

AKSJOMATY EKSTREMALNE A MODELE ZAMIERZONE TEORII

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Model zamierzony teorii miałby być modelem wyróżnionym spośród wszystkich jej modeli przez fakt, iż to właśnie z myślą o jego charakterystyce teoria była budowana. Określenie to zawiera oczywiście element *pragmatyczny* – jak się okazuje – nieusuwalny. W przypadku ważnych teorii matematycznych formułowanych w języku pierwszego rzędu (systemy liczbowe badane w arytmetyce i algebrze, teoria mnogości) ich modele *zamierzone* nie mogą zostać jednoznacznie wyznaczone ani środkami syntaktycznymi, ani semantycznymi. Pokazują to *twierdzenia limitacyjne*. Niekiedy pożądane charakterystyki otrzymujemy wychodząc *poza* klasyczną logikę pierwszego rzędu, ale płacimy cenę wysoką – tracimy np. własność *pełności* wykorzystywanej logiki.

Aksjomaty ekstremalne formułowane bywały m.in. właśnie w celu jednoznacznej charakterystyki modeli zamierzonych. Najbardziej znane przykłady takich aksjomatów to: *aksjomat zupełności* Hilberta w geometrii (zastąpiony później *aksjomatem ciągłości*, wykorzystywanym w teorii liczb rzeczywistych), *aksjomaty ograniczenia* (minimalności) w teorii mnogości (Fraenkel, Gödel, Suszko), *schemat aksjomatu indukcji* w arytmetyce Peana, *aksjomaty maksymalności* w teorii mnogości (aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych). Aksjomaty ograniczenia w teorii mnogości zostały odrzucone, natomiast aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych okazują się ściśle związane z dowodliwością, także w logikach mocniejszych od logiki pierwszego rzędu.

Czasami możemy modele zamierzone powiązać z własnościami czysto matematycznymi: np. *twierdzenie Tennenbauma* głosi, że model standardowy arytmetyki jest jej jedynym modelem rekurencyjnym, *twierdzenia Frobeniusa*, *Ostrowskiego*, *Pontriagina* orzekają o jednoznacznej (z dokładnością do izomorfizmu) charakterystyce pewnych ciał liczbowych. W ogólnej metodologii nauk od kilkudziesięciu lat trwa debata wokół różnych argumentów dotyczących możliwości wyznaczenia modeli zamierzonych.

W odczycie postaramy się, bez epatowania formalizmem matematycznym, pokazać rolę aksjomatów ekstremalnych w tworzeniu wybranych ważnych teorii.