# MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI
## ZALICZENIE WYKŁADU: 10.II.2021
### KOGNITYWISTYKA UAM, 2020–2021

**Imię i nazwisko:**................ MRÓWECZKA KROPECZKA

**1**. [3 punkty] Wyznacz elementy minimalne, maksymalne, największy i najmniejszy w zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ o parzystej liczbie elementów uporządkowanym częściowo przez relację inkluzji zwykłej.

**2**. [4 punkty] (a) Co to znaczy, że relacja $R$ na zbiorze $X$ jest antysymetryczna? (b) Podaj przykład relacji, która ma tę własność i relacji, która jej nie ma. (c) Rozstrzygnij czy relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem: $xRy$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x - y| \leqslant 1$ ma tę własność.

**3**. [4 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów: $C - (A' \cap B') = (C - A') \cap (C - B')$. Tu $X'$ oznacza dopełnienie $X$.

**4**. [4 punkty] Wyznacz pochodną funkcji: $f(x) = \sqrt{2x} \cdot e^{\sqrt{x}}$.

**5**. [5 punktów] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i przeprowadź dowód:

1. Udowodnij, że zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez $6$ jest nieskończony w sensie Dedekinda.

2. Udowodnij przez indukcję matematyczną, że:
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

| Liczba punktów | Ocena |
|---|---|
| $< 11$ | 2 |
| 11–12 | 3 |
| 13–14 | 3+ |
| 15–16 | 4 |
| 17–18 | 4+ |
| 19–20 | 5 |

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

# ROZWIĄZANIA

MRÓWECZKA KROPECZKA

**1**. Zbiór $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ ma pięć elementów. Pytamy o jego podzbiory o parzystej liczbie elementów. Takimi zbiorami są: zbiór pusty, wszystkie podzbiory dwuelementowe i wszystkie podzbiory czteroelementowe. Ponieważ zbiór pusty jest zawarty w każdym zbiorze, więc jest on w tym przypadku elementem najmniejszym względem inkluzji w rozważanym zbiorze podzbiorów o parzystej liczbie elementów. W konsekwencji, jest to też element minimalny. Czteroelementowe podzbiory zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ są w tym przypadku elementami maksymalnymi względem inkluzji w rozważanym zbiorze podzbiorów o parzystej liczbie elementów. Są to zbiory:

$\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \maltese\}$, $\{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \maltese\}$, $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$, $\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$.

Ponieważ w rozważanym przypadku mamy więcej niż jeden element maksymalny względem inkluzji, więc wśród podzbiorów zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ o parzystej liczbie elementów nie ma elementu największego względem inkluzji.

Dwuelementowe podzbiory rozważanego zbioru nie są ani elementami minimalnymi (bo każdy z nich zawiera zbiór pusty), nie są też elementami maksymalnymi (ponieważ każdy zbiór dwuelementowy zawiera się w którymś z wyżej wymienionych zbiorów czteroelementowych). Zbiorów dwuelementowych jest tutaj $\binom{5}{2} = 10$. Wszystkich podzbiorów zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ o parzystej liczbie elementów jest razem $1+5+10 = 16$, natomiast wszystkich podzbiorów tego zbioru jest $2^5 = 32$.

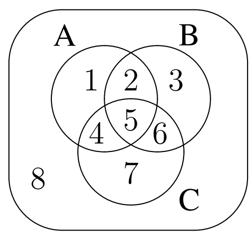
**2**. (a) Relacja $R$ na zbiorze $X$ jest antysymetryczna, gdy dla wszystkich $x \in X$ i $y \in X$: jeśli $xRy$ oraz $yRx$, to $x = y$.

(b) Dla przykładu, relacja $\leqslant \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest antysymetryczna: jeśli $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, to $x = y$. Antysymetryczne są również: relacja inkluzji zwykłej oraz relacja podzielności. Nie jest antysymetryczna np. relacja zachodząca między figurami geometrycznymi (np. trójkątami) wtedy i tylko wtedy, gdy figury te mają równe pola (podobnie dla relacji posiadania tej samej długości obwodu).

(c) Relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem: $xRy$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x - y| \leqslant 1$ nie jest antysymetryczna, ponieważ istnieją $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$ takie, że $|x - y| \leqslant 1$ oraz $|y - x| \leqslant 1$, a mimo to nie zachodzi $x = y$. Dla przykładu, $|1 - 2| \leqslant 1$ i $|2 - 1| \leqslant 1$, ale $1 \neq 2$.

**3**. Znalezienie kontrprzykładu dla równości $C-(A'\cap B')=(C-A')\cap(C-B')$ polega na podaniu takich zbiorów $A$, $B$ i $C$, że wynik operacji po lewej stronie tej równości nie będzie tożsamy z wynikiem operacji po prawej stronie.

Można narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości. Jeśli wynik wykonanych operacji po lewej stronie nie będzie tożsamy z wynikiem operacji wykonanych po prawej stronie, to podane zbiory stanowią kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.




W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A=\{1,2,4,5\}$, $B=\{2,3,5,6\}$, $C=\{4,5,6,7\}$
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po lewej stronie równości:
$A'=\{3,6,7,8\}$
$B'=\{1,4,7,8\}$
$A'\cap B'=\{7,8\}$
$C-(A'\cap B')=\{4,5,6\}$
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po prawej stronie równości:
$A'=\{3,6,7,8\}$
$B'=\{1,4,7,8\}$
$C-A'=\{4,5\}$
$C-B'=\{5,6\}$
$(C-A')\cap(C-B')=\{5\}$
Widzimy zatem, że:
$C-(A'\cap B')=\{4,5,6\}\neq\{5\}=(C-A')\cap(C-B')$.

Podane zbiory $A$, $B$ i $C$ stanowią zatem kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.

**4**. Obliczając pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{2x} \cdot e^{\sqrt{x}}$ korzystamy ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji oraz wzoru na pochodną funkcji złożonej (ponieważ $\sqrt{2x}$ jest funkcją złożoną):

$(\sqrt{2x} \cdot e^{\sqrt{x}})' = (\sqrt{2x})' \cdot e^{\sqrt{x}} + \sqrt{2x} \cdot (e^{\sqrt{x}})' =$
$\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2x}} \cdot e^{\sqrt{x}} + \sqrt{2x} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} =$
$e^{\sqrt{x}} \cdot (\frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{2x}}{2 \cdot \sqrt{x}}) = e^{\sqrt{x}} \cdot (\frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2x}} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}$.

**5.1**. Zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez $6$ to zbiór: $X = \{6 \cdot n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 6, 12, 18, 24, \ldots\}$. Niech $Y = \{6 \cdot m : m \in X\}$. Wtedy $Y = \{0, 36, 72, 108, 144, \ldots\}$ i oczywiście $Y \subseteq X$. Zbiór $Y$ jest ponadto podzbiorem właściwym $X$, ponieważ np. $6 \in X - Y$. Funkcja $f : X \to Y$ zdefiniowana warunkiem $f(x) = 6 \cdot x$ przekształca zbiór $X$ na cały zbiór $Y$, czyli każdemu elementowi zbioru $X$ odpowiada jakiś element zbioru $Y$. Funkcja ta jest wzajemnie jednoznaczna, ponieważ jeśli $m \neq n$, to $6 \cdot m \neq 6 \cdot m$, czyli $f(m) \neq f(m)$. Widać zatem, że funkcja $f$ jest bijekcją między zbiorami $X$ i $Y$. Ponieważ $Y \subset X$, więc $X$ jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym, czyli $X$ jest zbiorem nieskończonym w sensie Dedekinda.

**5.2**. Dowód indukcyjny tego, że: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$ przebiega następująco.

*Krok początkowy*. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest $1$. Dla $k = 1$ lewa strona rozważanej równości ma wartość $1$, a prawa jest równa: $\frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$, a zatem równość zachodzi dla $k = 1$.

*Krok następnikowy*. Czynimy założenie indukcyjne dla $k \geqslant 1$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4}$. Mamy udowodnić, że przy tym założeniu zachodzi: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$. Rozważmy lewą stronę tej równości. Na mocy założenia indukcyjnego: $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3) + (k+1)^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3$. Obliczamy: $\frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4 \cdot (k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4 \cdot (k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4 \cdot k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4}$, to $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$, czyli krok następnikowy został udowodniony.

*Konkluzja*. Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważana nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.