MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

WYKŁAD 4: KOMBINATORYKA. CIĄGI LICZBOWE. SKOŃCZONE PRZESTRZENIE PROBABILISTYCZNE.

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl
DOROTA LESZCZYŃSKA-JASION
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
dorotale@amu.edu.pl

1 Kombinatoryka

Zagadnienia kombinatoryczne dotyczą zliczania obiektów. Przy tym, przez *obiekt* rozumiemy tutaj obiekt matematyczny: dla przykładu, chcemy dowiedzieć się ile istnieje funkcji ze zbioru o n elementach w zbiór o m elementach. To zagadnienie znajduje zastosowania w praktyce, np. gdy pakujemy przedmioty do pudełek.

Na potrzeby tego wykładu, liczbę elementów *skończonego* zbioru X będziemy oznaczali przez $|X|$.

Niech teraz zbiór X ma n elementów, zaś zbiór Y niech ma m elementów. Ile jest funkcji ze zbioru X w zbiór Y? Proste objaśnienie intuicyjne jest następujące. Wyobraźmy sobie każdy element zbioru Y jako pudełko. Każda funkcja $f : X \to Y$ umieszcza każdy element $x \in X$ w którymś pudełku $y \in Y$. Wszystkie elementy, które trafiły do pudełka $y \in Y$ spełniają zależność $f(x) = y$. Zauważmy, że każdy $x \in X$ trafić może do każdego z pudełek $y \in Y$: dla każdego $x \in X$ jest zatem m możliwości. Wszystkich $x \in X$ jest n, a więc ostatecznie wszystkich sposobów określenia funkcji ze zbioru n-elementowego w zbiór m-elementowy jest $m \cdot m \cdot \ldots \cdot m$ (ten iloczyn ma n czynników).

Uzyskaliśmy w ten sposób prosty wzór: jeśli X ma n elementów, zaś Y ma m elementów, to wszystkich funkcji $f : X \to Y$ jest m^n.

Ze szkoły znamy inny sposób objaśnienia tego wzoru: m przedmiotów układamy w n-wyrazowych ciągach. Liczbę możliwych takich ułożeń nazywamy liczbą n-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru m-elementowego.

1.1 Przykłady zagadnień kombinatorycznych

Poniżej przytaczamy typowe przykłady zagadnień kombinatorycznych, znane prawdopodobnie słuchaczom ze szkoły.
PRZYKŁADY.

1. Na ile sposobów możemy wylosować 5 kart z talii 52 kart, jeśli po każdym losowaniu karta trafia z powrotem do talii? Na ile sposobów możemy wylosować 5 kart, jeśli karty pozostają w dłoni?

2. Rozważmy układ n miast o bardzo szczęśliwych połączeniach lotniczych: z każdego z nich można się dostać do każdego innego bezpośrednim lotem. Na ile sposobów możemy odwiedzić wszystkie n miast, każde dokładnie raz?

3. Na ile sposobów można pokolorować n wierzchołków grafu dysponując k kolorami?

4. Załóżmy, że posługujemy się językiem, którego wyrazy budowane są za pomocą zaledwie 5 znaków. Załóżmy też, że każdy skończony ciąg takich znaków jest w naszym języku słowem znaczącym. Ile słów o maksymalnej długości dziesięciu znaków można utworzyć w tym języku?

1.2 Permutacje, wariacje, kombinacje

Ciąg n-elementowy, którego wyrazy nie powtarzają się, nazywamy n-wyrazową wariacją bez powtórzeń. Liczba n-wyrazowych wariacji bez powtórzeń o wyrazach ze zbioru m-elementowego jest równa:

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1).$$

Możemy tę liczbę wyrazić również następującym wzorem:

$$\frac{m!}{(m-n)!}.$$

PRZYKŁADY.

1. Do hotelu, w którym znajduje się 7 wolnych pokoi przyjeżdża na konferencję 4 gości. Każdy chce osobny pokój. Znudzona recepcjonistka oblicza szybko, że może umieścić nowych gości w wolnych pokojach na $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ sposobów.

2. Niech $X = \{0, 1, 2\}$. Wszystkie 2-wyrazowe wariacje bez powtórzeń o wyrazach ze zbioru X to ciągi:

$$(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 1)$$

   i jest ich $3 \cdot 2 = 6$.

3. Niech $X = \{0, 1\}$. Wszystkie 3-wyrazowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru X reprezentowane są przez następujące ciągi:

$$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$$

   i wiemy już, że musi ich być $2^3 = 8$.

Permutacją zbioru n-elementowego X nazywamy dowolny różnowartościowy ciąg n-elementowy, którego wyrazami są elementy zbioru X. Permutacje są szczególnym przypadkiem wariacji bez powtórzeń.

Liczba permutacji dowolnego zbioru n-elementowego jest równa $n!$. Udowodnić to można stosując zasadę indukcji matematycznej.

PRZYKŁADY.

1. 6 żołnierzy można ustawić w szeregu na 6! sposobów.

2. Rozważmy układ n obiektów powiązanych relacją binarną, która zachodzi między dowolnymi dwoma różnymi obiektami w dowolnym kierunku (tzn. relacja jest pełna w rozważanym zbiorze). Takie układy opisujemy matematycznie jako niezorientowane grafy pełne. Każdą drogę przechodzącą przez wszystkie wierzchołki grafu (nasze obiekty), przy tym przez każdy wierzchołek dokładnie raz, nazywamy *drogą Hamiltona*. Liczba wszystkich dróg Hamiltona w niezorientowanym grafie pełnym wynosi $n!$.

Liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego oznaczamy przez $\binom{n}{k}$ i nazywamy *symbolem dwumianowym Newtona*.

k-elementowe podzbiory zbioru n-elementowego nazywamy *k-elementowymi kombinacjami*.

Liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego jest równa:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

PRZYKŁADY.

1. Pytanie o liczbę sposobów, na jakie możemy wylosować 5 kart z talii 52 kart, nie jest dostatecznie precyzyjne, dopóki nie określimy, czy *różne sposoby* reprezentowane są przez ciągi, czy zbiory 5 kart? Innymi słowy, czy układ wylosowanych kolejno kart:

$$A\heartsuit, K\heartsuit, Q\heartsuit, J\heartsuit, 10\heartsuit$$

jest tym samym układem, co:

$$10\heartsuit, J\heartsuit, Q\heartsuit, K\heartsuit, A\heartsuit\ ?$$

Jeśli uznamy, że nie, to uzyskamy $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \approx 312$ milionów sposobów na wylosowanie 5 kart spośród 52 (bez zwracania kart do talii). Jeśli nie interesuje nas kolejność, w jakiej wylosowaliśmy karty, to zauważamy, że dokonując poprzedniego oszacowania (tj. zliczając liczbę 5-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru 52-elementowego) każdy układ 5 kart wzięliśmy pod uwagę wielokrotnie – dokładnie 5! razy, bo na tyle różnych sposobów możemy ułożyć w dłoni 5 kart. Zatem ostatecznie interesująca nas liczba wszystkich sposobów, na jakie możemy wylosować 5 kart wynosi:

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!}$$

a to wciąż bardzo dużo. Grając codziennie dokładnie raz w pokera możemy przez przeszło 7 tysięcy lat cieszyć się codziennie nowym rozdaniem!

Zauważamy przy okazji, że

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{5! \cdot 47!} = \frac{52!}{5!(52-5)!}$$

2. 5 szczęśliwych spośród 49 liczb możemy skreślić na $\binom{49}{5}$ sposobów. Jak oceniamy naszą szansę wygranej?

3. Każdą liczbę naturalną możemy jednoznacznie zakodować za pomocą skończonego ciągu zerojedynkowego (ciągu o wyrazach w $\{0, 1\}$). Zasada zapisu jest następująca: przedstawiamy sobie liczbę n jako sumę potęg liczby 2 (np. $53 = 32+16+4+1 = 2^5+2^4+2^2+2^0$). Ciąg zerojedynkowy uzyskamy zapisując '1' na k-tej pozycji, jeśli k-ta potęga liczby 2 występuje w tej sumie, a '0' w przeciwnym przypadku. Jak wcześniej, numerujemy od 0 zaczynając przewrotnie od prawej strony (i tak 53 zapiszemy jako (110101), co odpowiada sumie $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$). Taki zapis nazywamy zapisem w systemie binarnym.

   Ile jest różnych liczb naturalnych mniejszych niż 2^n, które w swoim zapisie w systemie binarnym mają dokładnie k jedynek?

4. Przypominając sobie, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n (dowód tej zależności znajdzie czytelnik poniżej) oraz biorąc pod uwagę omówioną interpretację symbolu dwumianowego Newtona, odkrywamy, że:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$
gdzie, jak pamiętamy:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Niech teraz X będzie niepustym zbiorem n-elementowym, z którego wybieramy sobie dowolny element $a \in X$. Wszystkie k-elementowe podzbiory zbioru X (gdzie $n \geq k$) możemy podzielić na te, do których a *nie należy* i na te, do których a *należy*. Tworzymy w ten sposób wyczerpujący i rozłączny podział rodziny $\wp(X)$ na 2 podrodziny. Pierwsza ma $\binom{n-1}{k}$ elementów, zaś druga ma $\binom{n-1}{k-1}$ elementów. Drugą liczbę znajdujemy zauważając, że k-elementowych zbiorów, do których a należy jest tyle samo, co $(k-1)$-elementowych podzbiorów zbioru $X - \{a\}$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że zachodzi następująca zależność:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$
Zachodzi ponadto:
$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1$$
dla każdego $n \geq 0$. Wykorzystując powyższe zależności możemy zestawić wartości dwumianu Newtona w przedstawionym niżej trójkącie, zwanym *trójkątem Pascala*. Jeśli ponumerujemy wiersze trójkąta zaczynając od 0, to w n-tym wierszu uzyskujemy wartości $\binom{n}{k}$ dla kolejnych $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

. . . itd. Wartości te obliczamy bardzo szybko wstawiając 1 na „krawędziach” trójkąta i wyliczając pozostałe wyrazy poprzez zsumowanie dwóch wartości znajdujących się bezpośrednio ponad poszukiwanym:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

1.3 Wzór dwumianowy

Jak pamiętamy, zachodzą następujące zależności:
PRZYKŁADY.

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Isaac Newton znalazł ogólną postać rozwinięcia n-tej potęgi dwumianu $(x+y)$.

Nazywamy ją *wzorem dwumianowym*:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, a x, y są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Uzasadnienie. Wymnażając iloczyn:

$$(x+y)(x+y)\dots(x+y)$$

uzyskujemy sumę, której składniki mają postać $x^k y^{n-k}$. Zauważamy, że z każdego z n nawiasów wybieramy k razy x oraz $n-k$ razy y. Wszystkich iloczynów o tej samej postaci jest tyle, ile mamy sposobów wybrania k-elementowego podzbioru ze zbioru n-elementowego, tj. $\binom{n}{k}$.

1.4 Jeszcze o zliczaniu obiektów

Oprócz zliczania funkcji, mogą nas interesować sposoby zliczania relacji. Rozważamy pytanie o liczbę relacji równoważnościowych, jakie możemy określić w n-elementowym zbiorze. Jak pamiętamy, każda relacja równoważnościowa wyznacza podział zbioru na pewną liczbę podzbiorów (klas abstrakcji). Zatem wszystkich relacji równoważności w n-elementowym zbiorze jest tyle, ile jest podziałów tego zbioru na podzbiory. Zauważmy przytomnie, że interesujące nas podzbiory muszą być niepuste.

Wprowadźmy symbol $S(n, k)$ dla oznaczenia liczby podziałów zbioru n-elementowego na k części (podzbiorów).

PRZYKŁADY.

1. Zauważmy, że $S(n, 1) = 1$ oraz $S(n, n) = 1$. Gdy $k > n$ kładziemy $S(n, k) = 0$. Również $S(n, 0) = 0$ dla $n > 0$.

2. Łatwo zauważyć, że dla zbioru dwuelementowego mamy dokładnie jeden podział na dwie części oraz dokładnie jeden „podział” na jedną część.

3. Podzielimy zbiór $\{1, 2, 3\}$ na dwie części na wszystkie możliwe sposoby:

   $$\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}.$$

   Widzimy, że $S(3, 2) = 3$.

Liczbę podziałów zbioru n-elementowego na k części nazywamy *liczbą Stirlinga drugiego rodzaju*. Wartości $S(n, k)$ dla $n > k > 1$ określone są następującą zależnością rekurencyjną:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k).$$

Podobnie jak w przypadku dwumianu Newtona, możemy uprościć sobie obliczanie liczb Stirlinga zestawiając je w trójkącie:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & S(0,0) & & & & & \\
 & & & & S(1,0) & & S(1,1) & & & & \\
 & & & S(2,0) & & S(2,1) & & S(2,2) & & & \\
 & & S(3,0) & & S(3,1) & & S(3,2) & & S(3,3) & & \\
 & S(4,0) & & S(4,1) & & S(4,2) & & S(4,3) & & S(4,4) & \\
S(5,0) & & S(5,1) & & S(5,2) & & S(5,3) & & S(5,4) & & S(5,5)
\end{array}
$$

Pamiętajmy jednak, że tym razem wyliczając środkowe wartości w trójkącie wymnażamy drugi składnik sumy przez odpowiednie k.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 3 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & \\
0 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1
\end{array}
$$

PYTANIE.

1. Na ile sposobów można grupę 25 dzieci podzielić na 4 podgrupy? Uff, doceniamy trudy pracy w przedszkolu.

2 Ciągi liczbowe

Z poprzedniego wykładu pamiętamy definicję ciągu nieskończonego. Powiemy teraz parę słów o ciągach nieskończonych, rozważając niektóre ich własności. W dalszych wykładach wykorzystywane będą ciągi nieskończone o wyrazach wymiernych lub rzeczywistych, dziś więcej uwagi poświęcimy ciągom, których wyrazy definiowane są przez operacje na liczbach naturalnych.
PRZYKŁADY.

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ określony przez warunek: $a_n = \frac{n-1}{n+1}$
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ określony przez warunek: $a_n = \frac{1}{n}$ to *ciąg harmoniczny*.
3. Rozważamy pierwsze wyrazy ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ zadanych przez warunki: $a_n = \frac{n}{n-1}$, $a_n = (-1)^n$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$.
4. Rozważmy całkiem dowolną liczbę naturalną $c_0 > 0$. Zdefiniujmy: $c_1 = \frac{c_0}{2}$, jeśli c_0 jest parzysta, a $c_1 = 3c_0 + 1$, jeśli c_0 jest nieparzysta. Ogólnie, niech: $c_{n+1} = \frac{c_n}{2}$, jeśli c_n jest parzysta, a $c_{n+1} = 3c_n + 1$, jeśli c_n jest nieparzysta. *Hipoteza Collatza* (rozważana także przez Ulama) głosi, że niezależnie od tego, jak początkowo wybierzemy liczbę c_0, to dla pewnego n otrzymamy $c_n = 1$. W konsekwencji, wszystkie dalsze wyrazy ciągu będą miały postać: 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1,… Udowodniono, że hipoteza Collatza zachodzi dla wszystkich liczb c_0 mniejszych od $20 \cdot 2^{58}$. Nie ma na razie dowodu tej hipotezy dla *wszystkich* liczb naturalnych.

2.1 Ograniczenie, monotoniczność

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli istnieje liczba naturalna M taka, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi: $|a_n| \leqslant M$.

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy:

1. *rosnącym*, gdy $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$
2. *malejącym*, gdy $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$
3. *niemalejącym*, gdy $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$
4. *nierosnącym*, gdy $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$

Ciągi, spełniające któryś z powyższych warunków nazywamy *monotonicznymi*. Te, które spełniają któryś z pierwszych dwóch powyższych warunków nazywamy *ściśle monotonicznymi*.
PRZYKŁADY.

1. Przypomnijmy prostą technikę badania monotoniczności ciągów. Rozważamy dwa kolejne wyrazy $a_k = \frac{k-1}{k+1}$ i $a_{k+1} = \frac{k}{k+2}$ ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ zadanego przez warunek: $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ (k jest dowolną liczbą naturalną). Jeśli odejmując k-ty wyraz od $(k+1)$-szego otrzymamy liczbę dodatnią, to ciąg jest rosnący, a jeśli jest to liczba ujemna, to ciąg jest malejący. Odejmujemy zatem:

$$\frac{k}{k+2} - \frac{k-1}{k+1} = \frac{k(k+1)-(k-1)(k+2)}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

   skąd wnioskujemy, że $a_k < a_{k+1}$, zatem badany ciąg jest rosnący.

2. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, gdzie $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ jest rosnący oraz ograniczony.

3. Ciąg harmoniczny jest malejący i ograniczony. (Spróbuj podać przykłady liczb ograniczających ten ciąg.)

4. Ciąg wszystkich liczb pierwszych jest rosnący, ograniczony z dołu, nieograniczony z góry.

5. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, gdzie $a_n = (-1)^n$ nie jest monotoniczny, za to jest ograniczony.

6. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, gdzie $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$, nie jest ani monotoniczny, ani ograniczony.

2.2 Rekurencja

Ze szkoły słuchacze znają definicję funkcji silnia. To przykład funkcji, która definiowana jest zależnością *rekurencyjną*: aby obliczyć jej wartość dla ustalonego argumentu, trzeba znać jej wartości dla argumentów mniejszych. Choć może to umyka uwadze większości obywateli, funkcje dodawania i mnożenia liczb naturalnych także definiowane są wzorami rekurencyjnymi. Tak definiuje się również potęgowanie liczb naturalnych.
PRZYKŁADY.

1. *Fibonacci i króliki*. Leonardo Pisano (Fibonacci, 1170–1250) to jeden z najbardziej twórczych matematyków średniowiecznych. Jego *Liber Abaci* odegrała wielce istotną rolę w edukacji wielu pokoleń. Wśród zagadek Fibonacciego, największą popularność zyskała ta, dotycząca nieśmiertelnych królików, które mnożyły się nie bacząc na stosunki pokrewieństwa. Pewien człowiek miał na początku parkę królików (samca i samiczkę). Po miesiącu każda para królików wydaje na świat potomstwo w postaci jednej pary

(samca i samiczki), która jest zdolna do reprodukcji po dwóch miesiącach. Ile jest par królików w kolejnych miesiącach? Rozwiązanie tej zagadki prowadzi do *liczb Fibonacciego*, mających wielkie znaczenie w wielu działach matematyki. Określane są one rekurencyjnie:

   (a) $F_1 = F_2 = 1$
   (b) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geqslant 3$.

2. Kolejna zależność rekurencyjna:

   (a) $T_0 = 0$
   (b) oraz $T_n = 2T_{n-1} + 1$

   związana jest z problemem tzw. *wież Hanoi*. Na etapie edukacji przedszkolnej bawiliśmy się nakładaniem kolorowych krążków na słupki. Załóżmy, że n krążków o różnych średnicach ułożono na słupku rozpoczynając od najszerszego, a kończąc na najwęższym. Mając do dyspozycji jeszcze 2 słupki musimy przełożyć wszystkie krążki na inny słupek układając je w takiej samej kolejności, nie wolno nam jednak ani razu położyć większego krążka na mniejszym, nie wolno też przekładać kilku krążków na raz. Liczba ruchów koniecznych do przełożenia całej wieży wyraża się powyższą zależnością rekurencyjną, a przez indukcję udowodnić można, że $T_n = 2^n - 1$. Dzieci uwielbiają tę zabawę. Jak widać, matematycy uwielbiają ją również po zakończeniu edukacji przedszkolnej.

2.3 Dygresja: proste przykłady szeregów liczbowych

Wkrótce będziemy wykonywali pewne operacje *infinitarne*, choć oczywiście w dość ograniczonym zakresie. W szkole była suma zbieżnego ciągu geometrycznego.
PRZYKŁADY.

1. Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, czyli *nieskończona* suma $\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$ ma skończoną wartość i wynosi 2. Zastanów się, jak uzasadnić to np. geometrycznie.

2. Szereg harmoniczny: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie ma tej miłej własności, tzn. nie ma skończonej wartości. Nie jest *zbieżny*.

3. Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n$ zdecydowanie nie jest zbieżny, prawda?

4. A co powiemy na szereg Grandiego: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$.

3 Zastosowania zasady indukcji matematycznej

Pokażemy, jak korzystać z zasady indukcji matematycznej w dowodzeniu twierdzeń o liczbach naturalnych.

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
2. $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

DOWÓD. Dowody, korzystające z zasady indukcji matematycznej mają następującą strukturę:

1. *Krok początkowy*. Pokazujemy, że teza twierdzenia zachodzi dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu. Najczęściej jest to liczba 0 lub liczba 1. Zdarzają się jednak dowody indukcyjne, w których krok początkowy dotyczy innej liczby naturalnej.
2. *Krok następnikowy*. Zakładamy, że teza twierdzenia zachodzi dla liczby k (czynimy *założenie indukcyjne*). Pokazujemy, że przy tym założeniu teza twierdzenia zachodzi dla liczby $k + 1$.
3. *Konkluzja*. Jeśli powodzeniem zakończyły się oba powyższe kroki, to jesteśmy uprawnieni do przyjęcia, że rozważane twierdzenie zachodzi dla *wszystkich* liczb naturalnych z rozważanego zakresu (patrz: krok początkowy).

Dowód równości $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.

Krok początkowy. Dla $k = 1$ powyższa równość sprowadza się do: $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, co jest oczywiście prawdą.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby k, czyli zakładamy, że:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}.$$

Musimy wykazać, że badany wzór zachodzi także dla $k + 1$, czyli musimy udowodnić, że:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + k) + k + 1 = \frac{(k+1) \cdot ((k+1) + 1)}{2}.$$

Na mocy założenia indukcyjnego, lewa strona tej równości jest postaci:

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + k + 1.$$

Obliczamy tę sumę:

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}.$$

Pokazaliśmy zatem, że że jeśli rozważany wzór zachodzi dla liczby k, to zachodzi także dla liczby $k+1$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

Dowód równości $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.

Krok początkowy. Dla $k = 1$ powyższa równość sprowadza się do: $2^1 = 2^{1+1} - 2$, co jest oczywiście prawdą.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby k, czyli zakładamy, że:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 2.$$

Musimy wykazać, że:

$$(2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k) + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2.$$

Na mocy założenia indukcyjnego, lewa strona tej równości jest postaci:

$$2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}.$$

Ta liczba jest oczywiście równa $2 \cdot 2^{k+1} - 2$, czyli równa $2^{k+2} - 2$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli rozważany wzór zachodzi dla liczby k, to zachodzi także dla liczby $k+1$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

Dowód twierdzenia, które głosi że liczba elementów zbioru potęgowego $\wp(X)$ skończonego zbioru X wynosi $2^{|X|}$. Na marginesie, oznaczając zbiór potęgowy zbioru X jako 2^X możemy wyrazić rozważane twierdzenie w następujący sposób:

Dla każdego skończonego zbioru X, $|2^X| = 2^{|X|}$.

Twierdzenie to można uogólnić na zbiory nieskończone, o czym powiemy innym razem. Indukcję przeprowadzimy względem liczby elementów zbioru X, tj. $n = |X|$. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 0.

Krok początkowy. W przypadku $k = 0$ rozważamy zbiór pusty oraz jego zbiór potęgowy. Widzimy, że $|\emptyset| = 0$, $|\wp(\emptyset)| = 1$ oraz $2^0 = 1$.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiane twierdzenie zachodzi dla liczby k, czyli zakładamy, że dla każdego zbioru X o k elementach (*założenie indukcyjne*):

$$|\wp(X)| = 2^k.$$

Musimy wykazać, że dla dowolnego zbioru Y o $k+1$ elementach:

$$|\wp(Y)| = 2^{k+1}.$$

Niech zatem Y będzie dowolnym takim zbiorem. Wybieramy (dowolny, ale ustalony) element $a \in Y$. Zbiór $Y - \{a\}$ ma k elementów, zatem zgodnie z założeniem indukcyjnym:

$$|\wp(Y - \{a\})| = 2^k.$$

Zauważmy, że wszystkie zbiory z rodziny $|\wp(Y)|$ możemy podzielić na te, do których a nie należy oraz te, do których a należy. Uzyskujemy w ten sposób podział (rozłączny i wyczerpujący) rodziny $\wp(Y)$ na dwie pod-rodziny. Odkrywamy teraz, że te rodziny są równoliczne (każdemu zbiorowi Z niezawierającemu elementu a odpowiada dokładnie jeden zbiór $Z \cup \{a\}$). Zatem:

$$|\wp(Y)| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

Spróbuj swoich sił w udowodnieniu podanych niżej zależności.

PRZYKŁADY.

1. Każda liczba postaci $n^5 - n$ jest podzielna przez 5.

2. Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$: $n^n > n!$.

3. Ciąg Fibonacciego można określić za pomocą tzw. *wzoru Bineta*:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \right].$$

4 Prawdopodobieństwo w skończonych przestrzeniach

Słuchacze znają ze szkoły pewne proste pojęcia związane z ocenianiem szansy zajścia zdarzeń. Tą problematyką zajmuje się *rachunek prawdopodobieństwa*. Dwukrotnie odniesiemy się do niej w niniejszych wykładach. W tym wykładzie rozważymy najprostsze przypadki, gdy ocena szansy zachodzenia zdarzeń sprowadza się do wyznaczenia stosunku: możliwości sprzyjających zajściu danego zdarzenia do ogółu rozważanych możliwości. Przy tym, ogół rozpatrywanych możliwości jest zbiorem skończonym. Wtedy zagadnienia ustalania prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia sprowadzają się do wykorzystania poznanych przed chwilą zależności kombinatorycznych. Pod koniec tego kursu omówione zostanie pojęcie prawdopodobieństwa dla całkiem dowolnych przestrzeni możliwości. Wtedy przekonamy się, że prawdopodobieństwo nie jest pojęciem *absolutnym*, lecz zależy od przyjętej wprzódy *miary*. Poważne zastosowania rachunku prawdopodobieństwa – a z takimi spotkają się słuchacze podczas swoich studiów kognitywistycznych (a być może również w pracy zawodowej) – wymagają właśnie tak ogólnego rozumienia pojęcia prawdopodobieństwa.

4.1 Zdarzenia elementarne

Pojęcie *zdarzenia elementarnego* jest pojęciem pierwotnym rachunku prawdopodobieństwa. Intuicje z nim związane dotyczą m.in. możliwości uzyskania wyniku w jakimś doświadczeniu, np. rzucie kostką do gry lub monetą.

Ogół zdarzeń elementarnych (dla określonego zjawiska, eksperymentu, itp.) nazywamy *przestrzenią zdarzeń elementarnych* (*przestrzenią probabilistyczną*) i oznaczamy np. przez Ω. Możemy myśleć o zdarzeniach elementarnych jako o swoistych atomach, z których składamy różnorakie zdarzenia.
ZADANIA.

1. Przedstaw przestrzeń zdarzeń elementarnych związanych z:
   (a) jednokrotnym rzutem kostką,
   (b) trzema kolejnymi rzutami monetą,
   (c) losowaniem kolejno 2 kul z urny, w której znajdują się 2 kule żółte, 2 kule czerwone i 2 kule niebieskie, przy czym kule nie są do urny zwracane,
   (d) losowaniem kolejno 2 kul z urny, w której znajdują się 2 kule żółte, 2 kule czerwone i 2 kule niebieskie, przy czym kule są do urny zwracane po losowaniu.

Zdarzeniem w przestrzeni Ω nazywamy dowolny podzbiór zbioru Ω. Tak więc, ogół zdarzeń w ustalonej przestrzeni probabilistycznej Ω to zbiór $\wp(\Omega)$.

Zdarzeniem pewnym jest zbiór Ω. *Zdarzeniem niemożliwym* jest zbiór pusty.

Skoro traktujemy zdarzenia jako zbiory, to możemy wykonywać na nich operacje określone dla zbiorów. Naturalne jest więc mówienie np. o sumie zdarzeń czy zdarzeniu przeciwnym do danego zdarzenia.

PRZYKŁADY.

1. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ reprezentuje przestrzeń zdarzeń elementarnych związanych z jednokrotnym rzutem kostką. Zdarzeniem sprzyjającym wyrzuceniu parzystej liczby oczek jest $A = \{2, 4, 6\}$. Zdarzeniem sprzyjającym wyrzuceniu liczby oczek podzielnej przez 5 jest $B = \{5\}$.

2. Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia sprzyjającego wyrzuceniu parzystej liczby oczek jest $A' = \Omega - A = \{1, 3, 5\}$, czyli zdarzenie ... sprzyjające wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek.

3. Zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek *lub* wyrzuceniu 5 możemy przedstawić jako sumę $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

4. Zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek *i* jednocześnie liczby 5 jest zdarzeniem niemożliwym, o czym poucza nas równość $A \cap B = \emptyset$.

4.2 Częstość i prawdopodobieństwo

Zakładamy, że rozważane doświadczenia są *powtarzalne*, czyli że możemy je wykonywać dowolną liczbę razy. Ponadto zakładamy, że wyniki takich doświadczeń (czyli poszczególne zdarzenia elementarne) są od siebie niezależne.

Te założenia pozwalają scharakteryzować pojęcie prawdopodobieństwa zdarzeń w terminach częstości powtarzania się wyników doświadczeń. Jeśli w n doświadczeniach otrzymano m razy wynik odpowiadający zdarzeniu A, to częstość zdarzenia A wynosi $\frac{m}{n}$.

Jeśli zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ jest elementem zdarzenia $A \subseteq \Omega$, to mówimy, że zdarzenie ω jest zdarzeniem *sprzyjającym* zajściu zdarzenia A.

Dla skończonych przestrzeni probabilistycznych Ω *prawdopodobieństwem* (zdarzeń) nazywamy funkcję P określoną na zbiorze $\wp(\Omega)$ taką, że:

1. $P(A) \geqslant 0$ dla każdego $A \in \wp(\Omega)$

2. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ dla dowolnych rozłącznych zdarzeń A oraz B

3. $P(\Omega) = 1$

Przy założeniu, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ jest ilorazem liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A i liczby wszystkich zdarzeń elementarnych rozważanej przestrzeni:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Wyżej określone pojęcie prawdopodobieństwa ma m.in. następujące własności:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leqslant P(B)$.
3. $P(A) \leqslant 1$ dla każdego $A \subseteq \Omega$.
4. $P(A') = 1 - P(A)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

PRZYKŁADY.

1. Niech $\Omega = \{(r,r,r), (r,r,o), (r,o,r), (r,o,o), (o,r,r), (o,r,o), (o,o,r), (o,o,o)\}$ reprezentuje przestrzeń zdarzeń elementarnych związanych z trzykrotnym rzutem monetą. Prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wyrzuceniu za pierwszym razem orła, a przy tym 2 razy orła i 1 raz reszki obliczymy w następujący sposób:

   $$A = \{(o,r,o), (o,o,r)\}, |A| = 2, |\Omega| = 8,$$

   zatem

   $$P(A) = \frac{1}{4}$$

4.3 Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, oznaczane przez $P(A|B)$ wyraża się wzorem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

przy założeniu, że $P(B) > 0$.
PRZYKŁADY.

1. Niech, jak wyżej,

   $\Omega = \{(r,r,r),(r,r,o),(r,o,r),(r,o,o),(o,r,r),(o,r,o),(o,o,r),(o,o,o)\}$

   reprezentuje przestrzeń zdarzeń elementarnych związanych z trzykrotnym rzutem monetą. Szukamy prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A (pierwszy orzeł, ponadto 2 razy orzeł i 1 raz reszka) pod warunkiem, że za pierwszym razem wyrzucono orła, tzn. pod warunkiem zajścia zdarzenia $B = \{(o,r,r),(o,r,o),(o,o,r),(o,o,o)\}$. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe obliczamy:

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

4.4 Niezależność zdarzeń, prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa

Zdarzenia A i B są *niezależne*, jeśli prawdopodobieństwo iloczynu tych zdarzeń jest równe iloczynowi ich prawdopodobieństw:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jest zestawem zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej Ω, to mówimy, że zdarzenia te są *niezależne* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podciągu $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$ zachodzi:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

Zauważmy, że zdarzenia danego zestawu mogą być parami niezależne, ale cały ten zestaw może nie być niezależny.

Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ stanowią podział przestrzeni Ω oraz $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$, to dla dowolnego zdarzenia $B \subseteq \Omega$ zachodzi równość:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

Powyższy wzór nazywamy wzorem na *prawdopodobieństwo całkowite*.

Niech zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ stanowią podział przestrzeni Ω oraz $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$. Przypuśćmy, że zaszło zdarzenie B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że *przyczyną* zajścia zdarzenia B było zdarzenie A_i? Odpowiedź podaje *wzór Bayesa*:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}.$$

4.5 Schemat Bernoulliego

Rozważmy doświadczenie, w którym otrzymać możemy dwa wyniki: zdarzenie A lub zdarzenie do niego przeciwne A' (np. rzut monetą). Załóżmy też, że możemy to doświadczenie powtarzać dowolną liczbę razy oraz że – niezależnie od tego, ile razy powtarzamy doświadczenie – prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia jest stałe. Niech np. $P(A) = p$. Wtedy $P(A') = 1 - p$. Możemy jedno ze zdarzeń A, A' nazwać *sukcesem*, a pozostałe *porażką*: niech np. A będzie sukcesem, zaś A' porażką. Naturalnym pytaniem jest: jakie jest prawdopodobieństwo, że w serii n doświadczeń dokładnie k razy uzyskamy sukces.

Ponieważ wynik każdej z prób w przeprowadzanej ich serii jest niezależny od wyników innych prób, a $P(A) = p$, więc prawdopodobieństwo, iż w serii n prób odnieśliśmy k sukcesów oraz $n-k$ porażek wynosi $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Ponieważ k sukcesów w n-elementowej serii możemy uzyskać na $\binom{n}{k}$ sposobów (pamiętasz wzór na liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego?), zatem prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów w serii n niezależnych prób (przy prawdopodobieństwie sukcesu równym p), oznaczane przez $P(n, k, p)$ jest równe:

$$P(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Wzór ten nazywamy *wzorem Bernoulliego*.

5 Zachęta do refleksji

1. Czy stosując zasadę indukcji matematycznej wykorzystujemy skończoną czy też nieskończoną liczbę przesłanek?

2. Co to znaczy, że jeden ciąg *rośnie szybciej* od drugiego?

3. Liczby wymierne mają skończone lub okresowe rozwinięcia dziesiętne. Czy w rozwinięciach dziesiętnych liczb niewymiernych nie ma *żadnych* regularności? A co z zapisami w innej bazie liczbowej? A jak wyglądają *ułamki łańcuchowe* reprezentujące liczby?

4. Czy każdy ciąg, który został podany przez wzór rekurencyjny może też zostać zdefiniowany przez wzór jawnie podający postać n-tego wyrazu, bez odwoływania się do wyrazów wcześniejszych? Czy to możliwe np. dla ciągu Fibonacciego?

5. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana cięciwa okręgu jednostkowego jest dłuższa od boku trójkąta równoramiennego wpisanego w

ten okrąg? W szkole być może mówiono o *prawdopodobieństwie geometrycznym*. Zachęcamy słuchaczy do samodzielnego zmierzenia się z odpowiedzią na postawione pytanie. Wymaga to oczywiście ustalenia przestrzeni wszystkich zdarzeń elementarnych – przestrzeni wszystkich branych pod uwagę możliwości.

6 Podsumowanie

To, co należy zapamiętać z niniejszego wykładu:

1. Wariacje, permutacje, kombinacje.
2. Trójkąt Pascala.
3. Wzór dwumianowy.
4. Liczby Stirlinga.
5. Ciągi liczbowe: ograniczenie i rodzaje monotoniczności.
6. Definiowanie ciągów przez rekursję.
7. Dowody z wykorzystaniem indukcji matematycznej.
8. Skończona przestrzeń probabilistyczna.
9. Prawdopodobieństwo wyznaczone przez częstość.
10. Własności funkcji prawdopodobieństwa.
11. Prawdopodobieństwo warunkowe.
12. Niezależność zdarzeń.
13. Prawdopodobieństwo całkowite.
14. Wzór Bayesa.
15. Schemat Bernoulliego.

7 Wybrane pozycje bibliograficzne

Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. 2002. *Matematyka konkretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Marek, W., Onyszkiewicz, J. 2004. *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Mirkowska, G.2003. *Elementy matematyki dyskretnej*. Wydawnictwo Polsko-Japońskiej Wyższej Szkoły Technik Komputerowych, Warszawa.

Ross, K.A., Wright, C.R.B. 1996. *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.