ZAGADKI

ZAGADKI LOGICZNE SMULLYANA 1: RYCERZE I ŁOTRZY

KOGNITYWISTYKA UAM (III, IV, V)

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

1 Wstęp

System logiczny to każdy układ (L, C, S), gdzie L jest *językiem*, C *operacją konsekwencji*, a S *semantyką* (rozważanego systemu). Podczas kursów: *Wprowadzenie do logiki*, *Logika I*, *Logika II* słuchacze poznali przykłady systemów logicznych. W skład *Elementarza Logicznego* wchodzą:

1. *Klasyczny Rachunek Zdań* (KRZ).
2. *Klasyczny Rachunek Predykatów* (KRP).

Oba te rachunki bazować mogą na różnych operacjach konsekwencji, które jednak okazują się równoważne. Ponadto, zarówno w KRZ jak i w KRP zachodzi *Twierdzenie o Pełności*, ustalające że tezy systemu pokrywają się z jego prawami (tautologiami). Dotyczy to każdej z następujących operacji konsekwencji:

1. *Konsekwencja aksjomatyczna*.
2. *Konsekwencja oparta na dedukcji naturalnej*.
3. *Konsekwencja oparta na tablicach analitycznych*.
4. *Konsekwencja rezolucyjna*.
5. *Konsekwencja gentzenowska*.

Semantyka KRZ bazuje na zbiorze dwóch *wartości logicznych* oraz szesnastu *funkcjach prawdziwościowych* – słuchacze pamiętają zapewne tabelki prawdziwościowe dla: negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji oraz równoważności. Semantyka KRP jest o wiele bogatsza – rozważa się w niej całkiem dowolne *struktury relacyjne*, czyli układy złożone ze zbioru obiektów oraz relacji łączących te obiekty, a także funkcji określonych na tych obiektach. Zakładamy, że słuchacze pamiętają klasyczne definicje: *spełniania, prawdziwości, wynikania logicznego* oraz *tautologii* w KRP. Przypominamy, że *stałymi logicznymi* w KRP są *funktory prawdziwościowe* (jak w KRZ) oraz *kwantyfikatory*: generalny (ogólny) i egzystencjalny (szczegółowy).

Logika to oczywiście nie jedynie elementarz logiczny – współczesna logika matematyczna (wraz z *Podstawami Matematyki*) to bardzo obszerny dział matematyki, z tysiącami pojęć, twierdzeń, problemów, metod, technik, itp. W XX wieku wyodrębniono cztery wielkie działy:

1. *Teoria modeli*.
2. *Teoria dowodu*.
3. *Teoria rekursji*.
4. *Teoria mnogości*.

Oprócz systemów klasycznych, rozważa się wielką różnorodność systemów *nieklasycznych*, tworzonych dla różnych celów i różnorako motywowanych. Niektóre z nich to:

1. *Logika intuicjonistyczna*.
2. *Logiki wielowartościowe*.
3. *Logiki modalne*.
4. *Logiki epistemiczne*.
5. *Logiki deontyczne*.
6. *Logiki temporalne*.
7. *Logiki erotetyczne*.
8. *Logiki niemonotoniczne*.

W każdym z tych przypadków określa się *język* rozważanej logiki (wprowadzając nowe stałe logiczne), wykorzystuje stosownie dobrane *operacje konsekwencji* (zobacz wyżej) oraz wyznacza się *semantykę* systemu (dbając o zgodność składni z semantyką, najogólniej rzecz ujmując).

Na osobną uwagę zasługuje fakt, że współczesna logika matematyczna wypracowała bardzo rozbudowaną metodologię swoich badań – używa się dla jej określenia terminów: *Metalogika* oraz *Metamatematyka*. Właśnie na tym polu logika matematyczna XX wieku odniosła największe sukcesy. Godny zauważenia jest też fakt, że logika matematyczna stanowi teoretyczne zaplecze współczesnej informatyki.

Do szeroko rozumianej logiki (*Logica Magna*) zalicza się również rozważania dotyczące np. definiowania pojęć, stawiania hipotez, procedur wyjaśniania, analizy języków etnicznych, itp.

O tym wszystkim słuchacze przeczytać mogą w stosownych podręcznikach. Celem tego wykładu jest natomiast *zabawa* – jak mawiał jeden z literackich bohaterów I wojny światowej: *Bawimy się wesoło, bo zawsze najlepiej jest się wesoło bawić*. Nasza zabawa będzie polegała na rozwiązywaniu wybranych zagadek logicznych. Wykorzystamy przede wszystkim zagadki sformułowane przez znakomitego matematyka, logika i magika, Raymonda Smullyana. Wybieramy je z naszych jeszcze niepublikowanych tłumaczeń jego książek:

1. Smullyan, R. 1982. *Alice in Puzzle-Land. A Carrollian Tale for Children Under Eighty*. Morrow, New York.

2. Smullyan, R. 2007c. *The Magic Garden of George B. And Other Logic Puzzles*. Polimetrica, Milano.

3. Smullyan, R. 2009. *Logical labyrinths*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.

4. Smullyan, R. 2013. *The Gödelian Puzzle Book. Puzzles, Paradoxes and Proofs*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.

Wykorzystamy także zagadki z dwóch innych naszych tłumaczeń książek Smullyana, już opublikowanych:

1. Smullyan, R. 2007a. *Przedrzeźniać przedrzeźniacza oraz inne zagadki logiczne łącznie z zadziwiającą przygodą w krainie logiki kombinatorycznej*. Książka i Wiedza, Warszawa.

2. Smullyan, R. 2007b. *Na zawsze nierozstrzygnięte. Zagadkowy przewodnik po twierdzeniach Gödla*. Książka i Wiedza, Warszawa.

W bibliografii umieszczonej w osobnym pliku na stronie internetowej przedmioty wyliczono inne jeszcze książki Smullyana z zagadkami logicznymi (oraz książki z łamigłówkami logicznymi innych autorów).

2 Rycerze i łotrzy

Smullyan konstruuje fabuły swoich zagadek logicznych wykorzystując pomysł podziału bohaterów na dwie klasy:

1. *Rycerzy* (*knights*). Rycerze zawsze mówią prawdę.
2. *Łotrów* (*knaves*). Łotrzy zawsze mówią fałsz.

Zagadki są tak konstruowane, aby na podstawie wypowiedzi rycerzy i łotrów coś ustalić – np. kim jest mówiący, czy na wyspie jest złoto, itd. Zwykle przyjmuje się uzus językowy, który każe mówić *Obywatel X kłamie* w znaczeniu: *Obywatel X mówi fałsz*. Należy jednak pamiętać o podstawowej różnicy:

1. Prawda i fałsz to pojęcia semantyczne. Wypowiedź (zdanie) jest prawdziwa, gdy jest tak, jak wypowiedź ta stwierdza. Prawdziwość i fałszywość wypowiedzi to jej własności obiektywne, niezależne od tego, co ktoś (także sam mówiący) na ten temat sądzi. Zakładamy zasadę dwuwartościowości logicznej: każda wypowiedź, stwierdzająca zachodzenie jakiegoś stanu rzeczy jest albo prawdziwa, albo fałszywa.
2. Kłamstwo i szczerość to pojęcia pragmatyczne. Wiążą się z przekonaniami, żywionymi przez mówiącego. Osoba jest *szczera*, gdy wierzy w to co mówi. Osoba *kłamie*, gdy nie jest szczera, czyli gdy nie wierzy w to, co mówi.

Możliwe są wszystkie cztery kombinacje, wypowiedź może być jednocześnie:

1. prawdziwa i szczera,
2. prawdziwa i nieszczera (czyli kłamliwa),
3. fałszywa i szczera,
4. fałszywa i nieszczera.

Jako ćwiczenie polecamy opis jedną i taką samą wypowiedzią np. bójki między dwoma obywatelami, będący sprawozdaniem tej bójki przez czterech świadków, należących do poszczególnych z powyższych kategorii.

Powtórzmy: zwyczaj językowy każe nam mówić *kłamiesz*, w znaczeniu: *mówisz fałsz*. Zakłada się więc przy tym, że mówiący ma pełną wiedzę o faktach, co oczywiście rzadko jest założeniem trafnym. W tym punkcie będziemy jednak, tak jak czyni to Smullyan, wierni uzusowi językowemu i będziemy rozumieli kłamstwo jako fałsz. W następnym punkcie uczynimy inaczej, biorąc pod uwagę przekonania żywione przez mówiących.

2.1 Najprostsze sytuacje

Rozważmy niektóre zagadki z początkowych rozdziałów książek: *Na zawsze nierozstrzygnięte* oraz *Labirynty logiczne*. Ilustrują one, w gruncie rzeczy, sposoby posługiwania się *spójnikami zdaniowymi*: negacją, koniunkcją, alternatywą, implikacją, równoważnością oraz kilkoma jeszcze innymi.

2.1.1 Nagrody

Przy rozwiązywaniu tych zagadek dobrze jest pamiętać omawiane w elementarnym kursie logiki *tabliczki prawdziwościowe* spójników logicznych.

1. Przypuśćmy, że oferuję dwie nagrody: nagrodę 1 oraz nagrodę 2. Masz wypowiedzieć zdanie: jeśli będzie ono prawdziwe, to dam ci jedną z tych nagród (nie przesądzając, którą), a jeśli twoje zdanie będzie fałszywe, to nie dam ci żadnej nagrody. Jakie zdanie mógłbyś wypowiedzieć, aby mieć pewność, że wygrasz nagrodę 1?

2. Teraz oferuję dwie nagrody — nagrodę 1 oraz nagrodę 2, na następujących zasadach. Jeśli wypowiesz zdanie prawdziwe, to dam ci co najmniej jedną z tych nagród, (pierwszą lub drugą, a być może obie). Jeśli wypowiesz zdanie fałszywe, nie dostaniesz żadnej nagrody. Przypuśćmy, że chcesz wygrać obie nagrody. Jakie zdanie mógłbyś powiedzieć?

3. *Wersja diabelska*. Przypuśćmy, że osobnicy A oraz B składają ci następujące oferty:

1. **Oferta** A: Wypowiadasz zdanie. Jeśli jest ono prawdziwe, to otrzymujesz dokładnie dziesięć dolarów. Jeśli jest ono fałszywe, to otrzymujesz albo mniej niż dziesięć, albo więcej niż dziesięć dolarów, ale nie dokładnie dziesięć dolarów.

2. **Oferta** B: Wypowiadasz zdanie. Niezależnie od tego, czy jest ono prawdziwe czy fałszywe, otrzymujesz więcej niż dziesięć dolarów.

Która z ofert jest korzystniejsza? Większość osób (bezrefleksyjnie) wybiera ofertę B, jako zawsze gwarantującą więcej niż dziesięć dolarów. Można jednak pokazać, że oferta A pozwala wygrać *dowolną* sumę – np. milion dolarów. Czy potrafisz to udowodnić? Mogę nawet zaproponować ci z góry, powiedzmy, sto dolarów, jeśli złożysz mi ofertę B. Oczywiście zakładamy, że jesteśmy dżentelmenami i dotrzymujemy umów.

2.1.2 Przepytywanie rycerzy i łotrów

Odwiedzimy teraz jedną z Wysp Rycerzy i Łotrów. Przypuśćmy, że spotykasz małżeństwo, w którym zarówno mąż, jak i żona mogą być: bądź łotrem, bądź rycerzem. W każdej z poniższych zagadek podajemy twoje pytanie, odpowiedź jednego z małżonków, a twoim zadaniem jest ustalenie, które z nich jest rycerzem, a które łotrem.

4. Pytanie: *Które z was, jeśli którekolwiek, jest rycerzem, a które, jeśli którekolwiek, jest łotrem*? Odpowiedź męża: *Oboje jesteśmy łotrami!*

5. Pytanie: *Czy oboje jesteście łotrami?* Odpowiedź męża: *Co najmniej jedno z nas*.

6. Pytanie: *Kto z was jest rycerzem, a kto łotrem?* Odpowiedź męża: *Jeśli ja jestem rycerzem, to moja żona także.*

7. Pytanie: *Kto z was jest rycerzem, a kto łotrem?* Odpowiedź męża: *Moja żona i ja jesteśmy tego samego typu; albo oboje jesteśmy rycerzami, albo oboje łotrami.*
Uwaga. Rozwiązania powyższych zagadek pozwalają na dostrzeżenie następujących faktów:

1. Ani rycerz ani łotr nie mogą wypowiedzieć zdania: *Jestem łotrem*.

2. Żaden mieszkaniec Wyspy Rycerzy i Łotrów nie może powiedzieć: „Jeśli jestem rycerzem, to Święty Mikołaj istnieje” (chyba że Święty Mikołaj rzeczywiście istnieje).

3. Niech dane będzie dowolne stwierdzenie p i przypuśćmy, że tubylec na Wyspie Rycerzy i Łotrów mówi: „Jeśli jestem rycerzem, to p”. Wtedy tubylec musi być rycerzem, a stwierdzenie p musi być prawdziwe.

4. Niech p będzie dowolnym stwierdzeniem i przypuśćmy, że mieszkaniec wyspy mówi: „Jestem rycerzem wtedy i tylko wtedy, gdy p”. Wtedy p musi być prawdziwe, niezależnie od tego, czy mieszkaniec ten jest rycerzem, czy łotrem.

Ostatnie dwa z tych twierdzeń pozwalają na ustalanie, na podstawie zadania jednego tylko pytania rozstrzygnięcia (czyli pytania, na które udziela się odpowiedzi: *tak* lub *nie*) dowolnego faktu dotyczącego odwiedzanej Wyspy Rycerzy i

Łotrów. Ponadto, w przedostatnim przypadku można także ustalić, czy mówiący jest rycerzem czy łotrem. Widać to na przykładzie następnej zagadki.

8. Spotykasz dwóch tubylców A i B z Wyspy Rycerzy i Łotrów i pytasz każdego z nich: *Czy na tej wyspie jest złoto?* Oto ich odpowiedzi:

1. A: *Jeśli jestem rycerzem, to na wyspie jest złoto.*

2. B: *Jestem rycerzem wtedy i tylko wtedy, gdy na wyspie jest złoto.*

Z której wypowiedzi wynika czy na wyspie jest złoto (czy też go nie ma)? Na podstawie której wypowiedzi potrafisz ustalić czy mówiący jest rycerzem czy łotrem?

2.1.3 Wieloosobowe komplikacje

Nieco bardziej złożone zagadki uzyskujemy, gdy zbadać trzeba jednocześnie wypowiedzi kilku rycerzy lub łotrów.

9. Detektyw spotkał trzech tubylców A, B oraz C. Zapytał A ilu z nich trzech było łotrami. A coś odpowiedział, ale tak niewyraźnie, że detektyw tego nie zrozumiał. Zapytał wtedy B, co właściwie A powiedział. B odrzekł, że A powiedział, iż dokładnie dwóch z nich było łotrami. Wtedy C stwierdził, że B kłamie. Czy można ustalić, jacy są A, B oraz C?

10. Przypuśćmy, że spotkałeś tubylców A oraz B i A powiedział: „Obaj jesteśmy łotrami". Kim są?

11. Przypuśćmy, że spotkałeś trzech tubylców A, B i C, którzy wypowiedzieli następujące stwierdzenia:

A:	Dokładnie jeden z nas jest łotrem.
B:	Dokładnie dwóch z nas jest łotrami.
C:	Wszyscy z nas są łotrami.

Jakiego typu jest każdy z nich?

2.2 Trochę urozmaicenia

Na bezpośrednio zadane pytanie: „Czy jesteś rycerzem?" (albo „Czy jesteś łotrem?") pytany może zareagować agresją – jeśli jeszcze tego nie doświadczyłaś, to weź to pod uwagę na przyszłość. Na szczęście, możemy też konstruować zagadki z innego rodzaju pytaniami.

2.2.1 Dodatkowe własności rycerzy i łotrów

Kolejne zagadki dotyczą sytuacji, w których dzieli się mieszkańców Wyspy Rycerzy i Łotrów na pewne kategorie, niezależne od podstawowego podziału na tych, którzy zawsze mówią prawdę oraz tych, którzy zawsze mówią fałsz. Przypuśćmy zatem, że odwiedzamy kosmiczny klub, którego członkami są Marsjanie oraz Wenusjanie obojga płci. Wiadomo o nich, że:

1. Nie można z wyglądu odróżnić Marsjan od Wenusjan.
2. Nie można z wyglądu odróżnić: ani marsjańskich mężczyzn od marsjańskich kobiet, ani wenusjańskich mężczyzn od wenusjańskich kobiet.
3. Wenusjańskie kobiety zawsze mówią prawdę.
4. Wenusjańscy mężczyźni zawsze mówią fałsz.
5. Marsjańskie kobiety zawsze mówią fałsz.
6. Marsjańscy mężczyźni zawsze mówią prawdę.

Nie ma potrzeby rozwodzić się tu nad naturalnością powyższych ustaleń dotyczących płci Kosmitów – interesuje nas logika, a nie dywagacje płciowe, te zostawiamy parlamentarzystom.

12. Czy można za pomocą jednego pytania rozstrzygnięcia ustalić czy członek klubu jest mężczyzną czy kobietą?

13. Czy można za pomocą jednego pytania rozstrzygnięcia ustalić czy członek klubu pochodzi z Marsa czy z Wenus?

14. Czy można dokonać *obu* ustaleń z zagadek 12 i 13 za pomocą jednego pytania rozstrzygnięcia?

15. Członkowie klubu Ork oraz Bog powiedzieli o sobie:

1. ORK: Bog jest z Wenus.
2. BOG: Ork jest z Marsa.
3. ORK: Bog jest mężczyzną.
4. BOG: Ork jest kobietą.

Czy na tej podstawie potrafisz określić płeć i pochodzenie każdego z nich?

16. Członkowie klubu zawierają małżeństwa, które zawsze są heteroseksualne, ale mogą być mieszane, czyli dopuszczalny jest związek istoty z Marsa z istotą z Wenus, o ile obie te istoty są różnej płci. Małżeństwa między istotami z tej samej planety także są dopuszczalne. Przypuśćmy że przedstawiono nam jakąś parę A, B jako małżeństwo i na pytanie, skąd są odpowiedzieli oni:

1. A: Jesteśmy z Marsa.
2. B: To nieprawda!

Czy A oraz B tworzą małżeństwo mieszane?

17. Teraz spotykamy parę, nazwijmy ich Jal i Tork, która na pytanie, skąd jest każde z nich udzielają następujących odpowiedzi:

1. TORK: Moja współmałżonka jest z Marsa.[1]
2. JAL: Oboje jesteśmy z Marsa.

Czy Jal oraz Tork tworzą małżeństwo mieszane?

2.2.2 Technika przekładu

Rozwiązywanie zagadek powyższych typów można usprawnić, gdy zauważymy co następuje. Niech k będzie zdaniem mówiącym, że tubylec P jest rycerzem. Jeśli teraz P wypowiada stwierdzenie X, to wiemy, że X jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy P jest rycerzem. Możemy więc dokonać przekładu „P stwierdza X" na „$k \equiv X$". Gdy w zagadce występuje większa liczba tubylców, to możemy ich jakoś ponumerować, np.: P_1, P_2, P_3, itd., a zdaniem stwierdzającym, że P_i jest rycerzem będzie wtedy k_i. Zdanie stwierdzające, że P_i jest łotrem to oczywiście $\neg k_i$. Spójrzmy teraz, jak można wykorzystać ten przekład w rozwiązaniach zagadek 4, 5, 6, 7 oraz 15.

Zagadka 4. Mamy tubylców P_1 i P_2, a P_1 stwierdza, że oboje są łotrami. Tak więc, P_1 stwierdza $\neg k_1 \wedge \neg k_2$. Na mocy reguły przekładu, $k_1 \equiv (\neg k_1 \wedge \neg k_2)$ jest prawdą. Zagadka polega więc na ustaleniu, dla jakich wartości k_1 oraz k_2 zdanie $k_1 \equiv (\neg k_1 \wedge \neg k_2)$ jest prawdą. Stosując znane z elementarnego kursu logiki metody (np. tabliczki prawdziwościowe lub tablice analityczne) łatwo ustalimy, że jest tak tylko wtedy, gdy k_1 jest fałszem, a k_2 jest prawdą. Z tego zaś możemy wywnioskować, że tautologiami są:

1. $(k_1 \equiv (\neg k_1 \wedge \neg k_2)) \rightarrow \neg k_1$
2. $(k_1 \equiv (\neg k_1 \wedge \neg k_2)) \rightarrow k_2$

[1] Tu jest kłopot z oddaniem po polsku angielskiego terminu *spouse*. Angielskie *My spouse is from Mars* można też odczytać: *Mój współmałżonek jest z Marsa.*

3. $(k_1 \equiv (\neg k_1 \wedge \neg k_2)) \rightarrow (\neg k_1 \wedge k_2)$

Jest tak oczywiście dla *całkiem dowolnych* zmiennych zdaniowych k_1 oraz k_2, za które podstawiać możemy dowolne zdania, otrzymując zawsze zdania prawdziwe oparte na powyższych schematach. Ponadto, można sprawdzić, że również implikacja $(\neg k_1 \wedge k_2) \rightarrow (k_1 \equiv (\neg k_1 \wedge \neg k_2))$ jest tautologią, a to oznacza, że tautologią jest równoważność:

$$(k_1 \equiv (\neg k_1 \wedge \neg k_2)) \equiv (\neg k_1 \wedge k_2)$$

Zagadka 5. Tubylec P_1 stwierdza, że albo P_1, albo P_2 jest łotrem, czyli wygłasza $\neg k_1 \vee \neg k_2$. Pytamy zatem, dla jakich wartości k_1 oraz k_2 prawdą jest $k_1 \equiv (\neg k_1 \vee \neg k_2)$. Znanymi metodami rozstrzygamy, że jest tak tylko wtedy, gdy k_1 jest prawdą, a k_2 fałszem. Ustaliliśmy więc, że wtedy P_1 jest rycerzem, a P_2 jest łotrem. Treścią matematyczną tego faktu jest to, że $(k_1 \equiv (\neg k_1 \vee \neg k_2)) \rightarrow (k_1 \wedge \neg k_2)$ jest tautologią. Tautologią jest w tym przypadku także implikacja odwrotna, a więc ostatecznie tautologią jest również:

$$(k_1 \equiv (\neg k_1 \vee \neg k_2)) \equiv (k_1 \wedge \neg k_2)$$

Zagadka 6. Rozważmy tę zagadkę w ogólnej postaci, gdy tubylec P stwierdza, że q, gdzie q jest dowolne, a k stwierdza, że P jest rycerzem. Wtedy P stwierdza, że $k \rightarrow q$, a więc $k \equiv (k \rightarrow q)$ jest prawdą. Jak wiemy, wtedy zarówno k jak i q są prawdą. Oznacza to, że tautologią jest $(k \equiv (k \rightarrow q)) \rightarrow (k \wedge q)$. Możemy oczywiście zapomnieć teraz o interpretacji k i stwierdzić, że dla *dowolnych* p oraz q tautologią jest:

$$(p \equiv (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \wedge q)$$

Implikacja do niej odwrotna też jest tautologią (słuchacze zachcą to sprawdzić!), a więc tautologią jest równoważność:

$$(p \equiv (p \rightarrow q)) \equiv (p \wedge q)$$

Zagadka 7. Tutaj P twierdzi, że jest rycerzem wtedy i tylko wtedy, gdy q. Jeśli k jest stwierdzeniem, że P jest rycerzem, to $k \equiv (k \equiv q)$ jest prawdą. Dla jakich k oraz q tak jest? Znanymi metodami ustalamy, że w tym przypadku q *musi* być prawdą, zaś k *może* być zarówno prawdą, jak i fałszem. Tak więc – jak już poprzednio ustaliliśmy – q jest wtedy prawdą, nie można jednak rozstrzygnąć czy P jest rycerzem czy łotrem. Formuła $(p \equiv (p \equiv q)) \rightarrow q$ jest tautologią (Smullyan nazywa ją *tautologią Goodmana*), implikacja do niej odwrotna tautologią nie jest.

Zagadka 15. Ponumerujmy członków klubu w jakimś porządku: P_1, P_2, P_3, itd., i niech dla każdej liczby i, V_i będzie stwierdzeniem, że P_i jest z Wenus, a F_i

stwierdzeniem, że P_i jest kobietą. Wtedy to, że P_i jest z Marsa, zapisać możemy jako $\neg V_i$, zaś to, że P_i jest mężczyzną, jako $\neg F_i$. Wiemy, że P_i mówi prawdę wtedy i tylko wtedy, gdy P_i jest albo wenusjańską kobietą, albo marsjańskim mężczyzną, co wyrazić można w postaci $(V_i \wedge F_i) \vee (\neg V_i \wedge \neg F_i)$, lub prościej, $V_i \equiv F_i$. Tak więc, jeśli P_i stwierdza zdanie X, to w rzeczywistości jest tak, iż zachodzi $(V_i \equiv F_i) \equiv X$. W zagadce 15 naszym P_1 jest Orka, zaś P_2 to Bog. Stwierdzają oni co następuje (po zastosowaniu naszej techniki przekładu):

1. P_1 czyli ORK: $(V_1 \equiv F_1) \equiv V_2$
2. P_2 czyli BOG: $(V_2 \equiv F_2) \equiv \neg V_1$
3. P_1 czyli ORK: $(V_1 \equiv F_1) \equiv \neg F_2$
4. P_2 czyli BOG: $(V_2 \equiv F_2) \equiv F_1$.

Trzeba zatem ustalić, dla jakich wartości przypisanych występującym tu czterem zmiennym zdaniowym powyższe cztery wypowiedzi są wszystkie prawdziwe. Wymaga to pewnych rachunków (do rozważenia jest szesnaście przypadków), ale są to rachunki całkowicie bezmyślne, które może wykonać maszyna. Jedyny przypadek, w którym te cztery wypowiedzi są prawdziwe to ten, w którym:

1. V_1 ma wartość: prawda.
2. F_1 ma wartość: fałsz.
3. V_2 ma wartość: fałsz.
4. F_2 ma wartość: prawda.

Powyżej omówiona technika przekładu może być stosowana, gdy wiadomo, co kto mówi, a ustalić mamy jakieś fakty o mówiących. Nie wszystkie zagadki o rycerzach i łotrach mogą być rozwiązywane przy jej pomocy, czasem trzeba użyć bardziej wyrafinowanych środków.

2.2.3 Ukryte sygnały

Następną komplikację uzyskujemy, gdy rycerze i łotrzy odpowiadają zgodnie ze swoją naturą, ale my nie wiemy, która z ich odpowiedzi znaczy *tak*, a która znaczy *nie*. Powiedzmy, tubylcy nie chcą z nami gadać i pokazują w odpowiedzi na pytania czarne i czerwone karty. Jedna z nich znaczy *tak*, pozostała znaczy *nie*, ale nie wiemy, który kolor co oznacza.

18. Pytasz tubylca: „Czy czerwona karta oznacza *tak*? Wtedy on pokazuje czerwoną kartę. Co można z tego wywnioskować o jego typie i znaczeniu kart?

19. Jak za pomocą jednego pytania rozstrzygnąć znaczenie karty?

20. Jak za pomocą jednego pytania rozstrzygnąć czy tubylec jest rycerzem czy łotrem?

21. Jakim pytaniem można zmusić tubylca do pokazania czerwonej karty?

22. W procesie zeznaje trzech świadków tubylców: A, B oraz C. Sędzia (obcokrajowiec) nie zna znaczenia kolorów kart, a natura tubylców każe im odpowiadać tylko za ich pomocą:

1. Najpierw sędzia zapytał A czy pozwany był niewinny. A odpowiedział, pokazując czerwoną kartę.
2. Potem sędzia zadał to samo pytanie B, który pokazał czarną kartę.
3. Wtedy sędzia zadał B drugie pytanie: „Czy A i C są tego samego typu?" (czyli obaj rycerzami lub obaj łotrami). B pokazał czerwoną kartę.
4. W końcu sędzia zadał C pytanie: „Czy w odpowiedzi na to pytanie pokażesz czerwoną kartę?" Wtedy C pokazał czerwoną kartę.

Czy pozwany jest winny czy niewinny?

2.2.4 Odrobina szaleństwa

Nieco dalej zajmiemy się systematycznie problemami dotyczącymi żywienia przekonań. Tytułem wstępu rozwiążmy kilka zagadek wprowadzających w tę problematykę, podanych w *Labiryntach logicznych*. Będą one dwóch rodzajów:

1. Zagadki, które biorą pod uwagę jedynie przekonania mówiących, które mogą być trafne lub nie.
2. Zagadki, które łączą w sobie (trafne lub nie) przekonania mówiących oraz to, że są oni rycerzami bądź łotrami.

Pierwszy przypadek: tubylcy dzielą się na *zdrowych* oraz *obłąkanych*. Wszystkie przekonania zdrowych są trafne, natomiast wszystkie przekonania obłąkanych są nietrafne. Ponadto, każdy tubylec jest całkowicie *szczery*: uczciwie mówi to, w co wierzy. W rozdziale 4 *Labiryntów logicznych*, z którego czerpiemy zagadki tego punktu Smullyan nie formułuje wyraźnie jeszcze jednego założenia, z którego – naszym zdaniem – musimy korzystać. Otóż niezbędne jest również założenie, że:

1. Zdrowy tubylec wierzy we *wszystkie* zdania prawdziwe.

2. Obłąkany tubylec wierzy we *wszystkie* zdania fałszywe.

Inaczej mówiąc, dla dowolnego zdania prawdziwego, każdy zdrowy tubylec w nie wierzy, a dla dowolnego zdania fałszywego, każdy obłąkany tubylec w zdanie to nie wierzy.

Bez tych założeń nie można rozwiązać podawanych przez Smullyana zagadek. Na koniec tego wykładu przedstawimy rozdział 10 z naszego tłumaczenia *Alicji w Krainie Zagadek*, w którym poznamy zasady *logiki lustrzanej*, mającej pewien związek z rozważanymi tu obłąkanymi tubylcami.

23. Czy tubylec może wypowiedzieć stwierdzenie: „Wierzę, że jestem obłąkany”?

24. Czy można jednym pytaniem rozstrzygnąć prawdziwość dowolnego zdania?

25. Spotkałaś trójkę rodzeństwa o imionach Henry, Dianne i Maxwell. Henry i Dianne poczynili następujące stwierdzenia:

HENRY:	Maxwell wierzy, że co najmniej jedno z nas jest obłąkane.
DIANNE:	Maxwell jest zdrowy.

Jakiego typu jest każde z nich?

26. Spotkałaś małżeństwo Mary i Geralda oraz ich córkę Lenorę. Czy na podstawie poniższego dialogu możesz ustalić, które z nich jest zdrowe, a które obłąkane:

TY (do Geralda)	Słyszałem, że twoja żona powiedziała kiedyś, że wszyscy troje jesteście obłąkani. Czy to prawda?
GERALD:	Nie, moja żona nigdy tego nie mówiła.
TY (do Lenory):	Czy twój ojciec powiedział kiedyś, że dokładnie jedno z was jest zdrowe?
LENORA:	Tak, kiedyś to powiedział.
TY (do Mary):	Czy twój mąż jest zdrowy?
MARY:	Tak.

27. Spotkałaś małżeństwo Arthura i Lillian Smithów. Arthur powiedział: „Moja żona kiedyś powiedziała, że ja wierzę, iż ona wierzy, że ja jestem obłąkany.” Co można z tego wydedukować na temat każdego z nich?

Drugi przypadek: każdy tubylec jest albo rycerzem, albo łotrem – rycerze mówią zawsze prawdę, łotrzy zawsze mówią fałsz. Niezależnie od tego, tubylcy dzielą się na zdrowych i obłąkanych. Wszystkie przekonania zdrowych są trafne, natomiast wszystkie przekonania obłąkanych są nietrafne. Mamy więc cztery typy tubylców i łatwo uświadomić sobie, jakie typu zdania wypowiada każdy z nich:

1. *Zdrowy rycerz*. Wszystko co mówi zdrowy rycerz jest prawdą.

2. *Obłąkany rycerz*. Wszystko co mówi obłąkany rycerz jest fałszem. (Próbuje on czynić prawdziwe stwierdzenia, ale nie może.)

3. *Zdrowy łotr*. Wszystko co mówi zdrowy łotr jest fałszem.

4. *Obłąkany łotr*. Wszystko co mówi obłąkany łotr jest prawdą. (Próbuje on cię oszukać, ale jest do tego niezdolny.)

W tym przypadku rycerze są *szczerzy* – odpowiadają zgodnie ze swoimi przekonaniami, natomiast łotrzy są *nieszczerzy* – odpowiadają niezgodnie ze swoimi przekonaniami.

28. Czy można za pomocą jednego pytania rozstrzygnąć czy tubylec jest zdrowy czy obłąkany?

29. Czy można za pomocą jednego pytania rozstrzygnąć czy tubylec jest rycerzem czy łotrem?

30. Na jakie pytanie każdy z tubylców odpowie *tak*?

31. Czy za pomocą jednego pytania potrafisz ustalić prawdziwość dowolnej informacji?

32. Spotkałaś tubylców o imionach Auk i Bog. Jeden z nich jest obłąkany, jeden zdrowy, ale nie wiesz, który jest jaki. Powiedzieli o sobie:

AUK:	Obydwaj jesteśmy łotrami.
BOG:	To nieprawda!

Który z nich dwóch jest obłąkany?

33. Spotkałaś tubylców o imionach Bek i Drog, którzy powiedzieli:

BEK:	Drog jest obłąkany.
DROG:	Bek jest zdrowy.
BEK:	Drog jest rycerzem.
DROG:	Bek jest łotrem.

Jakiego typu jest każdy z nich?

* * *

W prezentacji *Alicja, Labirynty i Magiczny Ogród*, dostępnej na stronie internetowej tych wykładów omawia się podany w rozdziale 6 *Labiryntów logicznych* przypadek, który łączy w sobie wszystkie dotychczasowe komplikacje, czyli odpowiada *Najbardziej Zakręconej Wyspie Rycerzy i Łotrów*:

1. Każdy mieszkaniec był zaklasyfikowany jako rycerz lub łotr.
2. Męscy rycerze byli prawdomówni, a męscy łotrzy byli kłamcami, ale kobiecy rycerze kłamali, a kobiecy łotrzy byli prawdomówni.
3. Połowa mieszkańców była obłąkana i miała tylko fałszywe przekonania, podczas gdy druga połowa była zdrowa i miała tylko trafne przekonania.
4. Gdy zadałeś tubylcowi pytanie rozstrzygnięcia, to zamiast odpowiedzieć *tak* lub *nie*, on lub ona pokazywał albo czerwoną, albo czarną kartę, z których jedna oznaczała *tak*, a pozostała *nie*.
5. Jednakże różni mieszkańcy mogli rozumieć różne rzeczy poprzez te dwa kolory: niektórzy z nich pokazywali czerwoną kartę w znaczeniu *tak* i czarną kartę w znaczeniu *nie*, podczas gdy niektórzy inni czynili odwrotnie!

Czy istnieje zasada typu zasady Nelsona Goodmana dla tej szalonej wyspy? To jest, czy można otrzymać jakąkolwiek informację, jaką się chce, poprzez zadanie tylko jednego pytania rozstrzygnięcia? Okazuje się, że istnieje – zainteresowani słuchacze zechcą zajrzeć po szczegóły do wspomnianej prezentacji.

2.3 Kilka zagadek dotyczących kwantyfikacji

Dotychczas rozważane zagadki mogły być rozwiązywane przy użyciu jedynie logiki klasycznego rachunku zdań. Teraz przyjrzymy się zagadkom o rycerzach i łotrach, w których wystąpią dalsze stałe logiczne – w tym przypadku kwantyfikatory: generalny (ogólny) oraz egzystencjalny (szczegółowy). Zagadki pochodzą z rozdziałów: 12 i 13 książki *Labirynty logiczne*.

W rozwiązaniu następnych zagadek możemy wykorzystać technikę przekładu znaną już z zagadek wcześniejszych. Jesteśmy na wyspie, gdzie każdy mieszkaniec jest albo rycerzem, albo łotrem. Dla dowolnego mieszkańca x, niech Kx będzie formułą mówiącą, że x jest rycerzem. Wtedy $\neg Kx$ mówi, że x jest łotrem. Kiedykolwiek mieszkaniec x stwierdza zdanie $\mathcal{P}$, wiemy, że jeśli x jest rycerzem, to $\mathcal{P}$ jest prawdziwe, a jeśli x jest łotrem, to $\mathcal{P}$ jest fałszywe – inaczej mówiąc, x jest rycerzem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{P}$ jest prawdziwe. Przekładamy więc „x stwierdza $\mathcal{P}$” na $Kx \equiv \mathcal{P}$.

Przypuśćmy np., że każdy mieszkaniec jednej z odwiedzanych Wysp Rycerzy i Łotrów stwierdzał, że wszyscy mieszkańcy byli tego samego typu, wszyscy byli rycerzami lub wszyscy byli łotrami. Ponieważ wszyscy powiedzieli to samo, więc rzeczywiście wszyscy są tego samego typu, a więc to co mówili było prawdą. A zatem wszyscy są rycerzami.

Tak więc, każdy mieszkaniec stwierdzał $\forall x\ Kx \vee \forall x\ \neg Kx$, czyli dla każdego x mamy $Kx \equiv (\forall x\ Kx \vee \forall x\ \neg Kx)$. Ponieważ zachodzi to dla każdego x, więc mamy $\forall x\ (Kx \equiv (\forall x\ Kx \vee \forall x\ \neg Kx))$. Widzieliśmy w rozwiązaniu, że musi zachodzić $\forall x\ Kx$ (wszyscy mieszkańcy są rycerzami). Istotą tego problemu jest to, że następująca formuła jest logicznie prawdziwa i może zostać udowodniona (np. metodą tablic analitycznych):

$$\forall x\ (Kx \equiv (\forall x\ Kx \vee \forall x\ \neg Kx)) \rightarrow \forall x\ Kx.$$

Przypuśćmy z kolei, że wszyscy mieszkańcy innej z takich wysp mówili: „Niektórzy z nas są rycerzami, a niektórzy łotrami”. Ponieważ wszyscy powiedzieli to samo, więc nie jest możliwe, aby niektórzy byli rycerzami, a niektórzy łotrami, a stąd wszyscy kłamali. A zatem wszyscy są łotrami. Tutaj więc każdy stwierdzał $\exists x\ Kx \wedge \exists x\ \neg Kx$, czyli w rzeczywistości jest tak, iż $\forall x\ (Kx \equiv (\exists x\ Kx \wedge \exists x\ \neg Kx))$. Wnioskiem było $\forall x\ \neg Kx$ (wszyscy byli łotrami), a zatem $\forall x\ \neg Kx$ jest logiczną konsekwencją $\forall x\ (Kx \equiv (\exists x\ Kx \wedge \exists x\ \neg Kx))$.

Zachęcamy słuchaczy do rozwiązania zagadek niniejszego punktu zarówno w sposób nieformalny, jak i z wykorzystaniem wspomnianej techniki przekładu.

34. Przypuśćmy, że wszyscy mieszkańcy Wyspy Rycerzy i Łotrów, oprócz jednego, który właśnie ucinał sobie drzemkę powiedzieli ci: „Wszyscy z nas są łotrami.” Następnego dnia spotkałaś mieszkańca, który spał dnia poprzedniego i zapytałaś go: „Czy to prawda, że wszyscy mieszkańcy tej wyspy to łotrzy?” Mieszkaniec odpowiedział (*tak* lub *nie*). Jaką podał odpowiedź?

35. Przypuśćmy, że wszyscy mieszkańcy są tego samego typu i każdy z nich powiedział: „Jeśli ja palę, to wszyscy mieszkańcy tej wyspy palą.” Co można o nich wydedukować?

36. Następna wyspa jest zamieszkana przez dwa szczepy – Szczep A oraz Szczep B. Wszyscy członkowie Szczepu A mówią: „Wszyscy mieszkańcy tej wyspy są rycerzami.” oraz „Wszyscy z nas palą.” Każdy członek Szczepu B mówi: „Niektórzy mieszkańcy tej wyspy są łotrami.” oraz „Nikt na tej wyspie nie pali.” Co można z tego wydedukować?

37. Powiada się, że pewnego razu bóg zstąpił z niebios i zaklasyfikował każdego mieszkańca Ziemi jako albo *szczególnego*, albo *nieszczególnego*. Jak się okazało, dla każdej osoby x, x była szczególna wtedy i tylko wtedy, gdy było tak, że albo każdy był szczególny, albo nikt nie był szczególny. Które z następujących trzech stwierdzeń wynika z tego logicznie?

(1) Nikt nie jest szczególny.

(2) Niektórzy są szczególni, a niektórzy nie są.

(3) Każdy jest szczególny.

38. Zgodnie z *inną* wersją powyższej historii, okazało się, że dla każdej osoby x, x była szczególna wtedy i tylko wtedy, gdy niektórzy ludzie byli szczególni, a niektórzy nie byli. Jeśli ta wersja jest poprawna, to które z powyższych (z zagadki 37) stwierdzeń (1), (2), (3) logicznie z niej wynikają?

39. Na pewnej planecie każdy z mieszkańców był klasyfikowany jako albo *dobry*, albo *zły*. Statystyk z naszej planety przybył na tamtą planetę i doszedł do trafnego wniosku, że dla każdego mieszkańca x, x był dobry wtedy i tylko wtedy, gdy było tak, że wszyscy dobrzy mieszkańcy mieli zielone włosy. Które z następujących trzech stwierdzeń wynika z tego logicznie?

(1) Wszyscy z nich są dobrzy.

(2) Żaden z nich nie jest dobry.

(3) Niektórzy z nich sa dobrzy, a niektórzy nie są.

Ponadto, które z następujących trzech stwierdzeń wynika z tego logicznie?

(4) Wszyscy z nich mają zielone włosy.

(5) Żaden z nich nie ma zielonych włosów.

(6) Niektórzy z nich mają zielone włosy, a niektórzy nie mają.

40. Na innej planecie, znowu każdy mieszkaniec jest klasyfikowany jako albo *dobry*, albo *zły*. Okazuje się, że dla każdego mieszkańca x, x jest dobry wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jeden zły mieszkaniec o zielonych włosach. Które z punktów (1)–(6) z zagadki 39 wynikają z tego logicznie?

41. *Zasada pijacka.* Smullyan przytacza następujący żart:

> Facet przy barze nagle uderzył pięścią w blat i powiedział: „Dawaj drinka, i daj wszystkim w barze drinka, bo kiedy ja piję, to *każdy* pije! Rozdano wszystkim przyjęte z radością drinki. Kilka minut później mężczyzna powiedział: „Dawaj drugiego drinka, i daj wszystkim innym drinka, bo kiedy ja piję drugiego drinka, to *każdy* pije drugiego drinka! Tak więc, rozdano wszystkim przyjęte z równą radością drinki. Wtedy mężczyzna rzucił na ladę kilka monet i powiedział: „A kiedy ja płacę, to *każdy* płaci!”

Czy rzeczywiście jest tak, iż istnieje osoba, której picie implikuje, że wszyscy piją?

42. *Make love not war!* Zdefiniujmy *kochanka* jako kogokolwiek, kto kocha co najmniej jedną osobę. Przypuśćmy teraz, że podano nam następujące dwa fakty:

(1) Każdy kocha jakiegoś kochanka.

(2) John kocha Mary.

Czy z (1) i (2) wynika logicznie, że Jagon kocha Otella?

43. *Paradoksalne?* Czy następujący sylogizm jest prawomocny?

Każdy kocha moje dziecko.
Moje dziecko kocha tylko mnie.

∴ Jestem swoim własnym dzieckiem.

Rozwiązania zagadek 1–43

1. Wystarczy, abyś powiedział: „Nie dasz mi nagrody 2”. Jeśli to zdanie jest fałszywe, to nie jest tak, jak ono mówi, co oznacza, że *dostaniesz* nagrodę 2. Nie mogę jednak dać ci nagrody za wypowiedzenie zdania fałszywego, a zatem twoje zdanie nie może być fałszywe. Dlatego musi być prawdziwe. Ponieważ jest prawdziwe, *jest tak*, jak ono mówi, co oznacza, że nie dostaniesz nagrody 2. Skoro jednak twoje zdanie było prawdziwe, to muszę ci dać jedną z dwóch nagród, a ponieważ nagroda 2 została wykluczona, więc musi to być nagroda 1.

2. Wystarczy, abyś powiedział: „Albo dostanę obie nagrody, albo żadnej”. Jeśli to zdanie jest fałszywe, to nie jest tak, jak ono mówi, co oznacza, iż dostaniesz dokładnie jedną nagrodę. Ale za wypowiedzenie fałszywego zdania nie możesz przecież dostać nagrody. Zdanie to zatem jest prawdziwe, czyli albo dostaniesz obie nagrody, albo żadnej. Ponieważ nie wypowiedziałeś zdania fałszywego, za co nie dostałbyś żadnej nagrody, musisz otrzymać obie nagrody.

3. Wystarczy, że powiem: „Nie zapłacisz mi ani dokładnie dziesięciu dolarów, ani dokładnie miliona dolarów”. Jeśli moje zdanie jest prawdziwe, to:

1. chociaż nie zapłacisz mi dokładnie dziesięciu dolarów ani nie zapłacisz mi dokładnie miliona dolarów, to jednak

2. *musisz* zapłacić mi dokładnie dziesięć dolarów za wypowiedzenie zdania prawdziwego.

To sprzeczność, a więc moje zdanie nie może być prawdziwe czyli musi być fałszywe. Ponieważ jest fałszywe, nie jest tak, jak ono mówi, co oznacza, że zajdzie co najmniej jedno z dwojga: *zapłacisz* mi dokładnie dziesięć dolarów lub *zapłacisz* mi dokładnie milion dolarów. Nie możesz jednak zapłacić mi dokładnie dziesięciu dolarów za wypowiedzenie zdania fałszywego, a więc musisz zapłacić mi dokładnie milion dolarów. Możesz oczywiście pocieszyć się tą nędzną setką, którą dałem ci za złożenie mi oferty B.

4. Gdyby mąż był rycerzem, to nigdy nie twierdziłby, że on i jego żona są oboje łotrami. Musi zatem być łotrem. Ponieważ jest łotrem, jego wypowiedź jest fałszywa; a więc nie są oboje łotrami. To oznacza, że jego żona musi być rycerzem. Stąd: on jest łotrem, a ona rycerzem.

5. Gdyby mąż był łotrem, to byłoby prawdą, że co najmniej jedno z dwojga jest łotrem, a stąd łotr wypowiedziałby zdanie prawdziwe, co nie może mieć miejsca. Zatem mąż musi być rycerzem. Wynika z tego, że jego stwierdzenie było prawdziwe, co oznacza, że albo on albo jego żona jest łotrem. Ponieważ on łotrem nie jest, więc łotrem jest jego żona.

6. Przypuśćmy, że mąż jest rycerzem. Wtedy prawdą jest to, co powiedział, a mianowicie, że jeśli jest rycerzem, to jego żona też, a stąd jego żona także musi być rycerzem. Dowodzi to, że *jeśli* mąż jest rycerzem, to jego żona też. A to przecież dokładnie to, co mąż powiedział; rzekł mianowicie, że *jeśli* on jest rycerzem, to jego żona także. Wypowiedział zatem zdanie prawdziwe, a więc musi być rycerzem. Wiemy więc już, że jest on rycerzem, i właśnie pokazaliśmy, że jeśli on jest rycerzem, to jego żona też. Mąż oraz żona są zatem oboje rycerzami.

7. Mąż jest albo rycerzem, albo łotrem. Jeśli jest rycerzem, to jego stwierdzenie jest prawdziwe, a stąd on i jego żona są tego samego typu, co oznacza, że jego żona również jest rycerzem. Z drugiej strony, jeśli jest on łotrem, to jego stwierdzenie jest fałszywe, a stąd on i jego żona są różnych typów, co oznacza, że żona, odwrotnie niż mąż, jest rycerzem. Tak więc, niezależnie od tego, czy mąż jest rycerzem czy łotrem, jego żona musi być rycerzem. Typ męża jest „nieokreślony"; może on być rycerzem, który szczerze utrzymuje, że jest taki jak jego żona, lub może być łotrem, który fałszywie twierdzi, że jest taki, jak jego żona.

8. Na podstawie wypowiedzi A można ustalić, że na wyspie jest złoto oraz że A jest rycerzem. Na podstawie wypowiedzi B można ustalić jedynie, że na wyspie jest złoto, nie wiadomo natomiast czy B jest rycerzem czy łotrem.

9. Ponieważ C powiedział, że B kłamie, więc C i B muszą być różnych typów. Jeśli B powiedział prawdę, to C skłamał, mówiąc, że B skłamał, ale jeśli B skłamał, to stwierdzenie C było prawdziwe. Widzimy więc, że z dwóch tubylców B i C, jeden z nich jest rycerzem, a drugi łotrem. Zastanówmy się teraz, czy A mógłby powiedzieć, że dokładnie dwóch z nich trzech było łotrami? Skoro B i C są różnych typów, to A nie mógłby tego powiedzieć, ponieważ jeśli A jest rycerzem, to byłby tylko jeden łotr (a mianowicie B lub C), i wtedy A nie skłamałby i nie powiedział, że było dwóch! Z drugiej strony, gdyby A był łotrem, to rzeczywiście byłoby dwóch łotrów (a mianowicie A oraz jeden z B i C), natomiast A, jako łotr, nigdy nie powiedziałby, że tak właśnie jest. Tak więc, A nigdy nie powiedział tego, co B twierdzi, iż A powiedział, a to czyni B łotrem, natomiast C rycerzem. A zatem B jest łotrem i C jest rycerzem. Nie możemy ustalić, jaki jest A, gdyż nie wiemy, co on w istocie powiedział.

10. A jest łotrem, bo gdyby był rycerzem, to nie twierdziłby fałszywie, że on oraz B są obaj łotrami. Stwierdzenie A jest zatem fałszywe, czyli A i B nie są obaj łotrami. Tak więc, B jest rycerzem. Zauważmy, że treść tej zagadki nie przeczy poprzednim ustaleniom (iż nikt nie może o samym sobie powiedzieć, że jest łotrem). A wypowiedział fałszywą koniunkcję, ale nie wypowiedział *osobno* zdań: „Ja jestem łotrem" oraz „B jest łotrem".

11. Żadnych dwóch z nich nie mogło razem mieć racji, a stąd co najmniej dwóch jest łotrami. Z wypowiedzi C wynika, że nie jest on rycerzem, a ponieważ jest łotrem, jego stwierdzenie jest fałszywe. A zatem, nie wszyscy z nich są łotrami, ale co najmniej dwóch jest, a więc dokładnie dwóch. B miał zatem rację, czyli jest on rycerzem, a pozostali dwaj są łotrami.

12. Wystarczy zapytać: „Czy jesteś z Marsa?" Są dwie możliwości odpowiedzi: *tak* lub *nie*, a w każdym z tych przypadków odpowiadający albo mówi prawdę, albo fałsz. Przypuśćmy, że otrzymaliśmy odpowiedź *tak*. Jeśli odpowiadający mówi prawdę, to istotnie jest z Marsa, czyli jest marsjańskim mężczyzną. Jeśli zaś wygłosił fałsz, to jest z Wenus, a zatem jest wenusjańskim mężczyzną. W obu przypadkach odpowiedź *tak* wskazuje, że mówca jest mężczyzną. Jeśli otrzymamy odpowiedź *nie*, to także rozważamy dwa przypadki. Jeśli odpowiadający mówi prawdę, to jest z Wenus, czyli jest wenusjańską kobietą. Jeśli zaś mówi fałsz, to jest z Marsa, czyli jest marsjańską kobietą. Odpowiedzi twierdzącej udzielają więc mężczyźni, a przeczącej kobiety. Moglibyśmy też zadać pytanie: „Czy jesteś z Wenus?" i przeprowadzić podobne rozumowanie: wtedy odpowiedzi twierdzącej udzielą kobiety, a przeczącej mężczyźni.

13. Wystarczy zapytać: „Czy jesteś mężczyzną?" (albo: „Czy jesteś kobietą?"). Rozumujemy tak samo, jak w poprzedniej zagadce.

14. To niewykonalne, ponieważ są cztery możliwości, a pojedyncze pytanie rozstrzygnięcia dać może tylko jedną z dwóch odpowiedzi.

15. Przypuśćmy, że Ork powiedział prawdę. Wtedy Bog byłby jednocześnie mężczyzną i Wenusjaninem, a więc Bog musiałby powiedzieć fałsz. Przypuśćmy, z drugiej strony, że Ork powiedział fałsz. Wtedy Bog nie jest ani mężczyzną, ani nie pochodzi z Wenus, a więc Bog musi być marsjańską kobietą, a więc także w tym przypadku Bog musiałby powiedzieć fałsz. Dowodzi to, że niezależnie od tego, czy Ork powiedział prawdę, czy nie, to Bog z pewnością powiedział fałsz. Ponieważ Bog wyrzekł fałsz, Ork ani nie pochodzi z Marsa, ani nie jest kobietą, stąd Ork musi być wenusjańskim mężczyzną. Ork zatem również powiedział fałsz, co oznacza, że Bog musi być marsjańską kobietą. Rozwiązaniem jest więc to, że Ork jest wenusjańskim mężczyzną, a Bog jest marsjańską kobietą (i wszystkie cztery wypowiedzi były fałszywe).

16. Ponieważ A twierdził, że jest z Marsa, A musi być mężczyzną, a stąd B musi być kobietą. Jeśli A jest prawdomówny, to A jest z Marsa, natomiast B mówi fałsz, a będąc mówiącą fałsz kobietą, również pochodzi z Marsa. Jeśli A mówi fałsz, to w rzeczywistości A jest z Wenus, B mówi prawdę, a będąc kobietą, także pochodzi z Wenus. Tak więc, nie jest to małżeństwo mieszane; oboje pochodzą z tej samej planety.

17. Przypuśćmy, że Jal powiedział prawdę. Wtedy oboje istotnie są z Marsa; stąd Tork jest z Marsa i stwierdzenie Torka, że Jal jest z Marsa, jest prawdziwe. Mamy więc sytuację niemożliwą: małżeństwo z tej samej planety, *oboje* mówiący prawdę. Tak być nie może, a więc Jal musiał powiedzieć fałsz. Co najmniej jedno z nich jest zatem z Wenus. Jeśli Jal jest z Marsa, to Tork musi być z Wenus. Ale wtedy Tork powiedziałby prawdę utrzymując, że Jal jest z Marsa, więc Tork musiałby być kobietą. Otrzymujemy niemożliwą sytuację: marsjański mężczyzna wygłaszający zdanie fałszywe. Jal nie może zatem być z Marsa; Jal musi pochodzić z Wenus. Ponieważ Jal powiedział fałsz i jest z Wenus, Jal musi być mężczyzną. Dalej, ponieważ Jal nie jest z Marsa, Tork wyrzekł fałsz. Stąd Tork jest mówiącą fałsz kobietą, a więc pochodzi z Marsa. Podsumowując: Jal jest wenusjańskim mężczyzną, a Tork jest marsjańską kobietą.

18. Tubylec musi być rycerzem, ale nie można ustalić znaczenia kart:

1. Przypuśćmy, że czerwona karta oznacza *tak*. Pokazując w odpowiedzi czerwoną, potwierdził to przypuszczenie, czyli jest ono prawdziwe, a on jest rycerzem.

2. Przypuśćmy, że czerwona karta oznacza *nie*. Pokazując w odpowiedzi czerwoną, zaprzeczył, że czerwona oznacza *tak*, to zaprzeczenie jest trafne, czyli jest on rycerzem.

19. Wystarczy zapytać: „Czy jesteś rycerzem?” Ponieważ zarówno rycerz, jak i łotr odpowiedzą twierdząco, więc kolor pokazanej karty oznacza *tak*.

20. Tak jak w zagadce 18 – wystarczy zapytać: „Czy czerwony oznacza *tak*?”

21. Można zapytać: „Czy jest tak, że albo jesteś rycerzem i czerwony oznacza *tak*, albo jesteś łotrem i czerwony oznacza *nie*?” Pytamy wtedy tubylca czy zachodzi jeden z członów alternatywy:

1. Jesteś rycerzem i czerwony oznacza *tak*.

2. Jesteś łotrem i czerwony oznacza *nie*.

Przypuśćmy, że czerwony oznacza *tak*. Jeżeli jest on rycerzem, to jeden z członów tej alternatywy (a mianowicie 1)) zachodzi, a stąd rycerz poprawnie to potwierdzi pokazaniem czerwonej karty (która oznacza *tak*). Z drugiej strony, jeśli jest on łotrem, to żaden z członów alternatywy nie zachodzi, a więc łotr fałszywie odpowie *tak*, pokazując czerwoną kartę. Tak więc, jeśli czerwony oznacza *tak*, to zarówno rycerz jak i łotr pokażą czerwoną kartę.

Przypuśćmy z kolei, że czerwony oznacza *nie*. Jeśli jest on rycerzem, to żaden z członów alternatywy nie zachodzi, a więc uczciwie oznajmi *nie*, pokazując czerwoną kartę. Jeśli jest łotrem, to zachodzi 2), a stąd jeden z członów alternatywy *zachodzi*, a zatem łotr fałszywie oznajmi *nie*, pokazując czerwoną kartę.

Tak więc, niezależnie od tego, co oznacza czerwona karta i niezależnie od tego, czy tubylec jest rycerzem czy łotrem, pokaże on czerwoną kartę.

22. Podzielimy rozwiązanie na dwa etapy.

KROK 1. Z odpowiedzi C wynika, że jeśli C jest rycerzem, to czerwony oznacza *tak*, a jeśli C jest łotrem, to czerwony oznacza *nie*. Dlaczego? Ponieważ C pokazał czerwoną kartę, poprawną odpowiedzią na pytanie sędziego jest *tak*. Jeśli C jest rycerzem, to odpowiedział zgodnie z prawdą, a stąd czerwony oznacza *tak*. Jeśli C jest łotrem, to skłamał, a stąd zamierzał odpowiedzieć *nie*, i w tym przypadku czerwony oznacza *nie*.

KROK 2. Ponieważ B pokazał dwa różne kolory na dwa pytania sędziego skierowane do niego, więc poprawne odpowiedzi na te dwa pytania muszą być różne. Przypuśćmy teraz, że pozwany jest winny. Wtedy poprawna odpowiedź na pierwsze pytanie sędziego skierowane do B brzmi *nie*, a stąd poprawną odpowiedzią na drugie pytanie sędziego skierowane do B jest *tak*, co oznacza, że A oraz C rzeczywiście są tego samego typu. Jeśli A i C sa rycerzami, to czerwony oznacza *tak* (na mocy kroku 1, ponieważ wtedy C jest rycerzem), a stąd A miał na myśli *tak*, odpowiadając na pytanie sędziego, a ponieważ A jest rycerzem, *tak* było poprawną odpowiedzią, co oznacza, że pozwany jest niewinny, sprzecznie z naszym założeniem, że pozwany jest winny. Z drugiej strony (w dalszym ciągu zakładając, że pozwany jest winny), jeśli A i C są łotrami, to także otrzymujemy sprzeczność,gdyż wtedy czerwony oznacza *nie* (na mocy kroku 1, ponieważ C jest łotrem), a stąd A, łotr, miał na myśli *nie*, pokazując czerwoną kartę, a ponieważ kłamał, poprawną odpowiedzią na pytanie sędziego jest znowu *tak*, co oznacza, że pozwany jest niewinny, sprzecznie z naszym założeniem, iż jest winny. Tak więc, przypuszczenie, iż pozwany jest winny prowadzi do sprzeczności, a zatem pozwany musi być niewinny.

23. Trzeba być wyjątkowo uważnym przy rozwiązywaniu tego zadania. Po pierwsze, zdrowa osoba wie, że jest zdrowa, a stąd nie wierzy, że jest obłąkana, natomiast obłąkana osoba mylnie wierzy, że jest zdrowa, a stąd nie wierzy w fakt, iż naprawdę jest obłąkana. Tak więc, żaden mieszkaniec nie może wierzyć, iż jest obłąkany. Po drugie, ponieważ mieszkańcy uczciwie stwierdzają to, w co wierzą, zatem żaden mieszkaniec nie może powiedzieć, że jest obłąkany. Nie pytamy jednak czy mieszkaniec może powiedzieć, że jest obłąkany, ani nie pytamy czy mieszkaniec może wierzyć, że jest obłąkany. Pytamy natomiast, czy mieszkaniec może powiedzieć, że wierzy, iż jest obłąkany, a to jest inna historia.

Osoba obłąkana nie wierzy, że jest obłąkana, a więc jest *fałszem*, że wierzy ona, iż jest obłąkana, ale ponieważ wierzy ona w zdania fałszywe, więc wierzy także i w to zdanie — wierzy, że wierzy, że jest obłąkana!! Tak więc, nie wierzy, że jest obłąkana, a jednak wierzy, że *wierzy*, iż jest obłąkana. A będąc szczera, istotnie powie, że wierzy, iż jest obłąkana. Tak więc, jeśli zapytasz obłąkanego mieszkańca: „Czy jesteś obłąkany?”, to odpowie on *nie*, ale gdy zapytasz go: „Czy *wierzysz*, że jesteś obłąkany?”, to odpowie on *tak* (ponieważ rzeczywiście nie wierzy, że jest obłąkany).

Jeśli tubylec jest obłąkany, to dla dowolnego prawdziwego stwierdzenia, nie będzie on wierzył w to stwierdzenie, ale będzie też wierzył, że wierzy w to stwierdzenie. Na odwrót, cokolwiek w co obłąkana osoba wierzy, iż w to wierzy, musi być prawdą. (Także, oczywiście, cokolwiek w co zdrowa osoba wierzy, iż w to wierzy, musi być prawdą.) Tak więc, cokolwiek w co dowolny mieszkaniec, obłąkany czy zdrowy, wierzy, iż w to wierzy, musi być prawdą. Nadto, jeśli mieszkaniec wierzy, że *nie* wierzy w jakieś stwierdzenie, to to twierdzenie musi być fałszywe. (Jest to oczywiste dla zdrowego mieszkańca, ale gdy mieszkaniec jest obłąkany, to jest fałszem, że nie wierzy w to stwierdzenie (ponieważ błędnie wierzy, że w nie nie wierzy), co oznacza, że w nie wierzy, czyli jest ono fałszywe.)

Zachodzą więc dwa następujące ważne fakty:

> FAKT 1. Jeżeli mieszkaniec wierzy, że w coś wierzy (czymkolwiek to *coś* jest), to owo *coś* musi być prawdziwe.
>
> FAKT 2. Jeżeli mieszkaniec wierzy, że w coś nie wierzy, to owo *coś* musi być fałszywe.

24. Aby ustalić, czy p jest prawdą wystarczy zapytać tubylca: „Czy wierzysz, że p?" Jeśli odpowie *tak*, to wierzy, że wierzy, iż p, a zatem (na mocy Faktu 1 z poprzedniego problemu), p jest prawdą. Jeśli odpowie *nie*, to wierzy, że nie wierzy, że p, a zatem p jest fałszem (na mocy Faktu 2 z poprzedniego problemu). Można też oczywiście pytać na każdy z dwóch poniższych sposobów (które już znamy):

1. Czy jesteś zdrowy wtedy i tylko wtedy, gdy p?
2. Czy jesteś typu, który mógłby twierdzić, że p?

25. Przypuśćmy, że Henry jest zdrowy. Wtedy jego stwierdzenie jest prawdziwe; a stąd Maxwell rzeczywiście wierzy, że co najmniej jedno z nich trzech jest obłąkane. Gdyby Maxwell był obłąkany, to byłoby prawdą, że co najmniej jedno z nich jest obłąkane, a więc obłąkany Maxwell miałby prawdziwe przekonanie, co jest niemożliwe. Stąd, Maxwell jest zdrowy (stale przy założeniu, że Henry jest zdrowy). Wtedy także Dianne jest zdrowa (ponieważ wierzy trafnie, że Maxwell jest zdrowy); a stąd wszyscy troje są zdrowi, sprzecznie ze zdrowym przekonaniem Maxwella, że co najmniej jedno jest obłąkane! Tak więc, założenie, iż Henry jest zdrowy prowadzi do sprzeczności. A zatem Henry jest obłąkany.

Ponieważ Henry jest obłąkany, fałszem jest to co mówi, a więc Maxwell w rzeczywistości nie wierzy, że co najmniej jedno z nich jest obłąkane; wierzy, że wszyscy troje są zdrowi. Ale to przekonanie jest błędne (ponieważ Henry jest obłąkany), a zatem Maxwell jest obłąkany. Stąd Dianne również jest obłąkana (ponieważ wierzy, że Maxwell jest zdrowy). A zatem wszyscy troje są obłąkani.

26. Rozwiążemy tę zagadkę w trzech krokach.
KROK 1. *Gerald i Mary są tacy sami, jeśli chodzi o zdrowie*.

Mary wierzy, że Gerald jest zdrowy. Jeśli Mary jest zdrowa, to jej przekonanie jest trafne, a stąd Gerald także jest zdrowy. Jeśli Mary jest obłąkana, to jej przekonanie jest błędne, co oznacza, iż Gerald nie jest zdrowy, ale jest obłąkany.
KROK 2. *Pokażemy, że Lenora musi być obłąkana*.

Przypuśćmy bowiem, że Lenora jest zdrowa. Wtedy jej stwierdzenie byłoby prawdziwe, a stąd Gerald kiedyś powiedział, że dokładnie jedno z nich trzech jest zdrowe, ale to prowadzi do sprzeczności, gdyż:

1. Jeśli Gerald jest zdrowy, to taka jest też Mary (krok 1); stąd wszyscy troje sa zdrowi, a więc jest fałszem, iż dokładnie jedno z nich jest zdrowe, ale zdrowi ludzie nie czynią fałszywych stwierdzeń.

2. Z drugiej strony, jeśli Gerald jest obłąkany, to taka jest też Mary (krok 1), a Lenora jest wtedy jedyną zdrową, a więc jest prawda, iż dokładnie jedno z ich trojga jest zdrowe, ale obłąkani mieszkańcy nie czynią prawdziwych stwierdzeń.

Tak więc, Lenora nie może być zdrowa: jest obłąkana.
KROK 3. Przypuśćmy, że Gerald jest obłąkany. Wtedy taka jest też Mary (krok 1); a stąd wszyscy troje są obłąkani. Wtedy Mary, która jest obłąkana, nigdy nie wygłosiłaby prawdziwego stwierdzenia, że wszyscy troje są obłąkani; a stąd Gerald miał rację, gdy zaprzeczył, że Mary je wygłosiła, jednak ludzie obłąkani nie wygłaszają tu stwierdzeń prawdziwych! Tak więc, założenie, że Gerald jest obłąkany prowadzi do sprzeczności. A stąd Gerald jest zdrowy i taka jest też jego żona (krok 1). Tak więc, matka i ojciec są oboje zdrowi, ale ich córka Lenora jest obłąkana.

27. Przypuśćmy, że Arthur jest zdrowy. Wtedy Lillian twierdziła kiedyś, że Arthur wierzy, iż Lillian wierzy, że Arthur jest obłąkany. Przypuśćmy, że Lillian jest zdrowa. Wtedy Arthur wierzy, że Lillian wierzy, że Arthur jest obłąkany. Ponieważ Arthur jest zdrowy, więc Lillian wierzy, że Arthur jest obłąkany, a ponieważ Lillian jest zdrowa, więc Arthur jest obłąkany, sprzecznie z założeniem, że Arthur jest zdrowy.

Przypuśćmy, że Lillian jest obłąkana. Wtedy Arthur w rzeczywistości nie wierzy, że Lillian wierzy, że Arthur jest obłąkany. Ponieważ Arthur jest zdrowy (z założenia), więc jest fałszem, iż Lillian wierzy, że Arthur jest obłąkany. Ale Lillian jest obłąkana, a ponieważ nie wierzy, że Arthur jest obłąkany, więc Arthur jest obłąkany, znowu sprzecznie z założeniem, że Arthur jest zdrowy. Tak więc, Arthur musi być obłąkany. A stąd Lillian nigdy nie powiedziała tego, co Arthur twierdzi, iż powiedziała, a zatem nie można niczego wydedukować o Lillian.

28. Wystarczy zapytać: „Czy jesteś rycerzem?” Zdrowy rycerz poprawnie odpowie *tak*; zdrowy łotr fałszywie odpowie *tak*; obłąkany rycerz niepoprawnie odpowie *nie*; a obłąkany łotr poprawnie odpowie *nie*. Tak więc, zdrowy mieszkaniec odpowie *tak*, a obłąkany mieszkaniec odpowie *nie*.

29. Wystarczy zapytać: „Czy jesteś zdrowy?”. Łatwo sprawdzić, że rycerz (zarówno zdrowy jak i obłąkany) odpowie *tak*, a łotr (zarówno zdrowy jak i obłąkany) odpowie *nie*.

30. Nazwijmy tubylca *wiarygodnym*, jeśli wypowiada prawdziwe stwierdzenia i udziela poprawnych odpowiedzi, a *niewiarygodnym* w przeciwnym przypadku. Wiarygodnymi tubylcami są zdrowi rycerze i obłąkani łotrzy; niewiarygodnymi tubylcami są obłąkani rycerze i zdrowi łotrzy.

Pytaniem, które gwarantuje odpowiedź *tak* jest: „Czy jesteś wiarygodny?” lub: „Czy jesteś albo zdrowym rycerzem, albo obłąkanym łotrem?” Jeśli jest on wiarygodny, to odpowie poprawnie i powie *tak*. Jeśli jest niewiarygodny, to odpowie błędnie i powie *tak*. W każdym przypadku odpowie *tak*.

31. Można zapytać: „Czy jesteś typu, który mógłby twierdzić, że wierzysz, iż na tej wyspie jest złoto?” Inne to: „Czy wierzysz, że jesteś typu, który mógłby twierdzić, że na tej wyspie jest złoto?” Ale prostszym i bardziej zgrabnym pytaniem jest: „Czy jesteś wiarygodny wtedy i tylko wtedy, gdy na tej wyspie jest złoto?”

32. Podano nam, że jeden i tylko jeden z tych dwóch jest zdrowy. Przypuśćmy, że Auk jest zdrowy. Wtedy nie mógłby on być rycerzem, bo wówczas jego stwierdzenie byłoby prawdziwe, co oznaczałoby, że obaj są łotrami, co jest niemożliwe, gdy jest on rycerzem. A zatem Auk (zakładając, że jest zdrowy) musi być łotrem. Ponieważ jest zdrowym łotrem, jego stwierdzenie jest fałszywe, a więc w rzeczywistości nie jest prawdą, iż obaj są łotrami, a stąd Bog musi być rycerzem. Nadto Bog jest obłąkany (ponieważ Auk jest zdrowy), czyli Bog jest obłąkanym rycerzem, a stąd jego stwierdzenie jest fałszywe, co oznaczałoby, iż stwierdzenie Auka jest prawdziwe, a takie ono nie jest, ponieważ obaj są łotrami. Tak więc, założenie,iż Auk jest zdrowy prowadzi do sprzeczności. A zatem Auk jest obłąkany.

33. Stwierdzenia Beka są albo oba prawdziwe, albo oba fałszywe. Jeśli oba prawdziwe, to Drog jest obłąkanym rycerzem; jeśli oba fałszywe, to Drog jest zdrowym łotrem. W obu przypadkach, Drog czyni błędne stwierdzenia. Ponieważ oba stwierdzenia Droga są błędne, więc Bek jest obłąkanym rycerzem. Wtedy oba stwierdzenia Beka są także fałszywe, a więc Drog jest zdrowym łotrem.

34. Wszyscy mieszkańcy przesłuchani pierwszego dnia powiedzieli to samo, a więc są oni wszyscy tego samego typu. Nie są rycerzami (żaden rycerz nie powiedziałby, że wszyscy mieszkańcy, z włączeniem niego samego, są łotrami), a więc są wszyscy łotrami. A zatem ich stwierdzenia były wszystkie fałszywe, czyli śpiący tubylec nie może być łotrem – jest rycerzem, czyli odpowiedział *nie*.

35. Podano nam, że są oni wszyscy tego samego typu. Rozważmy teraz dowolnego tubylca. Mówi on, że jeśli on pali, to wszyscy z nich palą. Jedynym sposobem, aby było to fałszem jest to, że on pali, ale nie wszyscy z nich palą. Jednak ponieważ *wszyscy* z nich to mówią, jedynym sposobem na to, aby to stwierdzenie było fałszywe jest to, że każdy z mieszkańców pali, lecz nie wszyscy z nich palą, co jest oczywistym absurdem. Tak więc, to stwierdzenie nie może być fałszywe, a zatem wszyscy mieszkańcy są rycerzami. Ponieważ ich stwierdzenia są wszystkie prawdziwe, więc są dwie możliwości: (1) Żaden z nich nie pali (w którym to przypadku ich wszystkie stwierdzenia są prawdziwe, gdyż zdanie fałszywe implikuje dowolne zdanie); (2) Wszyscy z nich palą. A zatem wszyscy mieszkańcy są rycerzami, i wszystko co możemy wydedukować o ich paleniu to to,że albo żaden z nich nie pali, albo wszyscy z nich palą, ale nie ma sposobu, aby powiedzieć, która z tych możliwości zachodzi.

36. Wszyscy członkowie Szczepu A są tego samego typu i wszyscy członkowie Szczepu B są tego samego typu. Ponieważ członkowie Szczepu B zaprzeczyli członkom Szczepu A, nie może być tak,że członkowie obu szczepów sa rycerzami, a więc członkowie Szczepu A uczynili stwierdzenia fałszywe, a zatem są łotrami. Wynika stąd dalej, że członkowie Szczepu B są rycerzami, ponieważ trafnie powiedzieli, że niektórzy mieszkańcy wyspy są łotrami (a w istocie, że członkowie Szczepu A *są* łotrami). Wtedy ich drugie stwierdzenia byłyby także prawdziwe, a więc nikt na tej wyspie nie pali. A zatem Szczep A składa się z łotrów, Szczep B składa się z rycerzy i nikt na tej wyspie nie pali.

37. Niech p będzie zdaniem mówiącym,że albo każdy jest szczególny, albo nikt nie jest szczególny. Ponadto, dla każdej osoby x, oznaczmy stwierdzenie, że x jest szczególna poprzez Sx. (W ogólności, w logice symbolicznej, dla dowolnej własności P oraz dowolnego obiektu indywidualnego x, zdanie mówiące, że x ma własność P wyrażane jest przez zapis Px.) Przypomnijmy, że dwa zdania nazywamy *równoważnymi*, gdy są one albo oba prawdziwe, albo oba fałszywe. Podano nam, że dla każdej osoby x zdanie Sx jest równoważne z p (x jest szczególna wtedy i tylko wtedy, gdy p jest prawdziwe – tj. wtedy i tylko wtedy, gdy albo wszyscy są szczególni, albo nikt). Wtedy dla dowolnych dwóch ludzi x i y, zdania Sx oraz Sy muszą być wzajem równoważne, ponieważ oba są równoważne z p. Oznacza to, że dla dowolnych dwóch ludzi, albo są oni obaj szczególni, albo żaden z nich nie jest szczególny, a z tego wynika, że albo *wszyscy* ludzie są szczególni, albo żaden z nich nie jest szczególny – inaczej mówiąc, zdanie p jest prawdziwe! Wtedy, ponieważ dla każdej osoby x, zdanie Sx jest równoważne z p, wynika z tego, że dla każdej osoby x zdanie Sx jest prawdziwe – inaczej mówiąc, każdy jest szczególny!

Matematyczna treść zagadki sprowadza się do tego, że tautologią jest formuła:

$$\forall x\ (Sx \equiv (\forall x\ Sx \vee \forall x\ \neg Sx)) \to \forall x\ Sx$$

Dobrym ćwiczeniem dla słuchaczy jest potwierdzenie tego np. metodą tablic analitycznych.

38. Niech znów dla każdej osoby x, Sx będzie zdaniem mówiącym, że x jest szczególna. Niech teraz q będzie zdaniem mówiącym, że niektórzy ludzie są szczególni, a niektórzy nie są (co jest *zaprzeczeniem* zdania, że albo wszyscy są szczególni, albo nikt nie jest szczególny). W obecnej wersji, Sx jest równoważne z q, dla każdej osoby x, a zatem, tak jak w rozwiązaniu poprzedniego problemu, albo wszyscy są szczególni, albo nikt nie jest szczególny (ponieważ dla dowolnych dwóch osób x i y, zdania Sx i Sy sa równoważne, gdyż każde z nich jest równoważne z q). Tak więc, q jest fałszywe, a ponieważ dla dowolnej osoby x zdanie Sx jest równoważne z q, więc Sx musi być fałszywe. A zatem, zgodnie z tą wersją, nikt nie jest szczególny.

39. Dla każdego mieszkańca x, niech Gx będzie zdaniem mówiącym, że x jest dobry. Niech p będzie zdaniem mówiącym, że wszyscy dobrzy mieszkańcy mają zielone włosy. Podano nam, że dla każdego mieszkańca x, Gx jest równoważne z p, a więc na podstawie takiego samego rozumowania jak w ostatnich dwóch problemach, albo wszyscy mieszkańcy są dobrzy, albo żaden z nich nie jest dobry. Przypuśćmy, że żaden z nich nie jest dobry. Wtedy dla każdego mieszkańca x, zdanie Gx jest fałszywe, a ponieważ Gx jest równoważne z p, więc wynika z tego, że p musi być fałszywe. Jednak jedynym sposobem na to, aby p było fałszywe – czyli jedynym sposobem na to, aby było fałszem, że wszyscy dobrzy mieszkańcy mają zielone włosy – jest to, iż istnieje co najmniej jeden dobry mieszkaniec, który nie ma zielonych włosów, co oczywiście implikuje, że co najmniej jeden mieszkaniec jest dobry, a to jest niemożliwe przy naszym założeniu, że żaden mieszkaniec nie jest dobry. Tak więc, przypuszczenie, że żaden z mieszkańców nie jest dobry doprowadziło do sprzeczności, a zatem musi być fałszywe. Tak więc, nie jest tak, iż żaden z mieszkańców nie jest dobry, a widzieliśmy, że albo wszyscy są dobrzy, albo żaden nie jest dobry, i stąd musi być tak, że wszyscy są dobrzy. Dalej, ponieważ Gx jest prawdziwe dla każdego mieszkańca x, a Gx jest równoważne z p, więc p musi być prawdziwe, co oznacza, że każdy dobry mieszkaniec ma zielone włosy, a ponieważ każdy mieszkaniec jest dobry, wnioskiem jest, iż wszyscy mieszkańcy są dobrzy i wszyscy mają zielone włosy.

40. Niech znów Gx będzie zdaniem mówiącym, że x jest dobry. Niech q będzie zdaniem mówiącym, że jest co najmniej jeden zły (nie dobry) mieszkaniec, który ma zielone włosy. Podano nam, że Gx jest równoważne z q, dla każdego mieszkańca x. Znowu, wynika z tego, że albo wszyscy mieszkańcy sa dobrzy, albo żaden z nich nie jest. Przypuśćmy, że wszyscy są dobrzy. Wtedy dla dowolnego mieszkańca x, zachodzi Gx, a ponieważ Gx jest równoważne z q, więc q musi być prawdziwe – musi być prawdą, że co najmniej jeden zły mieszkaniec ma zielone włosy – a stąd musi być co najmniej jeden zły mieszkaniec, sprzecznie z przypuszczeniem, że wszyscy mieszkańcy są dobrzy. A zatem przypuszczenie to musi być fałszywe, czyli żaden mieszkaniec nie jest dobry. Dalej, ponieważ Gx jest fałszywe dla każdego mieszkańca x, a Gx jest równoważne z q, więc q musi być fałszywe. Tak więc, nie jest prawdą, iż co najmniej jeden mieszkaniec ma zielone włosy, jednak wszyscy mieszkańcy są źli, a stąd żaden z nich nie ma zielonych włosów. Wnioskiem jest, że wszyscy mieszkańcy są źli i żaden z nich nie ma zielonych włosów.

41. Istotnie, musi istnieć osoba x taka, że jeśli x pije, to *każdy* pije! Symbolicznie:

$$(*) \qquad \exists x\ (Dx \to \forall y\ Dy),$$

gdzie Dy znaczy, że y pije. Rozważmy bowiem następującą nieformalną argumentację. Albo każdy pije, albo nieprawda, że każdy pije. Przypuśćmy, że każdy pije: $\forall y\ Dy$. Ponieważ $\forall y\ Dy$ jest prawdziwa, więc jest implikowana przez dowolne zdanie; a stąd, dla *dowolnego* x, zachodzi $Dx \to \forall y\ Dy$, a więc oczywiście jest pewien x taki, że $Dx \to \forall y\ Dy$ (w istocie, dowolny x się tu nadaje). A teraz rozważmy przypadek, gdy nie jest tak, że każdy pije. Wtedy istnieje co najmniej jedna osoba – nazwijmy ją Jim – która nie pije. Niech j oznacza „Jim." Tak więc, Djjest fałszywe, a ponieważ fałszywe zdanie implikuje każde zdanie, więc wynika stąd, że $Dj \to \forall y\ Dy$ jest prawdziwe! A zatem istnieje x – a mianowicie j – taki, że $Dx \to \forall y\ Dy$. Można oczywiście podać formalny dowód formuły $(*)$, np. metodą tablic analitycznych.

42. Tak, wynika logicznie! Ponieważ John kocha Mary, więc John jest kochankiem. A więc każdy koch Johna. Stąd, każdy jest kochankiem. Z zatem, każdy kocha każdego! W szczególności, Jagon kocha Otella.

Niech Lxy oznacza „x kocha y." Wtedy „x jest kochankiem" jest wyrażane symbolicznie jako $\exists y\ Lxy$. Ujrzeliśmy właśnie, że jeśli każdy kocha kochanka i jeśli istnieje co najmniej jeden kochanek, to każdy kocha każdego! Cóż, „każdy kocha kochanka" jest symbolicznie oddane przez $\forall x\ (\exists y\ Lxy \to \forall z\ Lzx)$. Nadto, „istnieje kochanek" jest symbolicznie oddane przez $\exists x \exists y\ Lxy$. Oczywiście, „każdy kocha każdego" jest symbolicznie oddane przez $\forall x \forall y\ Lxy$. Tak więc, formuła $\forall x \forall y\ Lxy$ jest logiczną konsekwencją $\forall x\ (\exists y\ Lxy \to \forall z\ Lzx)$ oraz $\exists x \exists y\ Lxy$. Można to udowodnić za pomocą tablic, i jest to dobre ćwiczenie dla słuchaczy.

43. Jakkolwiek może to wydawać się zabawne na pierwszy rzut oka, ten argument *jest* prawomocny! Ponieważ *każdy* kocha moje dziecko, wynika stąd, że moje dziecko, będąc osobą, kocha moje dziecko. Tak więc, moje dziecko kocha moje dziecko, ale także kocha *tylko* mnie. Wtedy wynika stąd, że moje dziecko jest tą samą osobą co ja! Oczywiście ten argument, choć prawomocny, nie może być trafny; przesłanki nie mogą obie być prawdziwe, ponieważ prowadzą do absurdalnej konkluzji, że jestem swoim własnym dzieckiem.