Element początkowy nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej.
3. Każda liczba naturalna ma dokładnie jeden następnik.
4. Jeśli dwie liczby naturalne mają ten sam następnik, to są identyczne.
5. Jeśli A jest zbiorem, którego elementem jest element początkowy, a wraz z każdym elementem zbioru A do A należy też następnik tego elementu, to zbiór A zawiera wszystkie liczby naturalne.

Ostatni aksjomat na tej liście to zasada indukcji matematycznej. Zauważmy, że w tej aksjomatyce mówimy nie tylko o liczbach naturalnych, ale również o (całkiem dowolnych!) zbiorach takich liczb.

14.2 Liczby całkowite

Liczby całkowite można charakteryzować aksjomatycznie, można też wprowadzić je tzw. metodą genetyczną. Ta druga metoda polega na *konstrukcji* liczb całkowitych przy pomocy liczb naturalnych, operacji dodawania oraz definiowaniu przez abstrakcję.

Szkoła przyzwyczaja nas do *wyobrażania* sobie zbioru wszystkich liczb całkowitych jako wyposażonego w pewną strukturę porządkową oraz algebraiczną:

1. Liczby całkowite tworzą zbiór uporządkowany *liniowo* oraz *dyskretnie*. Zachodzi prawo trychotomii dla tego porządku. Każda liczba całkowita ma dokładnie jeden bezpośredni następnik oraz dokładnie jeden bezpośredni poprzednik.
2. W porządku liczb całkowitych nie istnieje ani element największy ani element najmniejszy.
3. Liczby całkowite to: zero, liczby całkowite *dodatnie* oraz liczby całkowite *ujemne*. Z każdą liczbą całkowitą jest stowarzyszona liczba do niej *przeciwna*.
4. Na liczbach całkowitych można wykonywać operacje: dodawania, odejmowania, mnożenia. Przy tym, odejmowanie x od y rozumiane jest jako dodawanie do x liczby przeciwnej do y. Reguły dla mnożenia są przejrzyste, chociaż niektórym sprawiać może trudność *zrozumienie*, dlaczego iloczyn dwóch liczb ujemnych jest dodatni.

Konstrukcję liczb całkowitych (z liczb naturalnych) oraz definicje operacji na nich odłożymy na później, gdy poznamy stosowne fakty dotyczące zbiorów i relacji. W tym miejscu podamy jedynie pewną intuicyjną reprezentację geometryczną liczb całkowitych.

Zaznaczmy w pierwszej ćwiartce kartezjańskiego układu współrzędnych wszystkie *punkty kratowe*, czyli punkty o obu współrzędnych wyrażonych liczbami naturalnymi. Rozważamy zatem wszystkie pary elementów ze zbioru $\mathbb{N}$. Narysujmy wszystkie (pół)proste równoległe do dwusiecznej kąta między osiami współrzędnych, przechodzące przez owe punkty kratowe. Zauważmy teraz, że dwa punkty kratowe (m_1, n_1) oraz (m_2, n_2) leżą na tej samej półprostej z rozważanego zbioru półprostych dokładnie wtedy, gdy zachodzi zależność:

$$(*) \qquad m_1 + n_2 = n_1 + m_2.$$

Wszystkie punkty kratowe na każdej z osobna takiej półprostej reprezentują jakąś liczbę całkowitą. Oznaczmy zbiór wszystkich par leżących na tej samej półprostej co para (m, n) przez $[(m, n)]$. Jeśli przedłużymy oś odciętych w lewo oraz przedłużymy te półproste do przecięcia się z pełną osią odciętych, to otrzymane punkty przecięcia ukażą się nam w postaci, w której szkoła zaznaczała liczby całkowite na słynnej *osi liczbowej*.

Tak więc, każda liczba całkowita utożsamiana być może ze zbiorem par liczb naturalnych, przy czym dwie takie pary reprezentują tę samą liczbę rzeczywistą dokładnie wtedy, gdy zachodzi zależność $(*)$. Jeśli $[(m, n)]$ reprezentuje liczbę całkowitą, to liczbę do niej przeciwną reprezentuje $[(n, m)]$.

Całkowite liczby dodatnie zdefiniować można jako reprezentowane przez zbiory par o postaci $[(m, 0)]$, gdzie $m > 0$. Zbiór wszystkich par o postaci (m, m) reprezentuje liczbę zero. Całkowite liczby ujemne zdefiniować można jako reprezentowane przez zbiory par o postaci $[(0, m)]$, gdzie $m > 0$.

Bezwzględną wartość liczby całkowitej reprezentowanej przez zbiór par $[(m, n)]$ można zdefiniować następująco:

1. $|[(m, n)]| = [(m, n)]$, gdy $m \geqslant n$
2. $|[(m, n)]| = [(n, m)]$, gdy $m < n$.

Tradycja każe oznaczać liczbę przeciwną do liczby całkowitej x przez $-x$. Tak więc: $-[(m, n)]$ to $[n, m]$.

Na liczbach całkowitych można bez ograniczeń wykonywać operacje: dodawania, odejmowania, mnożenia oraz (w zakresie ograniczonym do wykładników potęg jako liczb całkowitych nieujemnych) potęgowania. Dysponujemy też relacją podzielności (bez reszty). Zachodzi Podstawowe Twierdzenie Arytmetyki.

Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać przez $\mathbb{Z}$. Liczb całkowitych jest *tyle samo*, co liczb naturalnych. Jak rozumieć wyrażenie *tyle samo* w odniesieniu do zbiorów *nieskończonych* (takich, jak właśnie $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Z}$) dowiemy się na jednym z dalszych wykładów.

14.3 Liczby wymierne

Liczby wymierne można charakteryzować aksjomatycznie, można też wprowadzić je tzw. metodą genetyczną. Ta druga metoda polega na *konstrukcji* liczb wymiernych, przy pomocy liczb całkowitych, operacji mnożenia oraz definiowaniu przez abstrakcję.

Szkoła przyzwyczaja nas do *wyobrażania* sobie zbioru wszystkich liczb wymiernych jako wyposażonego w pewną strukturę porządkową oraz algebraiczną:

1. Liczby wymierne uporządkowane są w sposób liniowy i *gęsty*. Ta druga własność oznacza, że między każdymi dwiema różnymi liczbami wymiernymi znajduje się inna liczba wymierna. W konsekwencji, między każdymi dwiema różnymi liczbami wymiernymi znajduje się *nieskończenie wiele* innych liczb wymiernych.

2. W porządku liczb wymiernych nie ma ani elementu najmniejszego ani elementu największego.

3. Na liczbach wymiernych – czyli na *ułamkach* – wykonywać można bez ograniczeń operacje: dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia (z wyjątkiem dzielenia przez zero). Działania te określone są przez stosowne warunki dotyczące *liczników* oraz *mianowników* ułamków.

Konstrukcję liczb wymiernych (z liczb całkowitych) oraz definicje operacji na nich odłożymy na później, gdy poznamy stosowne fakty dotyczące zbiorów i relacji. W tym miejscu podamy jedynie pewną intuicyjną reprezentację geometryczną liczb wymiernych.

Liczby wymierne o mianowniku dodatnim reprezentować można przez pewne zbiory par liczb całkowitych z wyłączeniem tych par, których drugim elementem jest zero. Narysujmy kartezjański układ współrzędnych. Na osi odciętych zaznaczmy elementy zbioru wszystkich liczb całkowitych. Na części dodatniej osi rzędnych zaznaczmy elementy zbioru wszystkich dodatnich liczb naturalnych. Zaznaczmy wszystkie punkty kratowe. Wykreślmy dodatkowo prostą $y = 1$ (równoległą do osi odciętych) i nazwijmy ją P. Z początku układu współrzędnych wykreślmy wszystkie możliwe półproste przechodzące przez punkty kratowe. Zauważmy, że punkty kratowe (m_1, n_1) oraz (m_2, n_2) leżą na tej samej półprostej z rozważanego zbioru półprostych dokładnie wtedy, gdy zachodzi zależność:

$$m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1.$$

Zbiór wszystkich par, które leżą na tej samej półprostej z rozważanych półprostych co para (m, n) oznaczmy przez $\langle m, n \rangle$. Każdy zbiór $\langle m, n \rangle$ reprezentuje pewną liczbę wymierną o dodatnim mianowniku. Jeśli prostą P potraktujemy jako oś liczbową, to punkty przecięcia prostej P z rozważanymi półprostymi ukażą się nam jako reprezentujące liczby wymierne na owej prostej liczbowej. Można też oczywiście rozważać rzuty prostopadłe tych punktów przecięcia na oś odciętych, co daje znaną ze szkoły reprezentację liczb wymiernych na słynnej *osi liczbowej*.

Powtórzmy, że na liczbach wymiernych można bez ograniczeń wykonywać operacje: dodawania, odejmowania, mnożenia. Dobrze określona jest również operacja dzielenia liczb wymiernych (z wyłączeniem dzielenia przez zero).

Zbiór wszystkich liczb wymiernych będziemy oznaczać przez $\mathbb{Q}$. Liczb wymiernych jest *tyle samo*, co liczb naturalnych (a więc także *tyle samo*, co liczb całkowitych).

14.4 Liczby rzeczywiste

Liczby rzeczywiste można charakteryzować aksjomatycznie, można też wprowadzić je na wiele innych sposobów. Szkoła przyzwyczaja do myślenia o liczbach rzeczywistych jako elementach *prostej liczbowej*. Każe też pamiętać, że liczby rzeczywiste zapisujemy zwykle w notacji dziesiętnej. Zapisy te mogą być: skończone, nieskończone okresowe, nieskończone nieokresowe. Zapisom pierwszych dwóch typów odpowiadają wymierne liczby rzeczywiste, trzeci typ odpowiada liczbom niewymiernym.

Nieco później podamy definicję liczb rzeczywistych metodą Cantora. Teraz natomiast podamy definicję tych liczb metodą Dedekinda. Wychodzimy w tej konstrukcji od uporządkowanego zbioru wszystkich liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, <)$. *Przekrojem Dedekinda* nazwiemy każdą parę (A, B) zbiorów liczb wymiernych taką, że:

1. A oraz B są zbiorami niepustymi.
2. Każda liczba wymierna należy do co najmniej jednego ze zbiorów A i B.
3. Każda liczba należąca do A jest mniejsza od każdej liczby należącej do B.

Rodzina wszystkich przekrojów Dedekinda zbioru liczb wymiernych to właśnie zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Docenimy tę definicję później, gdy już opowiemy o różnych typach porządków. Trzeba oczywiście zdefiniować jeszcze operacje arytmetyczne na liczbach rzeczywistych, co również uczynimy później. Oprócz znanych już operacji dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia (z wyjątkiem dzielenia przez zero) dochodzą jeszcze operacje: potęgowania, pierwiastkowania. Często wykorzystywane będą również: funkcja wykładnicza oraz logarytmiczna.

Stosunkowo prosta pojęciowo jest definicja *liczb rzeczywistych Hoborskiego*. Ciąg h_n nazywamy *nieujemną liczbą rzeczywistą Hoborskiego*, gdy istnieje ciąg c_n taki, że:

1. $h_0 = c_0$ jest elementem zbioru $\mathbb{N}$
2. $h_{n+1} = h_n + \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}}$, gdzie c_{n+1} jest liczbą naturalną niewiększą od 9.
3. nie istnieje liczba naturalna k taka, że $c_i = 9$ dla wszystkich $i > k$.

O liczbach Hoborskiego można poczytać np. w pracy Słupecki, J., Hałkowska, K., Piróg-Rzepecka, K. 1980. *Elementy arytmetyki teoretycznej*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa (str. 156–163).

W nieujemnych liczbach rzeczywistych Hoborskiego słuchacze z łatwością rozpoznają nieujemne liczby rzeczywiste jako reprezentowane przez rozwinięcia dziesiętne o postaci $c_0, c_1c_2c_3\ldots$. Każda nieujemna liczba rzeczywista Hoborskiego jest zbieżnym ciągiem liczb wymiernych. Porównamy później konstrukcję Hoborskiego z konstrukcją Cantora liczb rzeczywistych. Jako wyzwanie intelektualne proponujemy słuchaczom próbę podania definicji *niedodatnich liczb rzeczywistych Hoborskiego*.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych będziemy oznaczać przez $\mathbb{R}$. Przyjmujemy, że na razie słuchaczom wystarcza intuicyjna wiedza o liczbach rzeczywistych, wyniesiona ze szkoły. Liczb rzeczywistych ***nie*** jest *tyle samo*, co liczb naturalnych. Także to określenie zostanie później precyzyjnie zdefiniowane.

Uniwersum liczb rzeczywistych będzie w tym kursie najczęściej używaną strukturą. W szczególności, rozważać będziemy wielość funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych.

14.5 Liczby zespolone

Liczby zespolone można charakteryzować aksjomatycznie, można też wprowadzić je na wiele innych sposobów. Stosunkowo prosty jest sposób podany przez Hamiltona. W tej reprezentacji liczby zespolone traktowane są jako pary liczb rzeczywistych. Działania arytmetyczne dodawania $\oplus$ oraz mnożenia $\otimes$ zdefiniowane są następująco (poprzez operacje dodawania, odejmowania i mnożenia liczb rzeczywistych):

1. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$

2. $(a, b) \otimes (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$.

Liczby rzeczywiste utożsamiać można z liczbami zespolonymi o postaci $(a, 0)$. Wprowadza się oznaczenie $i = (0, 1)$. Wtedy $i^2 = (0, 1) \otimes (0, 1) = (-1, 0)$. Liczby zespolone o postaci (a, b) zwykło się zapisywać w formie $a + b \cdot i$.

W interpretacji geometrycznej przedstawia się liczby zespolone na *płaszczyźnie zespolonej*. Narysujmy kartezjański układ współrzędnych. Na osi odciętych jednostką jest 1, na osi rzędnych jednostką jest i. Liczbę zespoloną $z = a + bi$ interpretujemy jako punkt na tej płaszczyźnie o współrzędnych (a, b). Połączmy odcinkiem punkt (a, b) z początkiem układu współrzędnych $(0, 0)$. Niech odcinek ten tworzy z osią odciętych kąt φ. Długość tego odcinka wynosi $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Liczbę tę nazywamy *modułem* liczby zespolonej $z = a + bi$ i oznaczamy przez $|z|$. Liczbą *sprzężoną* z liczbą $z = a + bi$ jest liczba $\overline{z} = a - bi$.

Jeśli $z = a + bi$, to a nazywamy częścią *rzeczywistą* liczby z (oznaczaną przez $Re(z)$), zaś b jej częścią *urojoną* (oznaczaną przez $Im(z)$). Zauważmy, że dla $z = a + bi$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ oraz φ określonego wyżej mamy:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Jest to przedstawienie liczby zespolonej z we współrzędnych *biegunowych*.

Dodawanie oraz mnożenie liczb zespolonych przyjmuje szczególnie prostą postać w powyższej geometrycznej interpretacji. Szczegóły zostaną podane później.

Zbiór wszystkich liczb zespolonych będziemy oznaczać przez $\mathbb{C}$. Liczb zespolonych ***nie*** jest *tyle samo*, co liczb naturalnych. Liczb zespolonych jest *tyle samo*, co liczb rzeczywistych.

Zachodzi PODSTAWOWE TWIERDZENIE ALGEBRY: każdy wielomian zespolony (różny od stałej) ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Liczby *algebraiczne* to te liczby zespolone, które są pierwiastkami wielomianów o współczynnikach wymiernych. Zbiór wszystkich liczb algebraicznych będziemy oznaczać przez $\mathbb{A}$. Można oczywiście rozważać tylko liczby algebraiczne, które są liczbami rzeczywistymi. Liczb algebraicznych jest *tyle samo*, co liczb naturalnych.

Liczbami algebraicznymi są oczywiście wszystkie liczby wymierne. Liczbami algebraicznymi są też, m.in.:

1. Pierwiastki kwadratowe z liczb rzeczywistych.

2. Liczby całkowite Gaussa, czyli zespolone o postaci $a + bi$, gdzie a raz b są liczbami całkowitymi.

3. Złota liczba $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (jest ona jednym z pierwiastków wielomianu $x^2 - x - 1$).

Liczby, które nie są algebraiczne, nazywamy *przestępnymi*. Przykłady liczb przestępnych:

1. Liczba π, wyrażająca stosunek długości okręgu do jego średnicy. Znana ze szkoły.
2. Liczba e, podstawa logarytmów naturalnych. Być może znana ze szkoły; jej definicję i własności poznamy później.
3. Stała Liouville'a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$.

14.6 Zachęta do refleksji

1. Czy mówienie o liczbach nieskończenie dużych lub nieskończenie małych ma sens?
2. Na jakich obiektach wolno wykonywać operacje arytmetyczne?
3. Czy istnieją jeszcze jakieś inne rodzaje liczb, oprócz wyżej wymienionych?
4. Czy w zbiorze $\mathbb{P}$ występują jakieś *regularności*?
5. Zastanów się, jak *wyobrażasz* sobie zbiory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{P}$. Jaki masz *dostęp poznawczy* do elementów tych zbiorów?
6. Niech zapis $X \subseteq Y$ oznacza, że zbiór X jest *zawarty* w zbiorze Y (czyli: każdy element zbioru X jest też elementem zbioru Y). W szkole podawano następujący ciąg zawierań:

   $$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

   Czy te zawierania nie kłócą się z podanymi wyżej charakterystykami poszczególnych rodzajów liczb?

15 Pojęcia geometryczne

Przypominamy wybrane pojęcia geometryczne, z którymi słuchacze zapoznali się w edukacji szkolnej. Tradycyjny szkolny wykład geometrii zawiera następujące działy:

1. *Planimetria*: zajmuje się figurami geometrycznymi na płaszczyźnie.

2. *Trygonometria*: zajmuje się stosunkami miarowymi w trójkątach i innych figurach.

3. *Stereometria*: zajmuje się bryłami w przestrzeni.

4. *Geometria analityczna*: ujmuje twory geometryczne na sposób algebraiczny.

Trzy pierwsze z tych działów nawiązują do systemu geometrii Euklidesa, czwarty do systemu Kartezjusza.

15.1 Geometria Euklidesa

Dzieło Euklidesa *Elementy* było przez wieki podstawą nauczania matematyki. Stanowiło też wzorzec uprawiania matematyki: dowodzi się twierdzeń, wychodząc od pewnych założeń, które charakteryzują pojęcia pierwotne. Wszystkie pozostałe pojęcia otrzymują jednoznaczne, precyzyjne definicje. W wieku XIX dokonano logicznej rekonstrukcji tego systemu geometrii, a w wieku XX podano jej bardziej nowoczesne wersje.

Pojęciami pierwotnymi w tym systemie są: punkt, prosta, płaszczyzna. W pierwszej księdze *Elementów* podaje się: DEFINICJE, POSTULATY oraz POJĘCIA WSPÓLNE. Podajemy je za nowoczesnym tłumaczeniem *Elementów*, dokonanym przez Piotra Błaszczyka i Kazimierza Mrówkę[1]:

DEFINICJE

1. Punkt jest tym, co nie ma części.

2. Linia zaś to długość bez szerokości.

3. Krańcami zaś linii są punkty.

4. Linia prosta jest tym, co leży równo względem punktów na niej.

5. Powierzchnia zaś jest tym, co ma tylko długość i szerokość.

6. Krańcami zaś powierzchni są linie.

7. Powierzchnia płaska to ta, która leży równo względem prostych na niej.

[1]Piotr Błaszczyk, Kazimierz Mrówka: *Euklides. Elementy. Księgi V–VI. Teoria proporcji i podobieństwa. Tłumaczenie i komentarz*. Copernicus Center Press, Kraków 2013, 273–275.

8. Kąt płaski zaś to wzajemne nachylenie linii, gdy dwie linie na płaszczyźnie dotykają jedna drugiej i nie są położone na linii.
9. Gdy zaś linie obejmujące kąt są proste, to kąt jest prostoliniowy.
10. Gdy zaś prosta stoi na prostej tak, że kąty przyległe są równe jeden drugiemu, to każdy z równych kątów jest prosty i ta pierwsza linia jest nazywana prostopadłą do tej, na której stoi.
11. Kąt rozwarty to ten, który jest większy niż prosty.
12. Ostry zaś to ten mniejszy niż prosty.
13. Ograniczenie jest tym, co jest krańcem.
14. Figura jest tym, co jest objęte przez pewną lub pewne granice.
15. Koło jest figurą płaską ograniczoną jedną linią [nazywaną obwodem] i wszystkie proste wychodzące z jednego punktu leżącego we wnętrzu tej figury są równe jedna drugiej.
16. Punkt zaś jest nazywany centrum koła.
17. Średnica zaś koła jest pewną prostą poprowadzoną przez centrum i ograniczoną w każdej z dwóch części przez obwód koła; taka także przecina koło na pół.
18. Półkole zaś jest figurą objętą przez średnicę i obwód odcięty przez nią. Centrum zaś półkola jest tym samym co koła.
19. Figury prostoliniowe to te, które są objęte przez proste, z jednej strony trójboczne to te objęte przez trzy proste, z drugiej zaś czteroboczne przez cztery, wieloboczne zaś przez więcej niż cztery.
20. O figurach trójbocznych zaś, z jednej strony trójkątem równobocznym jest ten mający trzy równe boki, z drugiej zaś równoramiennym ten mający tylko dwa równe boki, różnobocznym zaś ten mający trzy nierówne boki.
21. Dalej zaś o figurach trójbocznych, z jednej strony trójkątem prostokątnym jest ten mający kąt prosty, z drugiej zaś rozwartokątnym ten mający kąt rozwarty, ostrokątnym zaś ten mający trzy kąty ostre.
22. O figurach czterobocznych zaś, z jednej strony, kwadrat jest tym, co równoboczne i prostokątne, z drugiej zaś prostokąt tym, co jest prostokątne, ale

nie równoboczne; z jednej strony romb tym, co równoboczne, ale nie prostokątne, z drugiej zaś romboid tym mającym przeciwne boki i kąty równe jeden drugiemu, ale nie jest ani równoboczny, ani prostokątny. Niech zaś czteroboki inne niż te będą nazywane trapezami.

23. Równoległe to proste, które będąc na tej samej płaszczyźnie oraz będąc przedłużane w nieskończoność w każdej z dwóch części, nie spotkają jedna drugiej.

Postulaty

1. Niech będzie postulowane, aby z każdego punktu do każdego punktu poprowadzić linię prostą.
2. I przedłużyć ograniczoną prostą w sposób ciągły na prostej.
3. Z danego centrum i danym promieniem zakreślić koło.
4. Kąty proste są równe jeden drugiemu.
5. Gdy prosta, padając na dwie inne proste, tworzy kąty wewnętrzne na tej samej części mniejsze dwóm kątom prostym, to te dwie proste przedłużane nieskończenie dotkną się na tej części, na której są mniejsze dwóm kątom prostym.

Pojęcia Wspólne

1. Równe tej samej są równe jedna drugiej.
2. I gdy równe są dodane do równych, to całości są równe.
3. I gdy równe są odjęte od równych, to pozostałości są równe.
4. I gdy nierówne są dodane do równych, to wszystkie będą nierówne.
5. I podwojenia tej samej są równe jedna drugiej.
6. I połowy tej samej są równe jedna drugiej.
7. I nakładające się są równe jedna drugiej.
8. I całość jest większa od części.
9. I dwie proste nie obejmują przestrzeni.

Słuchacze zechcą porównać powyższe sformułowania z tym, co pamiętają ze szkoły. Proszę też zastanowić się, jak sformułowania te mają się do intuicyjnych wyobrażeń, opartych na doświadczeniu potocznym.

Szkoła przyzwyczaja do tego, że rozważania geometryczne prowadzimy z wykorzystaniem pojęcia *odległości*. Tak więc, w szkole naucza się *metrycznej geometrii euklidesowej*.

Zakładamy, że słuchacze zachowali w pamięci co najmniej wyobrażenia (a może nawet ścisłe definicje) podstawowych płaskich figur geometrycznych, takich jak: trójkąt, prostokąt, kwadrat, równoległobok, trapez, romb, koło. Znajomość stosownych wzorów, dotyczących obwodu i pola tych figur będzie przydatna.

Zakładamy, że słuchacze zachowali w pamięci co najmniej wyobrażenia (a może nawet ścisłe definicje) podstawowych brył, takich jak: kula, stożek, walec, ostrosłup, graniastosłup. Znajomość stosownych wzorów, dotyczących pola powierzchni i objętości tych brył będzie przydatna.

Będziemy również wykorzystywać niektóre podstawowe twierdzenia geometrii oraz pojęcia, wzory i twierdzenia trygonometrii.

15.2 Geometria analityczna

Geometria Kartezjusza do dzisiaj ma istotny wpływ na nauczanie matematyki.[2] W dziele tym po raz pierwszy konsekwentnie połączono twory geometryczne z wyrażeniami algebraicznymi, je charakteryzującymi. Szkoła przyzwyczaja do myślenia o uniwersum geometrycznym jako przestrzeni kartezjańskiej, wyposażonej w *układ współrzędnych*.

Zakładamy, że słuchacze zachowali w pamięci równania opisujące podstawowe twory geometryczne na płaszczyźnie i w przestrzeni, np. równania: prostej, okręgu, paraboli, elipsy, hiperboli. Przydatne będą też umiejętności operowania wektorami.

Oprócz prostej rzeczywistej, podstawowymi uniwersami będą płaszczyzna kartezjańska oraz kartezjańska przestrzeń trójwymiarowa.

15.3 Współczesne poglądy na geometrię

Współczesna matematyka rozpoczyna się w wieku XIX. Wtedy też rozważania geometryczne przyjmują całkiem nową postać. Składa się na to kilka faktów:

1. Odkrycie geometrii nieeuklidesowych: Gauss, Bolyai, Łobaczewski.
2. Rozwój geometrii rzutowej: Chasles, Poncelet.

[2] Piotr Błaszczyk, Kazimierz Mrówka: *Kartezjusz. Geometria. Tłumaczenie i komentarz*. Towarzystwo Autorów i Wydawców Prac Naukowych UNIVERSITAS, Kraków 2015.

3. Rozważanie przestrzeni wielowymiarowych: Riemann.

4. Ogłoszenie Programu z Erlangen: Klein.

5. Aksjomatyki dla geometrii: Pasch, Peano, Pieri, Hilbert, Veblen.

Najbardziej rozpowszechnioną aksjomatyką był system podany w 1899 roku przez Davida Hilberta w jego dziele *Grundlagen der Geometrie*. Aksjomatykę dla geometrii podał prawie sto lat temu również Alfred Tarski, który udowodnił także szereg ważnych własności tego systemu.

Współcześnie rozważania geometryczne należą do wielu wyspecjalizowanych działów matematyki, które powstały na styku geometrii z algebrą, analizą, teorią liczb, topologią.

15.4 Zachęta do refleksji

1. W geometrii analitycznej znanej ze szkoły używa się liczb rzeczywistych. Czy można badania geometryczne opierać na wykorzystaniu innych rodzajów liczb?

2. Jak różni się to, co *widzisz* od tego, co opisuje geometria Euklidesa?

3. Czy można oprzeć rozważania geometryczne na pojęciach bliższych doświadczeniu (np.: obszar, bryła) zamiast na abstrakcyjnych pojęciach punktu, prostej, płaszczyzny?

PRZYKŁADY

16 Dla uciechy

Rozważmy teraz garść przykładów, które mają ukazać skuteczność i nieodzowność stosowania metod matematycznych w rozwiązywaniu problemów. Przykłady wzięliśmy z naszego wykładu fakultatywnego *Zagadki*, prowadzonego dla dalszych lat studiów, a pochodzą one z różnych źródeł wymienionych w bibliografii owego wykładu.[3] Rozwiązania będą dyskutowane podczas dalszych wykładów.

16.1 Liczba i wielkość

1. *Wiek dzieci*. Wyobraź sobie następujący dialog:

   – Ile lat mają twoje dzieci?

   – Mam trójkę dzieci, iloczyn ich lat wynosi 36.

   – To nie wystarcza dla ustalenia wieku każdego z nich!

   – Suma ich lat równa jest liczbie okien w kamienicy naprzeciwko.

   – To też nie wystarcza!

   – Najstarsze ma zeza.

   – No, wreszcie! Teraz już wiem, ile lat ma każde z trójki.

   Ile lat ma każde z dzieci?

2. *Butelka z korkiem*. Butelka z korkiem kosztuje $1,10$ zł. Butelka jest o złotówkę droższa od korka. Ile kosztuje butelka, a ile korek?

3. 17 *koni*. Ojciec zostawia w spadku trzem synom 17 koni, życząc sobie, aby spadek podzielono (wedle starszeństwa) w stosunku: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$, a przy tym oczywiście nie wolno dzielić koni na kawałki. Czy można wypełnić ostatnią wolę konającego?

16.2 Kształt i przestrzeń

1. *Trzy ortogonalne walce*. Mark Haddon w *Dziwnym przypadku psa nocną porą* opowiada o autystycznym chłopcu, który dla rozrywki i uspokojenia rozwiązywał w pamięci wcale niełatwe zadania matematyczne. Pewnego razu wyobraził sobie trzy wzajem ortogonalne walce o promieniu 1 każdy

[3] Strona internetowa wykładu: http://logic.amu.edu.pl/index.php/Zagadki2016

(powiedzmy, trzy walce dookoła osi współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej) i z zadowoleniem ujrzał bryłę, będącą ich częścią wspólną. Czy potrafisz opisać kształt tej bryły?

2. *Precelek*. Czy można (bez rozrywania i sklejania) przekształcić precelek (powiedzmy, z plasteliny) w kształcie ósemki w precelek, w którym jedno z kółek tworzących ową ósemkę przewleczone będzie przez drugie?

3. *Zlepianie brył*. Rozważmy dwie bryły: czworościan foremny o boku długości a oraz ostrosłup o podstawie kwadratowej, boku podstawy równym a oraz długości krawędzi łączących wierzchołki podstawy z wierzchołkiem ostrosłupa także równej a. Przypuśćmy teraz, że zlepiamy te bryły w ten sposób, że ścianę czworościanu zlepiamy (utożsamiamy) z jedną z trójkątnych ścian ostrosłupa. Jakim wielościanem jest powstała bryła – ile ma ścian, wierzchołków, krawędzi?

16.3 Ruch i zmiana

1. *Mrówka*. Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Mamy doskonale (nieskończenie) elastyczną linę o długości, powiedzmy, 1km. Lina rozciąga się z jednostajną prędkością 1km/sec. Tak więc, traktując lewy koniec liny jako nieruchomy, jej prawy koniec oddala się od lewego właśnie z jednostajną prędkością 1km/sec: po jednej sekundzie lina ma 2km długości, po dwóch sekundach 3km długości, itd. Z lewego końca liny startuje mała mrówka, poruszając się wzdłuż liny ze stałą prędkością (względem samej liny), powiedzmy, 1cm/sec. Pytanie: czy mrówka dotrze do prawego końca liny w skończonym czasie, czy też będzie dreptała w nieskończoność, nigdy nie docierając do prawego końca liny?

2. *Drabina*. Drabina o długości L opiera się górnym końcem o pionową ścianę, a jej dolny koniec spoczywa na poziomie gleby. Drabina tworzy z poziomem gleby kąt ostry α. Przypuśćmy, że dolny koniec drabiny porusza się (jest ciągnięty) po poziomie gleby z jednostajną prędkością v. Z jaką prędkością górny wierzchołek drabiny uderzy w poziom gleby?

3. *Wilk, koza, kapusta*. Rybak ma przewieźć na drugi brzeg rzeki wilka, kozę i kapustę. Łódka może zabrać oprócz niego samego tylko jedno z pozostałych. Jak tego dokonać, aby nie zostawiać wilka samego z kozą, a kozy samej z kapustą?

16.4 Wzorce i struktury

1. *Woda–gaz–prąd*. Każdy z trzech domów należy zaopatrzyć w: wodę, gaz oraz elektryczność. Czy możliwe jest wykonanie tego zadania przy założeniu, że połączenia między dostawcami a domami muszą przebiegać na poziomie gruntu, ale nie mogą się krzyżować?

2. *Wspólna droga*. Cztery miejscowości leżące w wierzchołkach kwadratu należy połączyć siecią dróg w ten sposób, aby ich łączna długość była minimalna.

3. *Podstępny ciąg*. Pierwsze cztery wyrazy ciągu, w którym występuje pewna regularność to: 2, 4, 8, 16. Jaki może (powinien, musi) być piąty element tego ciągu, aby ta regularność została zachowana?

16.5 Algorytm

1. *Problem Józefa Flawiusza*. Ustawiamy n osób na okręgu, numerując je liczbami od 1 do n (dla ustalenia uwagi, w porządku zgodnym z ruchem wskazówek zegara). Zaczynając liczyć od osoby 1, eliminujemy co drugą z tych osób (okrutny sposób eliminacji pozostawiamy do wyboru czytelnikowi), dopóki nie pozostanie tylko jedna osoba. Znaleźć pozycję, którą trzeba zająć, aby uniknąć eliminacji.

2. *Kameleony*. Na wyspie mieszkają trzy typy kameleonów: 10 jest brązowych, 14 szarych, a 15 czarnych. Gdy spotkają się dwa kameleony różnych kolorów, to oba zmieniają barwę na trzeci kolor. Czy jest możliwe, aby wszystkie kameleony uzyskały jeden kolor? Oczywiście wykluczamy eksterminację kameleonów.

3. *Muszkieterowie na moście*. Czterech muszkieterów chce przeprawić się przez most nocą mając tylko jedną świeczkę, która jest niezbędna dla bezpiecznego przejścia przez most. Potrzebują na przejście odpowiednio: Atos 1 minutę, Aramis 2 minuty, D'Artagnan 5 i Portos 10 minut. Most jest słaby i na raz mogą przejść tylko 2 osoby, a kiedy idą w parze szybszy idzie z prędkością wolniejszego. Jaki jest najkrótszy czas przeprawy?

16.6 Szansa

1. *Monty Hall*. Mam trzy pudełka, dokładnie w jednym z nich jest nagroda, pozostałe są puste. Ja wiem, w którym jest nagroda, ty nie. Chcesz dostać tę nagrodę. Gra odbywa się w dwóch ruchach. W pierwszym masz wybrać

pudełko. Gdy to uczynisz, pokazuję ci, że jedno z pozostałych pudełek jest puste. W drugim ruchu masz podjąć decyzję co jest bardziej korzystne w celu uzyskania nagrody:

(a) Pozostać przy pierwotnym wyborze.

(b) Zmienić swój pierwszy wybór.

A może wystarczy rzucić monetą, aby dokonać wyboru?

2. *Paradoks Bertranda*. Wybieramy losowo cięciwę okręgu o promieniu długości 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

3. *Rosyjska ruletka*. Ty i twój przeciwnik zgadzacie się zagrać w rosyjską ruletkę. W rewolwerze jest jedna kula, pięć pozostałych komór jest pustych. Rewolwer jest ustawiany losowo za każdym razem – nie wiadomo, czy oddany z niego strzał jest śmiertelny czy ślepy. Każdy z was strzela do siebie, robicie to na przemian, wygrywa ten, który przeżyje. Czy lepiej strzelać jako pierwszy czy jako drugi?

16.7 Paradoks

1. *Twierdzenie Banacha-Tarskiego*. To twierdzenie głosi, że kulę można podzielić na skończoną liczbę części, a następnie złożyć z tych części *dwie* kule, z których każda ma objętość równą kuli wyjściowej. Mając zatem np. trochę ryb i chleba oraz licznie zgromadzoną publiczność możesz, wykorzystując to twierdzenie uzyskać efekty trwające przez tysiąclecia.

2. *Lampa Thomsona*. Lampa ta działa w sposób następujący. Świeci, gdy jest włączona, nie świeci, gdy jest wyłączona. W momencie $t = 0$ jest włączona, w momencie $t = 1$ jest wyłączona, w momencie $t = \frac{3}{2}$ jest włączona, w momencie $t = \frac{7}{4}$ jest wyłączona, itd. Nie jest istotne, w jakich jednostkach mierzymy czas – powiedzmy, że będą to minuty. Tak więc, lampa świeci przez minutę, potem przez pół minuty nie świeci, potem przez ćwierć minuty świeci, potem przez jedną ósmą minuty nie świeci, itd. Czy w czasie $t = 2$ lampa świeci czy nie?

3. *Paradoks Berry'ego*. Rozważmy najmniejszą liczbę (naturalną), która nie może zostać zdefiniowana z użyciem mniej niż stu słów. W zbiorze wszystkich liczb, które nie mogą zostać zdefiniowane z użyciem mniej niż stu słów istnieje oczywiście liczba najmniejsza. Ale właśnie zdefiniowaliśmy ją z użyciem mniej niż stu słów. Paradoks?

16.8 Logika

1. *Kto jest na portrecie?* Pewien człowiek przygląda się czyjemuś portretowi. Zapytany *Czyjemu portretowi się przyglądasz?* odpowiada: *Nie mam braci ani sióstr, ale syn tego człowieka jest synem mojego ojca*. Czyjemu portretowi się przygląda?

2. *Dziecko*. Czy z tego, że *Każdy kocha moje dziecko* oraz *Moje dziecko kocha tylko mnie* wynika, że *Jestem swoim własnym dzieckiem*?

3. *Przepis na nieśmiertelność*. Gdy zastanowić się głębiej, trudno orzec, dlaczego nieśmiertelność uważana jest za wartość pozytywną. Mniejsza z tym, niech każdy trudzi się nad problemem nieśmiertelności we własnym sumieniu. Dla tych, którzy jej pożądają podajemy (za Raymondem Smullyanem) prosty przepis na to, aby stać się nieśmiertelnym. Wystarczy, że spełnisz następujące dwa warunki:

   (a) Będziesz zawsze mówiła prawdę.

   (b) Wypowiesz (teraz) zdanie: *Powtórzę to zdanie jutro*.

   Skoro to takie proste, to dlaczego (żądni nieśmiertelności) ludzie nie postępują wedle tego przepisu? A może przepis jest zły? Co sądzisz?

Pozycje zalecane

1. Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. 2002. *Matematyka konkretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

2. Musielak, H., Musielak, J. 2004. *Analiza matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

3. Rasiowa, H. 1968. *Wstęp do matematyki współczesnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

4. Reinhardt, F., Soeder, H. 2003. *Atlas matematyki*. Prószyński i S-ka, Warszawa.