Matematyczne Podstawy Kognitywistyki

Dorota Leszczyńska-Jasion

Kombinatoryka, ciągi liczbowe,
skończone przestrzenie probabilistyczne

Przykłady zagadnień kombinatorycznych

Rozważmy układ n miast o bardzo szczęśliwych połączeniach lotniczych: z każdego z nich można się dostać do każdego innego bezpośrednim lotem. Na ile sposobów możemy odwiedzić wszystkie n miast, każde dokładnie raz?

$n!$. Jest to liczba wszystkich *n-wyrazowych permutacji*.

Przykłady zagadnień kombinatorycznych

Na ile sposobów możemy wylosować 5 kart z talii 52 kart, jeśli po każdym losowaniu karta trafia z powrotem do talii?

Jeśli układ kart uznajemy za istotny (kolejno wylosowane karty traktowane jak elementy ciągu):

$$52^5$$

Jest to liczba wszystkich 5-*wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru* 52-elementowego.

Przykłady zagadnień kombinatorycznych

Na ile sposobów możemy wylosować 5 kart, jeśli karty pozostają w dłoni?

Jeśli układ kart uznajemy za istotny (kolejno wylosowane karty traktowane jak elementy ciągu):

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = \frac{52!}{(52-5)!}$$

Jest to liczba wszystkich 5-*wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru* 52-*elementowego*.

Przykłady zagadnień kombinatorycznych

Na ile sposobów możemy wylosować 5 kart, jeśli karty pozostają w dłoni, a ich układ uznajemy za nieistotny (wylosowane karty traktowane są jak elementy zbioru)?

$$\frac{52!}{47! \cdot 5!} = \binom{52}{5}$$

Jest to liczba wszystkich 5-*elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru* 52-*elementowego*.

Przykłady zagadnień kombinatorycznych

Na ile sposobów możemy wylosować 5 kart z talii 52 kart, jeśli po każdym losowaniu karta trafia z powrotem do talii, a układ kart uznajemy za nieistotny (wylosowane karty traktowane są jak elementy zbioru)?

$$\binom{52+5-1}{5}$$

Jest to liczba wszystkich 5-*elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru* 52-*elementowego*.

Dwumian Newtona

Przypominając sobie, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n oraz biorąc pod uwagę omówioną interpretację symbolu dwumianowego Newtona, odkrywamy, że:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

gdzie, jak pamiętamy:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Dwumian Newtona

Niech teraz X będzie niepustym zbiorem n-elementowym, z którego wybieramy sobie dowolny element $a \in X$. Wszystkie k-elementowe podzbiory zbioru X (gdzie $n \geq k$) możemy podzielić na te, do których a nie należy i na te, do których a należy. Tworzymy w ten sposób wyczerpujący i rozłączny podział rodziny 2^X na 2 podrodziny. Pierwsza ma $\binom{n-1}{k}$ elementów, zaś druga ma $\binom{n-1}{k-1}$ elementów. Drugą liczbę znajdujemy zauważając, że k-elementowych zbiorów, do których a należy jest tyle samo, co $(k-1)$-elementowych podzbiorów zbioru $X \setminus \{a\}$.

Dwumian Newtona

Wykazaliśmy w ten sposób, że zachodzi następująca zależność:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Zachodzi ponadto:

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

dla każdego $n \geq 0$. Wykorzystując powyższe zależności możemy zestawić wartości dwumianu Newtona w przedstawionym niżej trójkącie, zwanym *trójkątem Pascala*. Jeśli ponumerujemy wiersze trójkąta zaczynając od 0, to w n-tym wierszu uzyskujemy wartości $\binom{n}{k}$ dla kolejnych $k = 0, 1, \ldots, n$:

Trójkąt Pascala

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

itd...

Trójkąt Pascala

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

itd...

Wzór dwumienny Newtona

Wzór dwumienny Newtona to ogólna postać rozwinięcia n-tej potęgi dwumianu $(x+y)^n$:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju

Niech $S(n, k)$ oznacza liczbę podziałów zbioru n-elementowego na k części (niepustych podzbiorów). Zauważmy, że:

- $S(n, 1) = 1$
- $S(n, n) = 1$
- dla $k > n$, $S(n, k) = 0$
- $S(n, 0) = 0$ dla $n > 0$
- dla $n > k > 1$

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & S(0,0) & & & & \\
 & & & S(1,0) & & S(1,1) & & & \\
 & & S(2,0) & & S(2,1) & & S(2,2) & & \\
 & S(3,0) & & S(3,1) & & S(3,2) & & S(3,3) & \\
S(4,0) & & S(4,1) & & S(4,2) & & S(4,3) & & S(4,4)
\end{array}
$$

itd...

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & & 3 & & 1 & \\
0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

itd...

Ciągi liczbowe: ograniczenia

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy *ograniczonym z góry*, jeśli istnieje liczba naturalna M taka, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi: $a_n < M$.

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy *ograniczonym z dołu*, jeśli istnieje liczba naturalna M taka, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi: $a_n > -M$.

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli istnieje liczba naturalna M taka, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi: $|a_n| < M$.

Ciągi liczbowe: monotoniczność

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy:

- *rosnącym*, gdy $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$
- *malejącym*, gdy $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$
- *niemalejącym*, gdy $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$
- *nierosnącym*, gdy $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$

Ciągi, spełniające któryś z powyższych warunków nazywamy *monotonicznymi*.

Te, które spełniają któryś z pierwszych dwóch powyższych warunków nazywamy *ściśle monotonicznymi*.

Zasada indukcji matematycznej

- zasada indukcji matematycznej

  Niech A będzie zbiorem. Jeżeli spełnione są następujące dwa warunki:

  I. (**krok początkowy** / bazowy / wyjściowy)

     $1 \in A$,

  II. (**krok następnikowy** / indukcyjny)

     dla każdej liczby naturalnej n, jeśli $n \in A$, to $n + 1 \in A$,

  to wszystkie liczby naturalne należą do A.

Zasada indukcji matematycznej

Dowodzimy (dowód znajdziesz też w materiałach do wykładu):

- $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Jeśli X jest zbiorem skończonym, to $|2^X| = 2^{|X|}$.

Prawdopodobieństwo w skończonych przestrzeniach

Pojęcie *zdarzenia elementarnego* jest pojęciem pierwotnym rachunku prawdopodobieństwa.

Ogół zdarzeń elementarnych nazywamy *przestrzenią zdarzeń elementarnych* (*przestrzenią probabilistyczną*) i oznaczamy przez Ω.

Przykłady:

1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych związanych z jednokrotnym rzutem kostką może być reprezentowana jako:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Przestrzeń zdarzeń elementarnych związanych z losowaniem jednej kuli z urny, w której znajdują się 2 kule żółte, 2 kule czerwone i 2 kule niebieskie:

$$\Omega = \{z_1, z_2, c_1, c_2, n_1, n_2\}$$

Prawdopodobieństwo w skończonych przestrzeniach

Zdarzeniem w przestrzeni Ω nazywamy dowolny podzbiór zbioru Ω. Tak więc, ogół zdarzeń w ustalonej przestrzeni probabilistycznej Ω to zbiór $\wp(\Omega)$.

Zdarzeniem pewnym jest zbiór Ω. *Zdarzeniem niemożliwym* jest zbiór pusty.

1. Zdarzeniem sprzyjającym wyrzuceniu parzystej liczby oczek jest $A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zdarzeniem sprzyjającym wyrzuceniu liczby oczek podzielnej przez 5 jest $B = \{5\} \subseteq \Omega$.
2. Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia sprzyjającego wyrzuceniu parzystej liczby oczek jest $A' = \Omega - A = \{1, 3, 5\}$.
3. Zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek *lub* wyrzuceniu 5 możemy przedstawić jako sumę $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.
4. Zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek *i* jednocześnie liczby 5 jest zdarzeniem niemożliwym, o czym poucza nas równość $A \cap B = \emptyset$.

Częstość i prawdopodobieństwo

Jeśli zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ jest elementem zdarzenia $A \subseteq \Omega$, to mówimy, że zdarzenie ω jest zdarzeniem *sprzyjającym* zajściu zdarzenia A.

Przy założeniu, że rozważane doświadczenia są *powtarzalne* oraz poszczególne zdarzenia elementarne są od siebie *niezależne*, pojęcie prawdopodobieństwa zdarzeń można scharakteryzować w kategoriach częstości powtarzania się wyników doświadczeń. Jeśli w n doświadczeniach otrzymano m razy wynik odpowiadający zdarzeniu A, to częstość zdarzenia A wynosi

$$\frac{m}{n}$$

Częstość i prawdopodobieństwo

Dla skończonych przestrzeni probabilistycznych Ω *prawdopodobieństwem* (zdarzeń) nazywamy funkcję P określoną na zbiorze $\wp(\Omega)$ taką, że:

1. $P(A) \geqslant 0$ dla każdego $A \in \wp(\Omega)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla dowolnych rozłącznych zdarzeń A oraz B
3. $P(\Omega) = 1$

Przy założeniu, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ jest ilorazem liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A i liczby wszystkich zdarzeń elementarnych rozważanej przestrzeni:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Częstość i prawdopodobieństwo

Wyżej określone pojęcie prawdopodobieństwa ma m.in. następujące własności:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leqslant P(B)$.
3. $P(A) \leqslant 1$ dla każdego $A \subseteq \Omega$.
4. $P(A') = 1 - P(A)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Np. niech
$\Omega = \{(r,r,r),(r,r,o),(r,o,r),(r,o,o),(o,r,r),(o,r,o),(o,o,r),(o,o,o)\}$
reprezentuje trzykrotny rzut monetą. Zdarzenie A polega na wyrzuceniu za pierwszym razem orła, a przy tym 2 razy orła i 1 raz reszki. Wówczas:

$$A = \{(o,r,o),(o,o,r)\}, |A| = 2, |\Omega| = 8,$$

zatem

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, oznaczane przez $P(A|B)$, wyraża się wzorem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

przy założeniu, że $P(B) > 0$.

Niech, jak wyżej, $\Omega = \{(r,r,r),(r,r,o),(r,o,r),(r,o,o),(o,r,r),(o,r,o),(o,o,r),(o,o,o)\}$ reprezentuje trzykrotny rzut monetą. Szukamy prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia $A = \{(o,r,o),(o,o,r)\}$ pod warunkiem, że za pierwszym razem wyrzucono orła, tzn. pod warunkiem zajścia zdarzenia $B = \{(o,r,r),(o,r,o),(o,o,r),(o,o,o)\}$.

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Niezależność zdarzeń, prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa

Zdarzenia A i B są *niezależne*, jeśli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ stanowią **podział** przestrzeni Ω oraz $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$, to dla dowolnego zdarzenia $B \subseteq \Omega$ zachodzi równość:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

którą nazywamy wzorem na *prawdopodobieństwo całkowite*.

Niezależność zdarzeń, prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa

Niech zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ stanowią podział przestrzeni Ω oraz $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$. Przypuśćmy, że zaszło zdarzenie B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że *przyczyną* zajścia zdarzenia B było zdarzenie A_i?

Odpowiedź podaje *wzór Bayesa*:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}.$$

Schemat Bernoulliego

Rozważmy doświadczenie, w którym otrzymać możemy: A lub A' (np. rzut monetą). Załóżmy też, że możemy to doświadczenie powtarzać dowolną liczbę razy oraz że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia jest stałe.

Niech np. $P(A) = p$. Wtedy $P(A') = 1 - p$. Możemy jedno ze zdarzeń, np. A, nazwać *sukcesem*, a pozostałe, tu: A', *porażką*.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w serii n doświadczeń dokładnie k razy uzyskamy sukces?

Schemat Bernoulliego

Prawdopodobieństwo, iż w serii n prób odnieśliśmy k sukcesów (zaszło A) oraz $n-k$ porażek (zaszło A') wynosi

$$p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

k sukcesów w n-elementowej serii możemy uzyskać na $\binom{n}{k}$ sposobów, zatem prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów w serii n niezależnych prób (przy prawdopodobieństwie sukcesu równym p), oznaczane przez $P(n,k,p)$ jest równe:

$$P(n,k,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Wzór ten nazywamy *wzorem Bernoulliego*.

Co muszę ZZZ . . .

- Wariacje, permutacje, kombinacje.
- Trójkąt Pascala.
- Wzór dwumianowy.
- Liczby Stirlinga.
- Ciągi liczbowe: ograniczenie i rodzaje monotoniczności.
- Dowody z wykorzystaniem indukcji matematycznej.
- Skończona przestrzeń probabilistyczna.
- Prawdopodobieństwo wyznaczone przez częstość.
- Własności funkcji prawdopodobieństwa.
- Prawdopodobieństwo warunkowe.
- Niezależność zdarzeń.
- Prawdopodobieństwo całkowite.
- Wzór Bayesa.
- Schemat Bernoulliego.