ZAGADKI

FIGLE LOGICZNE 2: PARADOKSY

KOGNITYWISTYKA UAM (III, IV, V)

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

Za paradoksalne uważamy – z grubsza rzecz ujmując – to, co mając pozory fałszu jest jednak prawdą, lub – inaczej rzecz ujmując – to, co kłóci się z naszymi (jak sądzimy, dobrze ugruntowanymi) przekonaniami, które w istocie mają naturę intuicyjną. Za paradoksalny możesz np. uważać fakt istnienia powierzchni, które mają *tylko jedną* stronę (jak *wstęga Möbiusa*). Z punktu widzenia doświadczenia potocznego paradoksalny jest fakt, że *przed* otwarciem pudełka *Kot Schrödingera* jest jednocześnie żywy i martwy (upraszczam). Niewątpliwie uznasz za paradoksalne *twierdzenie Banacha-Tarskiego*: kulę podzielić można na pięć części, a następnie złożyć z tych części *dwie* kule, z których każda ma objętość równą kuli wyjściowej. W literaturze anglojęzycznej często terminem *paradox* określa się także *sprzeczności logiczne*. Zalecamy jednak odróżniać sprzeczności logiczne od paradoksów. Gdy znajdujemy w jakiejś teorii sprzeczność, to staramy się ją natychmiast usunąć, gdyż inaczej teoria pozostaje bezwartościowa: w teorii sprzecznej można udowodnić wszystko (łącznie z tym, że teoria owa jest niesprzeczna). Natomiast napotkanie paradoksu zmusza nas do dokładniejszego przemyślenia żywionych dotąd przekonań intuicyjnych, które są z nim sprzeczne. W konsekwencji, zwykle modyfikujemy owe intuicyjne przekonania, wskazujemy wyraźniej na zakres ich stosowalności. Nie ma żadnej gwarancji, że *wszystkie* odkrycia i pomysły naukowe dają się wyrazić w terminach potocznych.

1 Paradoks kłamcy

Pewna osoba mówi: *Ja teraz kłamię* (tj. *mówię fałsz*). Czy wypowiadając to mówi prawdę, czy fałsz? Zgodnie z klasyczną koncepcją prawdy, jeśli jej wypowiedź jest prawdziwa, to jest tak, jak ona głosi, czyli jest fałszywa. Jeśli zaś przyjmiemy, że wypowiedź ta jest fałszywa, to – również na mocy klasycznej definicji prawdy – nie jest tak, jak wypowiedź ta głosi, a więc jest prawdziwa (gdyż zdania w sensie logicznym są albo prawdziwe, albo fałszywe). Jakie rozwiązanie tego paradoksu proponujesz?

2 Paradoks stosu

To cała gama paradoksów związanych z nieostrością wyrażeń języków etnicznych. Jedno ziarno nie tworzy stosu. Dwa ziarna nie tworzą stosu. Trzy ziarna nie tworzą stosu. Bez wątpienia jednak np. milion ziaren tworzy stos. Gdzie jest granica między – powiedzmy – skupiskiem pojedynczych ziaren a stosem ziaren?

3 Paradoks Berry'ego

Rozważmy najmniejszą liczbę (naturalną), która nie może zostać zdefiniowana z użyciem mniej niż stu słów. W zbiorze wszystkich liczb, które nie mogą zostać zdefiniowane z użyciem mniej niż stu słów istnieje liczba najmniejsza. Ale właśnie zdefiniowaliśmy ją z użyciem mniej niż stu słów. Paradoks?

4 Paradoks Grellinga-Nelsona

Podzielmy przymiotniki polskie na *autologiczne* oraz *heterologiczne*. Wyraz jest autologiczny, gdy ma cechę, którą orzeka. Dla przykładu, autologiczne są wyrazy: *polski*, *sześciosylabowy*. Wyraz jest heterologiczny, gdy nie ma cechy, którą orzeka. Heterologiczne są np.: *zielony*, *czterosylabowy*. Mamy zatem dychotomiczny podział wszystkich polskich przymiotników (empirycznie można chyba stwierdzić, że znakomita większość polskich przymiotników jest heterologiczna, ale to nieistotne). Do której z tych klas należy przymiotnik *heterologiczny*?

5 Paradoks Richarda

Rozważmy wszystkie wyrażenia języka polskiego, które określają własności liczb naturalnych, np.: *być liczbą parzystą*, *być liczbą pierwszą*, *być liczbą większą od 7*, itp. (Z logicznego punktu widzenia rozważamy funkcje zdaniowe: *x jest liczbą parzystą*, *x jest liczbą pierwszą*, *x jest liczbą większą od 7*, itp.) Takich wyrażeń jest nieskończenie wiele. Czujny czytelnik zauważy natychmiast, że może ich być co najwyżej *przeliczalnie* wiele – tylko tyle własności liczb naturalnych możemy podać w języku polskim (w języku arytmetyki zresztą również). Zbiór wszystkich liczb naturalnych jest nieskończony (przeliczalny), a więc rodzina wszystkich jego podzbiorów (czyli *własności* liczb naturalnych, przy ekstensjonalnym rozumieniu własności) ma moc *kontinuum*, jest *nieprzeliczalna*, na mocy znanego twierdzenia Cantora.

Możemy wszystkie wyrażenia języka polskiego, które określają własności liczb naturalnych ustawić w ciąg uporządkowany – powiedzmy – leksykograficznie:

$$(\dagger) \qquad W_1, W_2, W_3, \ldots$$

Gdy weźmiemy pod uwagę dowolne liczby naturalne n oraz q, to możliwe są dwa przypadki:

1. q ma własność, określoną wyrażeniem W_n
2. q nie ma własności, określonej wyrażeniem W_n.

W szczególności, dla każdej liczby n: albo n ma własność, określoną wyrażeniem W_n, albo n nie ma własności, określonej wyrażeniem W_n. Rozważmy teraz wyrażenie (języka polskiego; n jest tu liczebnikiem):

(‡) n nie ma własności, określonej wyrażeniem W_n.

Co możemy powiedzieć o tym wyrażeniu?

Rozwiązania zagadek podane zostaną na wykładzie.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl