MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

WYKŁAD 11: CAŁKOWANIE

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Początki systematycznego rachunku różniczkowego i całkowego datuje się na wiek XVII. Za twórców tego rachunku uważa się Izaaka Newtona (1642–1727) oraz Gottfrieda Wilhelma Leibniza (1646–1716). Warto jednak pamiętać, że już Archimedes (-287 – -212) posługiwał się metodami, które uczyniły go prekursorem tego rachunku. Rozważania dotyczące szeregów nieskończonych prowadzone były też przez matematyków hinduskich, dwa stulecia przed Newtonem i Leibnizem.

Z poprzednich dwóch wykładów słuchacze mogli wynieść rudymentarne wiadomości dotyczące *różniczkowania* funkcji. Operacja *całkowania*, którą omówimy w propedeutycznym skrócie na dzisiejszym wykładzie jest operacją odwrotną do różniczkowania.

1 Uwagi o mierzeniu

Jak widzieliśmy w poprzednim wykładzie, pochodna funkcji ma prostą interpretację geometryczną, związaną ze styczną do krzywej. Całka (oznaczona, w przedziale $[a, b]$) funkcji $f(x)$ także ma prostą interpretację geometryczną: jej wartość liczbowa równa jest polu powierzchni ograniczonej osią odciętych, krzywą $f(x)$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$. Oczywiście, aby w poprawny i precyzyjny sposób mówić o *polach* figur ograniczonych dowolnymi krzywymi, trzeba dysponować pojęciem *miary*. Podobnie rzeczy się mają z takimi pojęciami, jak: *długość* (dowolnej krzywej), *pole* (dowolnej powierzchni) oraz *objętość* (dowolnej bryły). Słuchacze pamiętają ze szkoły, jak oblicza się długość odcinka lub długość łamanej, złożonej z odcinków. Pamiętają także, w jaki sposób oblicza się pola powierzchni, ograniczonych odcinkami oraz objętość (i pole powierzchni) brył prostopadłościennych. Do elementarnego wykształcenia ogólnego należy także znajomość wzorów dotyczących długości, pól powierzchni oraz objętości pewnych wybranych tworów geometrycznych (okrąg, koło, stożek, walec). Sposobów *uza-*

sadnienia tych wzorów nie traktuje się jednak z reguły jako należących do owego ogólnego wykształcenia. Uważamy, że należy co najmniej być świadomym, że wzory te nie są przyjmowane w matematyce jako dogmaty, lecz że można je uzasadnić na drodze dedukcyjnej, odwołując się do pojęć dotyczących funkcji, granic, metryki, miary (oraz, oczywiście do aksjomatów arytmetyki i teorii mnogości).

W przypadku zbiorów skończonych *miara* związana może być bezpośrednio z *liczbą elementów* takich zbiorów. Inaczej rzecz ma się jednak z dowolnymi zbiorami, w tym ze zbiorami nieskończonymi. Wprowadzone zostaje nowe pojęcie: zbioru *mierzalnego* (w określonym sensie, np. w mierze Jordana lub w mierze Lebesgue'a). Zbiory mierzalne są wtedy *porządnymi* zbiorami – takimi, którym można właśnie przypisać stosowną wielkość liczbową, będącą ich *miarą*. Gdy rozważamy np. przestrzenie euklidesowe, to – intuicyjnie mówiąc – „porządne" są m.in. przedziały, kostki, skończone sumy przedziałów oraz kostek. Z pewnych względów (związanych z *addytywnością* miary) za „porządne" uważamy też przeliczalne sumy zbiorów „porządnych". Dobrze określona miara obejmuje, jako przypadki szczególne, przypisywanie wielkości liczbowych obiektom matematycznym – charakteryzują one długość, pole, objętość, miarę kąta, prawdopodobieństwo zdarzeń, itd.

Miara zatem rozumiana jest jako pewna funkcja, która wybranym (tym „porządnym") podzbiorom ustalonej przestrzeni X przypisuje liczbę (np. rzeczywistą dodatnią lub ∞), charakteryzującą *wielkość* tych zbiorów. Dla oddania intuicji dotyczących mierzenia oraz dla zachowania zgodności z innymi strukturami obecnymi w przestrzeni X zakłada się, że funkcja ta ma określone własności. Bez wdawania się w szczegółowe komentarze podamy dwie definicje: σ-ciała podzbiorów rozważanej przestrzeni X (formalny odpowiednik zbiorów „porządnych", którym można przypisać miarę) oraz funkcji miary, określonej dla tych zbiorów.

Mówimy, że rodzina $\mathbb{B}$ podzbiorów zbioru X jest *σ-ciałem zbiorów* w X (lub: *σ-algebrą* w X), gdy:

1. $\emptyset \in \mathbb{B}$.
2. $\mathbb{B}$ jest domknięta na operację dopełnienia (w X): jeśli $A \in \mathbb{B}$, to $X - A \in \mathbb{B}$.
3. $\mathbb{B}$ jest domknięta na przeliczalne sumy: jeśli $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{B}$, to $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathbb{B}$.

Dla dowolnej rodziny $\mathbb{A}$ podzbiorów zbioru X istnieje najmniejsza (względem inkluzji) σ-algebra w X, do której należą wszystkie zbiory z rodziny $\mathbb{A}$: nazywamy ją *σ-algebrą podzbiorów X generowaną przez rodzinę $\mathbb{A}$*. Tak więc, σ-algebra generowana przez rodzinę $\mathbb{A}$ jest najmniejszą rodziną podzbiorów zbioru X, które można otrzymać z elementów rodziny $\mathbb{A}$ poprzez operacje: brania dopełnienia oraz brania przeliczalnych sum (a więc również przeliczalnych iloczynów).

Parę $(X, \mathbb{B})$ złożoną ze zbioru X oraz σ-algebry jego podzbiorów $\mathbb{B}$ nazywamy *przestrzenią mierzalną*.

Niech $(X, \mathbb{B})$ będzie przestrzenią mierzalną. Mówimy, że funkcja μ jest *miarą* w tej przestrzeni, gdy:

1. Dziedziną funkcji μ jest rodzina $\mathbb{B}$.

2. Funkcja μ przyjmuje wartości rzeczywiste nieujemne lub wartość ∞.

3. $\mu(\emptyset) = 0$.

4. Dla dowolnej rodziny $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{B}$ zbiorów parami rozłącznych (czyli takich, że $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) zachodzi:

$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

Przestrzenią z miarą nazywamy dowolną trójkę uporządkowaną $(X, \mathbb{B}, \mu)$, gdzie $(X, \mathbb{B})$ jest przestrzenią mierzalną, a μ jest miarą w tej przestrzeni.
PRZYKŁADY.

1. Niech $\mathbb{A}$ będzie rodziną wszystkich przedziałów otwartych o końcach wymiernych zawartych w $\mathbb{R}$. Wtedy σ-algebra generowana przez rodzinę $\mathbb{A}$ jest rodziną wszystkich tzw. *borelowskich* podzbiorów $\mathbb{R}$.

2. Niech Ω będzie przestrzenią *zdarzeń elementarnych*. Funkcja *prawdopodobieństwa* zdarzeń, rozumianych jako podzbiory zbioru Ω zostanie dobrze określona, jeśli zdecydujemy, *którym* podzbiorom zbioru Ω chcemy przypisać ich *prawdopodobieństwo*, rozumiane jako liczba rzeczywista należąca do przedziału domkniętego $[0, 1]$, czyli gdy ustalimy przestrzeń $\mathbb{B}$ *zdarzeń losowych*. Zakłada się przy tym, że funkcja ta jest miarą w przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathbb{B})$ oraz że jej wartość na zbiorze Ω równa jest 1. W znanym słuchaczom ze szkoły przypadku, gdy Ω jest zbiorem skończonym sprawa jest prosta – rodziną zdarzeń losowych jest po prostu rodziną $\wp(\Omega)$ wszystkich podzbiorów zbioru Ω. W poważniejszych zastosowaniach (które słuchacze poznają na wykładach ze statystyki) prawdopodobieństwo jest funkcją miary, określoną w stosownie dobranej przestrzeni mierzalnej.

3. Jeśli $(X, \mathbb{B}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, to $\mu(\emptyset) = 0$, zgodnie z definicją. Miarę równą 0 mogą mieć jednak także niepuste podzbiory zbioru X: byłyby to zatem zbiory „małe” w sensie rozważanej miary. Z kolei te zbiory, których dopełnienia mają miarę równą 0 traktowane mogą być jako „duże” w sensie rozważanej miary. Uzyskujemy w ten sposób możliwość precyzyjnego mówienia o tym, że dana własność zachodzi *prawie wszędzie* (dla *prawie wszystkich* rozważanych obiektów – czyli dla wszystkich, oprócz zbioru o mierze 0).

4. Niech $(X, \mathbb{B}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Mówimy, że miara μ jest *zupełna*, jeśli każdy podzbiór zbioru miary 0 jest mierzalny: dla dowolnego $A \in \mathbb{B}$, jeśli $\mu(A) = 0$ oraz $B \subseteq A$, to $B \in \mathbb{B}$. Mówiąc metaforycznie, jeśli $(X, \mathbb{B}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą zupełną, to zaniedbywalnie małe zbiory nie kryją w swoich wnętrzach *zbiorów-potworów*, którym nie można w tej przestrzeni przypisać miary.

Miara to zatem nowy rodzaj struktury, dotąd nie omawiany w tych wykładach. Odwołując się jedynie do wiadomości z edukacji szkolnej czasem trudno jest uświadomić sobie, że posługujemy się tyloma różnego rodzaju strukturami: algebraiczną (np. działania arytmetyczne), porządkową (m.in. kresy górne i dolne zbiorów uporządkowanych), topologiczną (np. pojęcia: zbieżności, granicy, metryki), do których dochodzą jeszcze struktury różniczkowe (np. pojęcie pochodnej) oraz struktury związane z miarą (np. całka). W przypadku przestrzeni $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych (oraz produktów tej przestrzeni) wszystkie te typy struktur spełniają określone *warunki zgodności*, np.: porządek zgodny jest z operacjami arytmetycznymi, bezwzględna wartość wykorzystywana jest w definicji metryki oraz pochodnej, itp. Sądzimy, że rzeczą niezwykle frapującą dla studentów kognitywistyki jest to, że umysł potrafi badać tak różne struktury nakładane na uniwersa obiektów matematycznych. Zachęcamy ewentualnie zainteresowanych tym słuchaczy do poczytania o dziejach matematyki, o drogach wiodących do ustanowienia wyżej wspomnianych rodzajów struktur.

2 Całka nieoznaczona

W niniejszym usługowym kursie ograniczymy się do podania definicji całki (nieoznaczonej i oznaczonej) oraz kilku – dość oczywistych – wzorów. Jak słuchacze pamiętają, *różniczkowanie* dowolnych funkcji polegało na stosowaniu kilku prostych przepisów. W przypadku *całkowania* sytuacja jest nieco inna. Obliczanie całek w ogólności nie jest łatwe, wymagana jest przy tym zarówno pewna pomysłowość, jak i korzystanie z procedur specjalnie do tego przeznaczonych. Sądzimy, że studentom kognitywistyki wystarczy rozumienie samego pojęcia całki, wraz z przykładami ilustrującymi zastosowania całek.

2.1 Definicja

Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a, b). *Funkcją pierwotną* funkcji f nazywamy każdą funkcję F określoną w przedziale (a, b) i różniczkowalną w każdym punkcie przedziału (a, b), która dla wszystkich $x \in (a, b)$ spełnia warunek: $F'(x) = f(x)$.

Jeśli dla funkcji f istnieje jej funkcja pierwotna w (a, b), to mówimy, że f jest *całkowalna* w (a, b). Gdy chcemy rozważać całkowalność funkcji w przedziale domkniętym, to w punktach końcowych takiego przedziału rozważamy pochodne jednostronne funkcji pierwotnej.

Wprost z definicji wynika, że funkcja pierwotna funkcji f całkowalnej w (a, b) jest określona z dokładnością do stałej:

1. Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to $F + c$ także jest funkcją pierwotną funkcji f, dla dowolnej $C \in \mathbb{R}$.

2. Jeśli F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f, to istnieje $C \in \mathbb{R}$ taka, że $F = G + C$.

Całką nieoznaczoną funkcji f nazywamy rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f. Powszechnie przyjętym oznaczeniem dla całki nieoznaczonej funkcji f jest $\int f(x)dx$. Tak więc, jeśli $F'(x) = f(x)$, to $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

Słuchacze zechcą traktować występujący tu symbol dx jako swoisty znak interpunkcyjny, wskazujący względem jakiej zmiennej odbywa się całkowanie.

Powszechnie przyjętym zwyczajem jest także opuszczanie stałej C przy zapisie całki nieoznaczonej, o ile nie prowadzi to do nieporozumień.

Wprost ze znanych już wzorów na pochodne funkcji otrzymujemy wzory dotyczące niektórych całek nieoznaczonych:
PRZYKŁADY.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, dla $\alpha \neq -1$, $x > 0$ (jeśli $\alpha \in \mathbb{N}$, to wzór zachodzi dla $x \neq 0$)

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$, dla $x \neq 0$

3. $\int e^x dx = e^x$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$

5. $\int \sin x dx = -\cos x$

6. $\int \cos x dx = \sin x$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$ tg x, dla $x \neq n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -$ ctg x, dla $x \neq n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

2.2 Wybrane własności

WYBRANE WŁASNOŚCI.

1. Każda funkcja ciągła w $[a, b]$ ma w $[a, b]$ całkę nieoznaczoną.

2. Każda funkcja ciągła w (a, b) ma w (a, b) całkę nieoznaczoną.

3. *Działania arytmetyczne*. Jeśli funkcje f i g są całkowalne w przedziale I (otwartym lub domkniętym), a $c \in \mathbb{R}$, to całkowalne w I są również funkcje $f + g$, $f - g$, $c \cdot f$ oraz zachodzą wzory:

   (a) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
   (b) $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
   (c) $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx.$

4. *Całkowanie przez części*. Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne f' i g' w przedziale I (otwartym lub domkniętym), to:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

5. *Całkowanie przez podstawienie*. Załóżmy, że f jest ciągła w przedziale (a, b), a g ma ciągłą pochodną w przedziale (c, d), przy czym $a < g(t) < b$ dla $t \in (c, d)$. Wtedy dla $t \in (c, d)$:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt.$$

6. Załóżmy, że g ma ciągłą pochodną w przedziale (a, b) oraz $g(t) \neq 0$ dla $t \in (a, b)$. Wtedy dla $t \in (a, b)$:

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \ln |g(t)|.$$

   Zauważmy, że ten (użyteczny w zastosowaniach) wzór wynika z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie (wystarczy przyjąć $f(x) = \frac{1}{x}$ w założeniach tego twierdzenia).

PRZYKŁADY.

1. Rozważmy całkę $\int x \cdot e^x dx$. Skorzystamy z metody całkowania przez części, przyjmując: $f(x) = x$ oraz $g(x) = e^x$. Ponieważ $(e^x)' = e^x$, więc:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int (x)' \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x = (x-1) \cdot e^x.$$

2. Rozważmy całkę $\int 3^{4 \cdot x - 1} dx$. Dokonujemy podstawienia: $t = 4 \cdot x - 1$. Wtedy $x = \frac{t+1}{4} = g(t)$, czyli $g'(t) = \frac{1}{4}$. Korzystamy z wzoru na obliczanie całki przez podstawienie:

$$\int 3^{4 \cdot x - 1} dx = \int 3^t \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \cdot \int 3^t dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot x - 1}{\ln 3}.$$

3. Rozważmy całkę $\int \frac{1}{\sin x} dx$ dla $x \neq n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Wykorzystajmy najpierw znane fakty trygonometryczne:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\mathrm{tg}\, \frac{x}{2}}.$$

Pamiętamy, że:

$$(\mathrm{tg}\, \frac{x}{2})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{(\mathrm{tg}\, \frac{x}{2})'}{\mathrm{tg}\, \frac{x}{2}} dx = \ln |\mathrm{tg}\, \frac{x}{2}|,$$

w każdym z przedziałów $(n \cdot \pi, (n+1) \cdot \pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Opracowano wiele dalszych metod obliczania całek nieoznaczonych, m.in.: wzory rekurencyjne, rozkład (funkcji wymiernych) na ułamki proste, wzory na obliczanie całek złożonych funkcji niewymiernych oraz trygonometrycznych, itd.

3 Całka oznaczona

Powiedzieliśmy we wstępie, że całka funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ ma związek z polem powierzchni ograniczonej osią odciętych, krzywą $f(x)$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$. Rozważmy najpierw dwa proste przypadki.

1. Niech wykresem funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ będzie prosta o równaniu $y = m \cdot x + n$. Wtedy obszar ograniczony odcinkiem $[a, b]$, krzywą $y = m \cdot x + n$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ jest trapezem. Pole tego obszaru dane jest zatem wzorem:

$$\frac{1}{2} \cdot (m \cdot (a + b) + n) \cdot (b - a).$$

   Jaki jest związek tego pola z całką nieoznaczoną $F(x) = \int (m \cdot x + n) dx$? Po pierwsze: $F(x) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot x^2 + n \cdot x + C$, gdzie C jest stałą całkowania. Po drugie:

   (a) $F(a) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a^2 + n \cdot a + C$
   (b) $F(b) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot b^2 + n \cdot b + C$

   Wreszcie, po trzecie: $F(b) - F(a) = \frac{1}{2} \cdot (m \cdot (a + b) + n) \cdot (b - a)$, co wykazujemy prostym rachunkiem. Tak więc, rozważane pole jest równe różnicy wartości funkcji pierwotnej dla funkcji $f(x) = m \cdot x + n$, branych na końcach przedziału $[a, b]$.

2. Niech $f(x)$ będzie funkcją łamaną w przedziale $[a, b]$. Wtedy obszar ograniczony krzywą $f(x)$, odcinkiem $[a, b]$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ jest sumą trapezów. Jeśli bowiem punkty $x_i \in [a, b]$ są takie, że $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, że funkcja $f(x)$ jest liniowa w każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$, dla $0 < i \leqslant n$, to – na mocy obliczeń wykonanych w poprzednim punkcie – dla dowolnej funkcji $F(x)$ pierwotnej dla $f(x)$ pole tego obszaru jest równe:

$$\sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

   A zatem również w tym przypadku rozważane pole jest równe różnicy wartości funkcji pierwotnej dla funkcji $f(x)$, branych na końcach przedziału $[a, b]$.

Te przykłady mogą służyć za punkt wyjścia do następującej definicji.

Niech F będzie funkcją pierwotną dla funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$. *Całką oznaczoną* z funkcji f w przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Liczby a oraz b nazywamy wtedy, odpowiednio, *dolną* oraz górną granicą całkowania. Powszechnie używa się również skrótu: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Dociekliwi słuchacze mogą (a właściwie nawet powinni) zapytać: czy w przypadku *dowolnej* funkcji $f(x)$ określonej w przedziale $[a, b]$ pole obszaru ograniczonego odcinkiem $[a, b]$, krzywą $f(x)$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ równe jest $F(b) - F(a)$, gdzie F jest funkcją pierwotną dla funkcji f? Odpowiedzi na to pytanie dostarczają różne propozycje zdefiniowania wielkości $\int\limits_a^b f(x)dx$ tak, aby była ona równa $F(b) - F(a)$ oraz istotnie odpowiadała ona mierze rozważanego obszaru. Drugi z rozważanych wyżej przykładów powinien podsunąć słuchaczom pomysł, aby miarę rozważanego obszaru obliczać (przybliżać) jako sumę miar jakichś prostszych jego obszarów składowych. Owe obszary składowe powinny być przy tym stosownie małe, aby suma ich miar była dowolnie bliska mierze całego rozważanego obszaru. Czujemy zatem, że za chwilę pojawi się jakieś przejście graniczne: miara całego obszaru będzie określana jako granica sum obszarów składowych.

Zauważmy też, że obszar pod dowolną krzywą $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ może być przybliżany sumami obszarów prostokątnych na dwa sposoby:

1. Możemy dzielić przedział $[a, b]$ (czyli dziedzinę funkcji), otrzymując prostokątne pionowe paski, których suma przybliża rozważany obszar. Ten pomysł prowadzi do *całki Riemanna*.

2. Możemy dzielić przedział $[f(a), f(b)]$ (czyli przeciwdziedzinę funkcji), otrzymując inne prostokątne paski, których suma przybliża rozważany obszar. Ten pomysł prowadzi do *całki Lebesgue'a*.

Za chwilę podamy konstrukcję całki Riemanna. Przedtem jednak wyliczymy, bez podawania dowodów, niektóre ważne własności całki oznaczonej.

3.1 Wybrane własności

Dowody poniżej sformułowanych twierdzeń znajdą zainteresowani słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, Tom I, część 2, strony 166–177.
WYBRANE WŁASNOŚCI.

1. *Własności arytmetyczne*. Załóżmy, że f i g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$. Wtedy:

   (a) $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$

(b) $\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$.

(c) Jeśli $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a,b]$, to $\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$.

(d) Jeśli $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in [a,b]$, to $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

(e) $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$

(f) Jeśli $0 < h \leqslant b-a$, to istnieje $t \in (0,1)$ taka, że: $\int\limits_a^{a+h} f(x)dx = h \cdot f(a + t \cdot h)$.

W konsekwencji: $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leqslant (b-a) \cdot \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$.

(g) Jeśli $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ dla $x \in [a,b]$, to $F'(x) = f(x)$ w $[a,b]$.

W konsekwencji, jeśli F ma ciągłą pochodną F' w $[a,b]$, to $\int\limits_a^x F'(x)dx = F(x) - F(a)$.

2. *Całkowanie przez części*. Załóżmy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne f' i g' w przedziale $[a,b]$. Wtedy:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x)dx,$$

gdzie $[f(x) \cdot g(x)]_a^b = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$.

3. *Całkowanie przez podstawienie*. Załóżmy, że f jest ciągła w $[a,b]$ oraz że g ma ciągłą pochodną g' w $[c,d]$, przy czym $a \leqslant g(t) \leqslant b$ dla $t \in [c,d]$ oraz $g(c) = a$, $g(d) = b$. Wtedy:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

4. *Pierwsze twierdzenie o wartości średniej*. Załóżmy, że f i g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a,b]$ oraz że g ma stały znak w $[a,b]$. Istnieje wtedy liczba $t \in [a,b]$ taka, że:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(t) \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

5. *Drugie twierdzenie o wartości średniej.*Załóżmy, że f i g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a,b]$ oraz że g jest monotoniczna i ma ciągłą pochodną w $[a,b]$. Istnieje wtedy liczba $t \in [a,b]$ taka, że:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^t f(x)dx + g(b) \cdot \int_t^b f(x)dx.$$

Podane wyżej własności wykorzystywane są przy obliczaniu całek oznaczonych.

3.2 Całka Riemanna: definicja

Niech $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Każdy taki ciąg nazywamy *podziałem* odcinka $[a,b]$. Poszczególne przedziały $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leqslant i < n)$ nazywamy wtedy *podprzedziałami* tego podziału. *Średnicą* takiego podziału nazywamy liczbę $\max\limits_{0 \leqslant i < n}(x_{i+1} - x_i)$. Średnicę podziału Π oznaczamy przez $\delta(\Pi)$. *Normalnym ciągiem podziałów* (odcinka $[a,b]$) nazywamy każdy taki ciąg Π_m podziałów tego odcinka, których średnica dąży do zera, czyli taki, iż:

$$\lim_{m \to \infty} \delta(\Pi_m) = 0.$$

Niech f będzie funkcją ograniczoną w przedziale $[a,b]$ i niech Π będzie podziałem tego przedziału, wyznaczonym przez punkty:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Ponadto, niech $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$. Niech T będzie zbiorem wszystkich tych *punktów pośrednich* t_i. *Sumą Riemanna* funkcji f dla podziału Π przy wyborze punktów pośrednich w zbiorze T nazywamy liczbę:

$$R(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Słuchacze nie powinni mieć trudności z interpretacją geometryczną sum Riemanna.

Zachodzi następujący fakt, który wiąże sumy Riemanna z podaną wcześniej definicją całki oznaczonej:

TWIERDZENIE. *Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale $[a,b]$. Wtedy*:

1. *Dla każdej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieje liczba* $\delta > 0$ *taka, że dla każdego podziału* Π *odcinka* $[a,b]$*: jeśli* $\delta(\Pi) < \delta$*, to* $|R(\Pi) - \int\limits_a^b f(x)dx| < \varepsilon$*.*

2. *Dla każdego normalnego ciągu* (Π_m) *podziałów odcinka* $[a,b]$ *zachodzi równość:*

$$\lim_{m\to\infty} R(\Pi_m) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

DOWÓD 1. Niech $\varepsilon > 0$. Pamiętamy, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w nim jednostajnie ciągła. Tak więc, istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że: jeśli $|x - y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}$. Niech Π:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

będzie dowolnym podziałem przedziału $[a,b]$ o średnicy $\delta(\Pi) < \delta$. Gdy punkty t_i oraz x należą do przedziału $[x_{i-1}, x_i]$, to oczywiście spełniony jest warunek $|t_i - x| < \delta$. W konsekwencji, mamy wtedy: $|f(t_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}$. Tak więc, mamy kolejno:

1. $|R(\Pi) - \int\limits_a^b f(x)dx| =$

2. $|\sum\limits_{i=1}^n f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) - \sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx| =$

3. $|\sum\limits_{i=1}^n (\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t_i)dx - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx)| =$

4. $|\sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t_i) - f(x))dx| \leqslant$

5. $\sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |(f(t_i) - f(x))|dx \leqslant$

6. $\sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}dx =$

7. $\frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)} \cdot \sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx =$

8. $\frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) =$

9. $\frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)} \cdot (x_n - x_0) =$

10. $\frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)} \cdot (b-a) =$

11. $\frac{\varepsilon}{2}$.

12. Ponieważ $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, więc mamy ostatecznie: $|R(\Pi) - \int\limits_a^b f(x)dx| < \varepsilon$.

DOWÓD 2. Niech (Π_m) będzie normalnym ciągiem podziałów przedziału $[a, b]$. Oznacza to, że:

$$\lim_{m\to\infty} \delta(\Pi_m) = 0.$$

Na mocy pierwszej części twierdzenia, dla $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć $\delta > 0$ tak, aby dla $\delta(\Pi_m) < \delta$ zachodziła nierówność:

$$|R(\Pi_m) - \int\limits_a^b f(x)dx| < \varepsilon.$$

Wybierzmy indeks N taki, aby $\delta(\Pi_m) < \delta$ dla $m > N$. Wtedy:

$$|R(\Pi_m) - \int\limits_a^b f(x)dx| < \varepsilon$$

dla wszystkich $m > N$. To oznacza, że:

$$\lim_{m\to\infty} R(\Pi_m) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Udowodnione przed chwilą twierdzenie uzasadnia poprawność następującej definicji.

Załóżmy, że f jest funkcją ograniczoną w przedziale $[a, b]$. Mówimy, że f jest funkcją *całkowalną w sensie Riemanna* w $[a, b]$, gdy dla każdego normalnego ciągu podziałów (Π_m) przedziału $[a, b]$ oraz przy dowolnym wyborze punktów pośrednich z podprzedziałów tego przedziału ciąg sum Riemanna $(R(\Pi_m))$ jest zbieżny. Granicę $\lim\limits_{m\to\infty} R(\Pi_m)$ nazywamy wtedy *całką Riemanna* z funkcji f w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy przez $\int\limits_a^b f(x)dx$.

UWAGI.

1. Dla funkcji ciągłych całka Riemanna jest równa całce oznaczonej.

2. Istnieją funkcje ograniczone nieciągłe (a nawet nie posiadające funkcji pierwotnej), które są całkowalne w sensie Riemanna. Taka jest np. funkcja f określona w przedziale $[0, 1]$ następująco: $f(x) = 1$ dla $x \in [0, \frac{1}{2})$, $f(x) = 0$ dla $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Można wykazać (zob. np. Musielak, Musielak 2004, Tom I, część 2, str. 189), że dla każdego normalnego ciągu podziałów odcinka $[0, 1]$ ciąg jego sum Riemanna jest zbieżny do $\frac{1}{2}$.

3. Istnieją jednak także funkcje ograniczone, które nie są całkowalne w sensie Riemanna – taka jest np. funkcja Dirichleta (funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych).

4. Zdefiniujmy jeszcze: $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$ oraz $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$. Używamy następujących terminów:

   (a) $\underline{R}(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$: *suma dolna* dla podziału Π

   (b) $\overline{R}(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$: *suma górna* dla podziału Π.

   Tego typu sumy służyć mogą do zdefiniowania tzw. *dolnych i górnych całek Darboux* funkcji f w przedziale $[a, b]$:

   (a) Całka dolna Darboux: $\underline{\int\limits_{a}^{b}} f(x)dx = \sup\limits_{\Pi} \underline{R}(\Pi)$.

   (b) Całka górna Darboux: $\overline{\int\limits_{a}^{b}} f(x)dx = \inf\limits_{\Pi} \overline{R}(\Pi)$.

   Dowodzi się, że funkcja ograniczona w $[a, b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy jej dolna całka Darboux równa jest jej górnej całce Darboux.

Całka Riemanna jest przyjaznym obiektem matematycznym, jeśli chodzi np. o jej walory dydaktyczne. Pewnych jej mankamentów teoretycznych (np. dotyczących przejść granicznych) można pozbyć się, przechodząc do ogólniejszego pojęcia całki. Ze smutkiem stwierdzamy, że ograniczone ramy czasowe tego usługowego kursu nie pozwalają nam na omówienie tej problematyki.

3.3 Zastosowania geometryczne

W podanych niżej przykładach ograniczamy się do funkcji jednej zmiennej.
PRZYKŁADY.

1. *Długość łuku krzywej*. Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$, to długość łuku krzywej Lo równaniu $y = f(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, wynosi:

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

2. *Pole powierzchni figury płaskiej*. Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i spełniają w nim warunek $g(x) \leqslant f(x)$, to pole obszaru P, ograniczonego krzywymi $y = f(x)$, $y = g(x)$ oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, jest równe:

$$|P| = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

3. *Pole powierzchni bryły obrotowej*. Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$, to pole powierzchni bryły obrotowej S, powstałej przez obrót wokół osi odciętych wykresu funkcji $y = f(x)$, dla $x \in [a, b]$, wynosi:

$$|S| = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

4. *Objętość bryły obrotowej*. Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to objętość bryły obrotowej V powstałej przez obrót wokół osi odciętych wykresu funkcji $y = f(x)$, dla $x \in [a, b]$, wynosi:

$$|V| = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

Dodajmy jeszcze, że w przypadku *parametrycznego* opisu krzywych (na płaszczyźnie lub w przestrzeni) także możemy wykorzystać stosowne wzory na obliczanie długości takich krzywych. Dla przykładu, jeśli krzywa płaska C jest określona równaniami parametrycznymi $x = x(t)$ oraz $y = y(t)$, przy czym funkcje $x(t)$ oraz $y(t)$ mają ciągłe pochodne w $[a, b]$, to długość C podaje wzór:

$$|C| = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Przy podanych założeniach można udowodnić, że C jest *prostowalna* (*rektyfikowalna*), co oznacza – mówiąc intuicyjnie – że ciąg długości łamanych coraz dokładniej przybliżających C jest ograniczony z góry.

Wyprowadzenie wszystkich powyżej podanych wzorów znajdą zainteresowani słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, Tom I, część 2, strony 199–214. Jak być może domyślają się słuchacze, we wszystkich tych przypadkach wychodzimy od stosownego ciągu normalnego podziałów, wyznaczamy sumy Riemanna i otrzymujemy podane wzory poprzez przejścia graniczne.

3.4 Zastosowania fizyczne i ekonomiczne

W podanych niżej przykładach ograniczamy się do funkcji jednej zmiennej.
PRZYKŁADY.

1. *Droga w ruchu o zmiennej prędkości*. Jeśli punkt materialny porusza się ruchem prostoliniowym ze zmienną w czasie prędkością $v(t)$, to droga s przebyta przez ten punkt w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem:

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

2. *Praca*. Jeżeli równolegle do osi odciętych działa zmienna siła F, to praca wykonana przez tę siłę na drodze od punktu a do punktu b wyraża się wzorem:

$$W = \int\limits_a^b F(x)dx.$$

3. *Energia*. Jeżeli u oraz i oznaczają odpowiednio wartości chwilowe napięcia i natężenia prądu zmiennego, to całkowita energia pobrana w czasie t ze źródła tego prądu wynosi:

$$E = \int_0^t u(t) \cdot i(t) dt.$$

4. *Środek masy*. Podamy informacje, jak ustalać środek masy dla pewnych obiektów jedno- dwu- oraz trójwymiarowych.

   Załóżmy, że pręt o końcach w punktach a i b ma masę m oraz że funkcja *gęstości masy* ρ jest nieujemną funkcją całkowalną w sensie Riemanna taką, że dla każdego przedziału $[c, d] \subseteq [a, b]$ masa części pręta na odcinku $[c, d]$ jest równa $\int_c^d \rho(x)dx$. *Środek masy* pręta to punkt $t \in [a, b]$ taki, że:

   $$t = \frac{\int_a^b x \cdot \rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}.$$

   Jeśli gęstość pręta jest stała (czyli pręt jest *jednorodny*), to:

   $$t = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

   Jeśli natomiast gęstość pręta wyraża się funkcją $\rho(x) = \frac{1}{x}$ (im dalej od początku tym mniejsza gęstość) oraz np. $a = 1, b = 2$, to korzystając z powyższego wzoru otrzymujemy, iż środek masy pręta równy jest w tym przypadku $t = \frac{1}{\ln 2}$.

   Podobnie określamy *środek masy* dla obszaru P ograniczonego krzywymi $y = f(x)$ i $y = -f(x)$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ (a więc obszaru o osi symetrii zawierającej przedział $[a, b]$, przy założeniu, że masa jest rozłożona w sposób jednorodny w tym obszarze):

   $$t = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

   Wreszcie, *środek masy bryły jednorodnej* V, otrzymanej przez obrót obszaru P dookoła osi odciętych, dla $a \leqslant x \leqslant b$, gdzie na osi symetrii obszaru P

rozkładamy masę o gęstości $\pi \cdot f^2(x)$, określamy wzorem:

$$t = \frac{\int_a^b x \cdot f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

5. *Moment bezwładności*. Podamy informacje, jak ustalać moment bezwładności dla pewnych obiektów jedno- dwu- oraz trójwymiarowych, poruszających się ruchem obrotowym.

   Jak być może pamiętają słuchacze z edukacji szkolnej, *momentem bezwładności* punktu materialnego o masie m względem osi obrotu ℓ jest iloczyn kwadratu odległości tego punktu od osi ℓ przez masę tego punktu. Za moment bezwładności skończonego układu punktów materialnych względem osi obrotu ℓ uważamy sumę momentów bezwładności względem osi obrotu ℓ wszystkich punktów tego układu. Gdy rozważamy obiekty z ciągłym rozkładem masy, zamiast sumowania wykorzystujemy całkowanie.

   Słuchacze pamiętają też zapewne, że moment bezwładności w ruchu obrotowym spełnia podobną rolę jak masa w ruchu prostoliniowym. Jeśli I jest momentem bezwładności w obrocie dookoła pewnej osi z prędkością kątową ω, to energia kinetyczna tak obracającego się ciała wyraża się wzorem: $E = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$.

   Załóżmy, że pręt o końcach w punktach a i b ma masę m oraz że ρ jest nieujemną całkowalną w sensie Riemanna funkcją gęstości masy rozłożonej na tym pręcie. Wtedy *moment bezwładności* I tego pręta względem prostej ℓ określamy wzorem:

$$I = \int_a^b x^2 \cdot \rho(x)dx.$$

   W szczególności, gdy pręt o masie m jest jednorodny (czyli ρ jest stała: $\rho = \frac{m}{(b-a)}$), to otrzymujemy:

   $I = \int_a^b x^2 \cdot \rho dx = \rho \cdot \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{m}{(b-a)} \cdot \frac{(b-a)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)}{3} = \frac{m\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)}{3}$.

   Gdy oś obrotu przechodzi przez środek pręta (odcinka $[a, b]$), czyli dla $a = -r$, $b = r$, otrzymujemy (znany ze szkoły?) wzór: $I = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot m$.

   Podajmy jeszcze moment bezwładności dla tarczy kołowej o promieniu r oraz masie m: $I = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot m$.

Wreszcie, moment bezwładności jednorodnej bryły obrotowej V o całkowitej masie m otrzymanej przez obrót zbioru punktów (x, y), dla których $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, gdzie f jest nieujemną funkcją całkowalną w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$ wyraża się wzorem:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{\int\limits_a^b f^4(x)dx}{\int\limits_a^b f^2(x)dx}.$$

W szczególności, moment bezwładności jednorodnej kuli o promieniu r i masie m obracającej się względem swojej średnicy (w tym przypadku obracana krzywa ma postać $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $a = -r$, $b = r$) dany jest wzorem:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{\int\limits_{-r}^r (r^2 - x^2)^2 dx}{\int\limits_{-r}^r (r^2 - x^2)dx} = \frac{2}{5} \cdot r^2 \cdot m.$$

Wyprowadzenie wszystkich tych wzorów dotyczących momentów bezwładności (a także podanych wyżej wzorów dotyczących środka masy) znajdą zainteresowani słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, Tom I, część 2, strony 214–222. Jak być może domyślają się słuchacze, we wszystkich tych przypadkach wychodzimy od stosownego ciągu normalnego podziałów, wyznaczamy sumy Riemanna i otrzymujemy podane wzory poprzez przejścia graniczne.

6. *Zapas towaru*. Załóżmy, że funkcja całkowalna $f(t)$ określa intensywność napływu towaru do magazynu w zależności od czasu $t \in [0, T]$. Wtedy wielkość zgromadzonego po upływie czasu T w magazynie towaru jest równa $\int\limits_0^T f(t)dt$. Wielkość zapasów zgromadzonych od chwili t_1 do chwili t_2 (gdzie $0 < t_1 < t_2 < T$) równa jest $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$. Wreszcie, średnia wielkość zapasów zgromadzonych w okresie od t_1 do t_2 jest równa:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

7. *Realny zysk*. Zysk $z(t)$ otrzymany z eksploatacji jakiegoś urządzenia (np. gilotyny) obliczamy odejmując od dochodu $D(t)$ z eksploatacji koszty $K(t)$ utrzymania tego urządzenia: $z(t) = D(t) - K(t)$. *Przedziałem opłacalności urządzenia* nazywamy przedział czasowy $[0, T]$, gdzie T jest największą liczbą t, dla której $z(t) \geqslant 0$. Realny zysk uzyskany z eksploatacji urządzenia w czasie od t_1 do t_2 (gdzie $0 < t_1 < t_2 < T$) jest równy:

$$Z = \int_{t_1}^{t_2} z(t)dt.$$

8. *Kapitał*. Niech $K(t)$ oznacza zasób kapitału w chwili t. Wtedy oczywiście $K'(t)$ oznacza prędkość wzrostu kapitału. Przyrost kapitału w chwili t jest równy wartości strumienia inwestycji netto $I(t)$ w chwili t. Tak więc: $K'(t) = I(t)$. Otrzymujemy zatem: $K(t) = \int I(t)dt$. Wielkość kapitału w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ równa jest:

$$\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt = K(t_2) - K(t_1).$$

9. *Modele wzrostu*. W makroekonomii proponuje się różne modele matematyczne, opisujące zależności między takimi czynnikami, jak np. dochód narodowy, konsumpcja, kapitał, produkcja, stan technologii, itd. To, na ile modele te trafnie oddają zależności ekonomiczne zależy m.in. od przyjmowanych założeń na temat gospodarowania. Wzrost gospodarczy opisywano m.in. modelami: Harroda-Domara, Solowa-Swana, Ramseya. Jest dość oczywiste, że matematyczne aspekty takich rozważań uwzględniać muszą pojęcia związane z rachunkiem różniczkowym i całkowym (a także z, m.in.: rachunkiem wariacyjnym, teorią równań różniczkowych, algebrą liniową, programowaniem, itd.). Rozważmy – w charakterze dydaktycznego przykładu – (nieco już dziś przestarzały) model wzrostu Harroda-Domara (zob. np. Ostrowski 2004, str. 145–146). Przyjmuje się w nim następujące założenia (tu r oraz s są stosownie dobranymi parametrami):

   (a) Dochód $D(t)$ w chwili t jest proporcjonalny do zaangażowanego w tej chwili kapitału $K(t)$, czyli: $D(t) = r \cdot K(t)$.

   (b) W każdym momencie t na inwestycje $I(t)$ przeznacza się stałą część kapitału: $I(t) = s \cdot D(t)$.

   (c) Inwestycje w chwili t to przyrost kapitału w tej chwili, czyli: $I(t) = K'(t)$.

Na mocy tych założeń mamy kolejno (słuchacze zechcą zwrócić uwagę na zastosowanie szczególnego przypadku całkowania przez podstawienie, omówionego wcześniej w niniejszym wykładzie):

(a) $I(t) = r \cdot s \cdot K(t)$

(b) $I'(t) = r \cdot s \cdot K'(t)$

(c) $I'(t) = r \cdot s \cdot I(t)$

(d) $\frac{I'(t)}{I(t)} = r \cdot s$

(e) $\int \frac{I'(t)}{I(t)} dt = \int r \cdot s dt$

(f) $\ln |I(t)| = r \cdot s \cdot t + C_1$, gdzie C_1 jest stałą całkowania

(g) $I(t) = C_2 \cdot e^{r \cdot s \cdot t}$, gdzie $C_2 = e^{C_1}$.

4 Zachęta do refleksji

1. Czy całkowanie jest procesem algorytmicznym?
2. Jak obliczamy pole powierzchni „zakrzywionej”?
3. Jak obliczamy objętość bryły ograniczonej takim „zakrzywionymi” powierzchniami?
4. Jak obliczamy długość krzywej na takiej „zakrzywionej” powierzchni?

5 Podsumowanie

To, co należy zapamiętać z niniejszego wykładu:

1. Całka nieoznaczona: definicja, całkowanie przez części i przez podstawienie.
2. Całka oznaczona: definicja i interpretacja geometryczna.
3. Całka Riemanna: definicja i interpretacja geometryczna.

6 Wybrane pozycje bibliograficzne

Musielak, H., Musielak, J. 2004. *Analiza matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Ostrowski, A. 2004. *Matematyka z przykładami zastosowań w naukach ekonomicznych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego, Opole.

7 Dodatek

W niniejszym dodatku w sposób brutalnie zwięzły podajemy garstkę informacji uzupełniających dotychczasowe skromne wprowadzenie w podstawy analizy matematycznej. Celem tego dodatku nie jest więc dokładne przedstawienie podanych treści, ale raczej wskazanie słuchaczom, że w przypadku poważniejszych zastosowań matematyki (w tym przypadku: analizy matematycznej) w naukach kognitywnych trzeba wyjść poza całkiem elementarne wiadomości zawarte w dzisiejszym wykładzie.

7.1 Całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych

Ważne – zarówno ze względów teoretycznych, jak i praktycznych – jest to, jakie warunki zgodności zachodzą między operacją całkowania a operacjami tworzenia granicy ciągu funkcyjnego oraz sumy szeregu funkcyjnego. Podamy jedynie sformułowania dwóch twierdzeń dotyczących tych zagadnień:

1. Jeśli ciąg (f_n) funkcji ciągłych w przedziale $[a, b]$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $[a, b]$, to:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

2. Jeśli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ funkcji f_n ciągłych w przedziale $[a, b]$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $[a, b]$, to:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Założenie jednostajnej zbieżności jest w obu przypadkach istotne. Student nauk kognitywnych może zapytać: a dlaczego powyżej podane fakty miałyby być dla mnie interesujące? Ograniczymy się w odpowiedzi do stwierdzenia, że niezwykle często korzysta się z reprezentacji złożonych funkcji rzeczywistych przez odpowiadające im szeregi funkcyjne. Jest to istotne np. w aproksymacji pól ograniczonych skomplikowanymi krzywymi poprzez sumy pól określonych dla stosownych ciągów prostszych funkcji.

7.2 Całki niewłaściwe

Dotychczas rozważaliśmy przypadki, gdy zarówno całka funkcji ciągłej, jak i całka Riemanna definiowane były dla ograniczonych przedziałów dziedziny funkcji oraz funkcji ograniczonych. Dociekliwy student nauk kognitywnych może zapytać: a co z pozostałymi przypadkami – gdy bądź rozważana funkcja jest nieograniczona bądź jej dziedzina jest nieograniczona? W takich przypadkach określamy różne rodzaje *całek niewłaściwych* (te rozważane dotychczas nazywając *całkami właściwymi*). Podamy jedynie niezbędne definicje, dla zaspokojenia ciekawości takich dociekliwych słuchaczy.

1. Załóżmy, że funkcja f jest określona, ciągła oraz nieograniczona w przedziale $(a, b]$. Jeśli istnieje skończona granica:

   $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

   to nazywamy ją *całką niewłaściwą pierwszego rodzaju* z funkcji f w przedziale $(a, b]$ i oznaczamy przez $\int\limits_a^b f(x)dx$.

2. Załóżmy, że funkcja f jest określona, ciągła oraz nieograniczona w przedziale $[a, b)$. Jeśli istnieje skończona granica:

   $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

   to nazywamy ją *całką niewłaściwą pierwszego rodzaju* z funkcji f w przedziale $[a, b)$ i oznaczamy przez $\int\limits_a^b f(x)dx$.

3. Gdy granice, o których mowa w powyższych punktach są równe $+\infty$ lub $-\infty$, to mówimy, że całka $\int\limits_a^b f(x)dx$ jest *rozbieżna* do, odpowiednio, $+\infty$ lub $-\infty$.

   Gdy oba końce przedziału $[a, b]$ są punktami nieograniczoności funkcji f ciągłej w (a, b), to wybierając punkt $c \in (a, b)$ możemy sprowadzić ten przypadek do wyżej omówionych (pomijamy pewne szczegóły). Podobnie postępujemy, gdy funkcja f ma skończoną liczbę punktów nieograniczoności w (a, b) (pozostawiamy szczegóły refleksji słuchaczy).

4. Załóżmy, że funkcja f jest określona i ciągła w przedziale $[a, \infty)$. Jeśli istnieje skończona granica:
$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx,$$
to nazywamy ją *całką niewłaściwą drugiego rodzaju* z funkcji f w przedziale $[a, \infty)$ i oznaczamy przez $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

5. Załóżmy, że funkcja f jest określona i ciągła w przedziale $(-\infty, b]$. Jeśli istnieje skończona granica:
$$\lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx,$$
to nazywamy ją *całką niewłaściwą drugiego rodzaju* z funkcji f w przedziale $(-\infty, b]$ i oznaczamy przez $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$.

6. Gdy granice, o których mowa w dwóch powyższych punktach są równe $+\infty$ lub $-\infty$, to mówimy, że całka $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ (lub całka $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$) jest *rozbieżna* do, odpowiednio, $+\infty$ lub $-\infty$.

7. Załóżmy, że funkcja f jest określona i ciągła w $(-\infty, +\infty)$ oraz niech $c \in \mathbb{R}$. Jeśli obie całki niewłaściwe $\int\limits_{-\infty}^c f(x)dx$ oraz $\int\limits_c^\infty f(x)dx$ istnieją i są skończone, to liczbę:
$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx$$
nazywamy *całką niewłaściwą drugiego rodzaju* z funkcji f w $(-\infty, +\infty)$. W takim przypadku mówimy, że całka $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ jest *zbieżna*. Jeśli natomiast jedna z całek $\int\limits_{-\infty}^c f(x)dx$ oraz $\int\limits_c^\infty f(x)dx$ nie jest skończona lub obydwie są równe $+\infty$ (bądź $-\infty$), to mówimy, że całka $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ jest *rozbieżna*.

8. Uważni słuchacze domyślają się już, że pozostaje do rozważenia przypadek funkcji, które w przedziałach $[a, \infty)$ lub $(-\infty, b]$ lub $(-\infty, +\infty)$ są ciągłe oprócz pewnej skończonej liczby punktów wewnątrz tych przedziałów. Taki przypadek (tzw. *całki niewłaściwe trzeciego rodzaju*) sprowadzamy do trzech omówionych przed chwilą w oczywisty sposób, rozważając całki z funkcji ciągłych określonych na przedziałach między owymi punktami nieciągłości.

Dociekliwi słuchacze mogli zauważyć, że całki niewłaściwe pierwszego i drugiego rodzaju są „jakoś podobne" do szeregów nieskończonych. Jest tak istotnie – dowodzi się warunków koniecznych i wystarczających zbieżności tego typu całek, które są podobne do odnośnych warunków formułowanych dla szeregów nieskończonych (tzw. *kryterium całkowe zbieżności szeregów*).

Słuchacze spotkają się z całkami niewłaściwymi np. w wykładach ze statystyki. W tym miejscu zachęcamy słuchaczy do refleksji nad – intuicyjnie mówiąc – oswajaniem nieskończoności pojawiającej się przy omawianiu całek niewłaściwych poprzez stosownie dobrane przejścia graniczne.

7.3 Jeszcze o pojęciu miary: miara Lebesgue'a

Jak wspomniano we wstępie do niniejszego wykładu, pojęcie *miary* wiążemy z pewnymi szczególnymi rodzinami zbiorów: σ-*algebrami*. Funkcję miary definiujemy dopiero wtedy, gdy wybrana została już taka rodzina, czyli gdy podejmiemy decyzję, które zbiory uważamy za *mierzalne*. Przykładem rodziny zbiorów mierzalnych w $\mathbb{R}$ jest rodzina $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ wszystkich zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$, wspomniana na początku tego wykładu. Na marginesie dodajmy, że zbiory borelowskie określać możemy nie tylko w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^n$, ale również w nieco szerszej klasie przestrzeni. W przypadku $\mathbb{R}$ zbiory borelowskie generowane były przez przedziały otwarte. W przypadku $\mathbb{R}^n$ w naturalny sposób określamy *przedziały* n-wymiarowe, jako produkty kartezjańskie „zwykłych" przedziałów w $\mathbb{R}$.

Przypuśćmy, że naszym celem jest określenie zbiorów mierzalnych w $\mathbb{R}$ (lub w $\mathbb{R}^n$) w taki sposób, aby klasa ta była możliwie jak najobszerniejsza oraz żeby zdefiniowana dla tych zbiorów miara pokrywała się z wartościami, które charakteryzują długość, pole powierzchni oraz objętość w znanych ze szkoły, dobrze oswojonych przypadkach. Dobrym rozwiązaniem tego problemu jest tzw. *miara Lebesgue'a*. Nie przedstawimy jej konstrukcji w sposób dokładny, ograniczając się jedynie do przekazania słuchaczom pewnych intuicji.

W przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ można określić miarę μ na różne sposoby. Wyróżnionym sposobem jest przyjęcie, że $\mu((a, b]) = b - a$ (wtedy również $\mu((a, b)) = \mu([a, b]) = \mu([a, b)) = b - a$). Nazwijmy tę miarę *miarą borelow-*

ską. Można tego typu miarę określić oczywiście również w dowolnej przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n))$.

Dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ jego *zewnętrzna miara Lebesgue'a* $\lambda^*(A)$ zdefiniowana jest następująco:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) : (I_k)_{k \in \mathbb{N}_+} \text{ jest ciągiem przedziałów takim, że } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}.$$

Słuchacze nie powinni mieć trudności z interpretacją geometryczną tej konstrukcji: zewnętrzna miara Lebesgue'a zbioru A to kres dolny sum miar borelowskich rodzin przedziałów takich, że suma (teoriomnogościowa) każdej takiej rodziny pokrywa całkowicie (zawiera) zbiór A. Tak więc, „przybliżamy" wielkość zbioru A przez pokrycia tego zbioru przedziałami (dla których mamy już dobrze określoną miarę borelowską). Suma takiej rodziny przedziałów może nie pokrywać się ze zbiorem A, chcemy więc zagwarantować jeszcze, że sumaryczna miara takiej rodziny różni się dowolnie mało od wielkości, którą chcemy przypisać zbiorowi A jako jego miarę.

Określamy rodzinę $\mathcal{L}$ *zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a* następująco. $A \in \mathcal{L}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$:

$$\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(A \cap X) + \lambda^*(A \cap (\mathbb{R} - X)).$$

Intuicyjny sens tego warunku postarajmy się wyrazić następująco. $A \in \mathcal{L}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jakkolwiek podzielimy zbiór A na dwa rozłączne podzbiory, to suma ich zewnętrznych miar Lebesque'a nie przekroczy zewnętrznej miary Lebesgue'a całego zbioru A. Można udowodnić, że warunek ten gwarantuje to właśnie, czego pożądaliśmy: zewnętrzna miara Lebesgue'a zbioru $A \in \mathcal{L}$ wystarczająco dobrze charakteryzuje „wielkość" zbioru A, intuicyjnie mówiąc.

Dowodzi się, że $\mathcal{L}$ jest σ-algebrą, a zatem $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ jest przestrzenią mierzalną. Dla zbiorów $A \in \mathcal{L}$ określamy ich *miarę Lebesgue'a* $\lambda(A)$ w sposób następujący:

$$\lambda(A) = \lambda^*(A).$$

Łatwo sprawdzić, że λ istotnie jest miarą w przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$. Wyliczmy, bez podawania szczegółów, niektóre własności tej miary:

1. Wprost z definicji miary Lebesgue'a wynika, że wszystkie zbiory borelowskie są mierzalne w sensie Lebesgue'a. Dla $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ zachodzi równość: $\mu(A) = \lambda(A)$. Oznacza to, między innymi, że wartości miary Lebesgue'a pokrywają się z wartościami, które charakteryzują długość, pole powierzchni oraz objętość w znanych ze szkoły, dobrze oswojonych przypadkach.

2. Miara borelowska jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia. Nie jest jednak *miarą zupełną*. Miara Lebesgue'a jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia, a ponadto jest miarą zupełną.

3. Niech $\mathcal{N}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$, których miara Lebesgue'a wynosi 0. Dowodzi się, że: każdy zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a jest sumą zbioru borelowskiego i zbioru miary 0 Lebesgue'a. Inaczej mówiąc: zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a różnią się „zaniedbywalnie mało" od zbiorów borelowskich.

4. Każdy skończony lub przeliczalny podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ ma miarę Lebesgue'a równą 0. W szczególności, $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, czyli zbiór wszystkich liczb wymiernych ma miarę Lebesgue'a równą 0. Słuchacze zechcą zauważyć, że wyraźnie jest w tym przypadku widoczna różnica między pewnymi własnościami topologicznymi (zbiór $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$, czyli „duży" topologicznie), a własnościami miarowymi (zbiór $\mathbb{Q}$ jest „mały" w sensie miary Lebesgue'a).

5. Przy założeniu aksjomatu wyboru w teorii mnogości można udowodnić, że istnieją zbiory liczb rzeczywistych, które nie są mierzalne w sensie Lebesgue'a. W twierdzeniu Banacha-Tarskiego (o paradoksalnym rozkładzie kuli w przestrzeni trójwymiarowej) wykorzystuje się właśnie tego typu zbiory. Zbiory Vitalego, o których wspominaliśmy w jednym z poprzednich wykładów nie są mierzalne w sensie Lebesgue'a. Jeśli rozważamy teorię mnogości Zermelo-Fraenkla bez aksjomatu wyboru, to nie można w niej udowodnić istnienia zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Miarę Lebesgue'a określić można oczywiście także w każdej z przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n))$ (a nawet dla bardziej ogólnych przestrzeni).

Miara Lebesgue'a jest obecnie najbardziej powszechnie używaną miarą. Uważamy, że studenci nauk kognitywnych powinni o niej usłyszeć, aby nie byli bezbronni intelektualnie studiując różnorakie modele proponowane w naukach kognitywnych, wykorzystujące tę miarę.

7.4 Całka Lebesgue'a

Możemy pozbyć się pewnych mankamentów całkowania w sensie Riemanna przechodząc do ogólniejszego pojęcia całki, wykorzystującego omówioną przed chwilą miarę Lebesgue'a.

Słuchacze pamiętają, że w przypadku całki Riemanna funkcji f w przedziale $[a, b]$ mierzyliśmy dziedzinę tej funkcji – braliśmy pod uwagę podziały przedziału $[a, b]$, wartości funkcji f w punktach pośrednich i całka Riemanna określona była jako granica sum Riemanna. Intuicyjnie mówiąc, całka ta rozumiana zatem była jako granica sum miar prostokątnych *pionowych* pasków pokrywających obszar pod wykresem funkcji f w przedziale $[a, b]$.

Obecnie postąpimy w inny sposób. Intuicyjnie mówiąc, będziemy przybliżać miarę omawianego obszaru przez innego rodzaju prostokątne paski powstające przez podział przeciwdziedziny funkcji f. Dla uproszczenia, przyjmiemy, że przeciwdziedzina rozważanej funkcji zawarta jest w przedziale $[0, b]$. Dzielimy ten przedział na rozłączne podprzedziały o końcach:

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b.$$

Wybieramy punkty pośrednie $t_i \in [a_i, a_{i+1}]$ dla $0 \leqslant i < n$. Rozważmy teraz przeciwobrazy przedziałów $A_i = (a_i, a_{i+1}]$, czyli zbiory: $f^{-1}[(a_i, a_{i+1}]]$. Obszary $A_i \times [0, c_i]$ są parami rozłączne. Ich suma teoriomnogościowa przybliża obszar pod wykresem funkcji f. Miara każdego takiego obszaru jest równa iloczynowi c_i przez miarę zbioru A_i, zależy ona zatem od tego, jaką funkcję miary weźmiemy pod uwagę. W konstrukcji całki Lebesgue'a bierzemy pod uwagę, jak domyślają się słuchacze, miarę Lebesgue'a.

Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją *mierzalną* (w sensie Lebesgue'a), gdy przeciwobraz każdego przedziału niewłaściwego (c, ∞) jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, czyli gdy $f^{-1}[(c, \infty)] \in \mathcal{L}$. Można udowodnić, że ten warunek jest równoważny żądaniu, aby przeciwobraz każdego zbioru borelowskiego był mierzalny w sensie Lebesgue'a. Dowodzi się również, że zbiór funkcji mierzalnych jest domknięty na podstawowe operacje algebraiczne oraz różnego rodzaju granice punktowe ciągów funkcyjnych.

Zakładamy, że słuchacze pamiętają definicję funkcji charakterystycznej χ_X zbioru X (zob. wykład trzeci), czyli funkcji określonej warunkami: $\chi_X(x) = 1$, gdy $x \in X$ oraz $\chi_X(x) = 0$, gdy $x \notin X$.

Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją prostą*, gdy:

1. jej przeciwdziedzina jest zbiorem skończonym (czyli gdy f przyjmuje tylko skończenie wiele wartości) oraz

2. dla każdej liczby c_i będącej wartością funkcji f przeciwobraz $A_i = f^{-1}(c_i)$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, czyli gdy $f^{-1}(c_i) \in \mathcal{L}$.

Tak więc, każdą funkcję prostą f można przedstawić jako kombinację liniową funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a:

$$f(x) = \sum c_i \cdot \chi_{A_i}(x),$$

gdzie sumowanie bierzemy po (skończonym) zbiorze wszystkich wartości c_i funkcji f, gdzie $A_i = f^{-1}(c_i)$ oraz $A_i \in \mathcal{L}$.

Wygodne będzie zastosowanie następujących oznaczeń. Jeśli f jest funkcją określoną na zbiorze mierzalnym w sensie Lebesgue'a (o wartościach w $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) to możemy zapisać tę funkcję w postaci $f = f^+ - f^-$, gdzie:

1. $f^+(x) = f(x)$ gdy $f(x) > 0$, zaś $f^+(x) = 0$ w przeciwnym przypadku;
2. $f^-(x) = -f(x)$ gdy $f(x) < 0$, zaś $f^-(x) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Wtedy f^+ oraz f^- są obie funkcjami nieujemnymi. Ponadto: $|f| = f^+ + f^-$.

Całkę Lebesgue'a $\int\limits_D f(x)d\lambda$ z dowolnej funkcji mierzalnej, gdzie $D \in \mathcal{L}$ jest obszarem całkowania (dziedziną funkcji f) definiujemy zwykle w kilku krokach:

1. $\int \chi_D(x)d\lambda = \lambda(D)$.
2. Jeżeli f jest nieujemną funkcją prostą $f(x) = \sum c_i \cdot \chi_{A_i}(x)$, to przyjmujemy:
   $\int f(x)d\lambda = \int (c_i \cdot \chi_{A_i}(x))d\lambda = \sum\limits_k c_i \cdot \int \chi_{A_i}(x)d\lambda = \sum\limits_k c_i \cdot \lambda(A_i)$.
3. Jeśli $A \subseteq D$ gdzie $A \in \mathcal{L}$ oraz $g(x) = \sum c_i \cdot \chi_{A_i}(x)$ jest funkcją prostą, to:
   $\int\limits_A g(x)d\lambda = \int(\chi_A(x) \cdot g(x))d\lambda = \sum\limits_k \lambda(A \cap A_i)$.
4. Jeśli f jest nieujemną funkcją mierzalną określoną na zbiorze D i wartościach w $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, to przyjmujemy:
   $\int\limits_D f(x)d\lambda = \sup\{\int\limits_D g(x)d\lambda : 0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ gdzie g(x) jest funkcją prostą$\}$.
5. Mówimy, że całka Lebesgue'a z dowolnej funkcji mierzalnej f *istnieje*, gdy co najmniej jedna z wielkości $\int\limits_D f^+(x)d\lambda$ oraz $\int\limits_D f^-(x)d\lambda$ jest skończona.
   W takim przypadku definiujemy:
   $\int\limits_D f(x)d\lambda = \int\limits_D f^+(x)d\lambda - \int\limits_D f^-(x)d\lambda$.
6. Jeśli $\int\limits_D |f(x)|d\lambda$ ma wartość skończoną, to mówimy, że f jest *całkowalna w sensie Lebesgue'a*.

Powyżej podana konstrukcja może wydawać się słuchaczom dość skomplikowana. W istocie jest to jednak bardzo naturalna konstrukcja, co z pewnością stwierdzą słuchacze po stosownej uważnej refleksji. Dodajmy, bez podawania szczegółów, kilka dość ogólnych uwag:

1. Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną, całkowalną w sensie Riemanna, to f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a w przedziale $[a, b]$. Całki Riemanna i Lebesgue'a z funkcji f są wtedy równe:

   $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda.$

2. Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w $[a, b]$, to $\int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda = F(b) - F(a)$, gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną dla funkcji f.

3. Funkcja ograniczona jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości jest zbiorem o mierze Lebesgue'a równej 0.

4. Jeśli $\lambda(D) = 0$, to $\int\limits_D f(x)d\lambda = 0$ dla każdej funkcji f mierzalnej w sensie Lebesgue'a.

5. Funkcja całkowalna w sensie Lebesgue'a w obszarze D jest skończona *prawie wszędzie* w D (czyli wszędzie w D, poza ewentualnie zbiorem miary 0 Lebesgue'a).

6. Jeśli $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz zbiory A_n są parami rozłączne, to:

   $\int\limits_A f(x)d\lambda = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f(x)d\lambda.$

7. *Lemat Fatou*. Jeśli funkcje $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są mierzalne oraz są nieujemne na zbiorze D mierzalnym w sensie Lebesgue'a, to:

   $\int\limits_D \lim \inf\limits_{j\to\infty} f_j(x)d\lambda \leqslant \lim \inf\limits_{j\to\infty} \int\limits_D f_j(x)d\lambda.$

8. Symbol $d\lambda$ występujący w oznaczeniu całki Lebesgue'a $\int\limits_D f(x)d\lambda$ słuchacze zechcą traktować jako znak interpunkcyjny, wskazujący, iż całkowanie wykonujemy biorąc pod uwagę miarę Lebesgue'a.

Całka Lebesgue'a to współcześnie najbardziej powszechnie używana całka. Uważamy, że studenci nauk kognitywnych powinni o niej co najmniej usłyszeć.

7.5 O funkcjach wielu zmiennych

Rachunek różniczkowy i całkowy nie jest ograniczony do funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Zauważmy najpierw, że w przypadku funkcji jednej zmiennej pojęcia dotyczące zbieżności oraz granicy odwołują się do jednowymiarowego, liniowo uporządkowanego w sposób zupełny kontinuum $\mathbb{R}$, a więc „dążenie punktu do granicy" dość łatwo sobie wyobrazić. W przypadku $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ owo „dążenie punktu (x, y) do punktu (x_0, y_0)" może odbywać się – mówiąc intuicyjnie – po różnych drogach (podobnie w przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dla $n \geqslant 1$).

Ograniczymy się w tym miejscu jedynie do pewnej prostej interpretacji geometrycznej pojęcia *pochodnej cząstkowej* funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych. Poważniej zainteresowani tą problematyką słuchacze zechcą sięgnąć samodzielnie do podręczników analizy matematycznej.

Załóżmy, że funkcja $z = f(x, y)$ dwóch zmiennych rzeczywistych o wartościach rzeczywistych jest określona w otoczeniu punktu (x_0, y_0) (czyli w tym przypadku wewnątrz koła o środku w punkcie (x_0, y_0)). Funkcja taka określa pewną powierzchnię w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $z_0 = f(x_0, y_0)$. Jeśli przetniemy rozważaną powierzchnię płaszczyznami o równaniach $y = y_0$ oraz $x = x_0$, to otrzymamy dwie krzywe:

$$C_x : z = f(x, y_0) \qquad C_y : z = f(x_0, y).$$

Jeśli funkcja jednej zmiennej $z = f(x, y_0)$ ma pochodną w punkcie x_0, to nazywamy ją *pochodną cząstkową funkcji f w punkcie* (x_0, y_0) *względem zmiennej* x i oznaczamy przez $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Jeśli funkcja jednej zmiennej $z = f(x_0, y)$ ma pochodną w punkcie y_0, to nazywamy ją *pochodną cząstkową funkcji f w punkcie* (x_0, y_0) *względem zmiennej* y i oznaczamy przez $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Słuchacze zechcą zauważyć, że:

1. Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do krzywej C_x w punkcie (x_0, y_0, z_0).

2. Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do krzywej C_y w punkcie (x_0, y_0, z_0).

Zachęcamy słuchaczy do samodzielnej refleksji nad tym, w jaki sposób można definiować całkę z funkcji dwóch zmiennych oraz jaka byłaby interpretacja geometryczna takiej całki. Szczególnie zawziętych poznawczo słuchaczy zachęcamy też do skonfrontowania swoich refleksji z ustaleniami na temat całek wielokrotnych podanymi w dowolnym porządnym podręczniku analizy matematycznej.

7.6 O równaniach różniczkowych

Wiele procesów fizycznych opisuje się poprzez równania zawierające funkcje rzeczywiste (bądź zespolone) oraz pochodne (pierwszego lub wyższych rzędów) takich funkcji. W równaniach różniczkowych *zwyczajnych* występujące w nich funkcje zależą od jednej zmiennej niezależnej. W zależności od rzędu występujących w równaniu pochodnych, mówi się o *rzędzie* równania. Jeśli rozważamy funkcje wielu zmiennych, to mamy do czynienia z równaniami różniczkowymi *cząstkowymi*.

Znalezienie rozwiązania równania różniczkowego polega na znalezieniu funkcji, która spełnia to równanie. Wymaga to całkowania tego równania. Podaje się przy tym pewne *warunki początkowe* oraz *warunki brzegowe*, nakładające ograniczenia na postać rozwiązania.

Przykłady równań różniczkowych to (podajemy jedynie zgrzebną informację czego dotyczą te równania, bez niepotrzebnego straszenia słuchaczy ich szatą matematyczną):

1. *Równanie Newtona*. $F(x(t)) = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$, gdzie $x(t)$ jest funkcją położenia ciała o masie m, zależną od czasu, zaś $F(t)$ funkcją reprezentującą siłę działającą na to ciało w chwili t.

2. *Równania Maxwella*. Równania różniczkowe cząstkowe opisujące zależności między polem elektrycznym a magnetycznym.

3. *Równanie Schrödingera*. Jest to równanie różniczkowe cząstkowe, opisujące jak stan kwantowy układu kwantowego zmienia się w czasie.

4. *Równanie przewodnictwa cieplnego*. Jest to równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu opisujące zmiany temperatury określonego regionu przestrzeni w czasie.

5. *Równania Lotki-Volterry*. To układ równań różniczkowych, opisujących zależność między wielkością populacji drapieżników oraz ich ofiar, przy braniu pod uwagę tempa przyrostu (oraz ubytku) każdej z populacji, z uwzględnieniem pewnych dodatkowych parametrów, dotyczących środowiska.

6. Oraz setki innych równań różniczkowych, opisujących rzeczywistość fizyczną.

W ogólności, rozwiązywanie równań różniczkowych jest zadaniem niezwykle skomplikowanym. Często chcemy jedynie wiedzieć, że rozwiązanie takiego równania w ogóle istnieje a jego rozwiązania staramy się otrzymać metodami przybliżonymi. Jeśli słuchacze będą w przyszłości – z własnej woli lub z musu – potrzebowali zastosowania określonego równania różniczkowego do opisu jakiegoś typu zjawisk interesujących nauki kognitywne, to zechcą skorzystać z literatury przedmiotu.

7.7 O analizie funkcjonalnej i rachunku wariacyjnym

Słuchacze z pewnością zetknęli się już wcześniej z różnego rodzaju *zasadami wariacyjnymi*, które głoszą, że określona zależność spełnia pewne warunki minimalności bądź maksymalności. Dla przykładu, często zastanawiamy się, jak osiągnąć dany cel (np. zdać egzamin) *jak najmniejszym wysiłkiem* (w przypadku egzaminu: ucząc się jak najkrócej, np. jedynie dwa tygodnie przed egzaminem). Szukamy *najkrótszej* drogi, mając do wyboru wiele dróg. Staramy się *maksymalizować* przyjemność doznań, itd.

Słuchacze wiedzą już, że rachunek różniczkowy dostarcza możliwości znajdowania ekstremów funkcji – wystarczy policzyć pochodne funkcji i skorzystać z twierdzeń, ustalających kiedy funkcja przyjmuje wartość minimalną lub maksymalną. *Zasady wariacyjne* dotyczą jednak nieco innego rodzaju problemów: poszukujemy *funkcji* (a nie jej argumentu), która spełnia określone warunki minimalności bądź maksymalności. Rozważamy zatem funkcje, których argumentami są funkcje – takie funkcje operujące na funkcjach nazywamy *funkcjonałami* (to sformułowanie wielce uproszczone – formalnie rzecz biorąc, *funkcjonały* to odwzorowania z pewnych przestrzeni wektorowych w stosowne ciała skalarów). Znajdowanie wartości ekstremalnych funkcjonałów to właśnie rozwiązywanie problemów *rachunku wariacyjnego*. Słuchacze poznali już przykłady funkcjonałów: całka oznaczona z funkcji ciągłej jest właśnie funkcjonałem. Także odwzorowanie przyporządkowujące krzywej o równaniu $f(x)$ długość łuku jej wykresu w przedziale $[a, b]$ jest funkcjonałem (zobacz podany wcześniej wzór).
PRZYKŁADY PROBLEMÓW RACHUNKU WARIACYJNEGO.

1. *Brachistochrona*. To krzywa najkrótszego spadku, czyli krzywa, po której punkt materialny stacza się, pod wpływem siły ciężkości, w najkrótszym możliwie czasie. Uważa się, że wyznaczenie tej krzywej było jednym z pierwszym zagadnień rachunku wariacyjnego. Dowodzi się, że krzywa ta jest fragmentem *cykloidy*.

2. *Zasada Fermata*. W oryginalnym sformułowaniu zasada ta głosiła, że: promień świetlny, poruszający się w danym ośrodku, przebywa możliwie najkrótszą drogę, czyli drogę, której pokonanie zajmuje najmniej czasu. Obecnie formułuje się tę zasadę w nieco ogólniejszy sposób.

3. *Zasady najmniejszego działania*. To zasady (*zasada Maupertuis*, *zasada Hamiltona*, *równania Eulera-Lagrange'a* itp.), które głoszą, że dynamikę układu

fizycznego opisać można zależnościami, w których pewne funkcjonały przyjmują wartości ekstremalne.

4. *Najkrótsza droga*. Rozważmy wspomniany przed chwilą funkcjonał, który funkcji $y = f(x)$ przyporządkowuje długość łuku krzywej w przedziale $[a, b]$:
$$\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$
Znalezienie najkrótszej drogi polega w tym przypadku na ustaleniu, kiedy rozważany funkcjonał (zależny od x, f oraz f') przyjmuje wartość minimalną.

Podobnie jak w przypadku równań różniczkowych, rozwiązywanie problemów wariacyjnych jest niezwykle skomplikowane (samo wymaga przecież rozwiązywania równań różniczkowych).

7.8 Ciekawostki

Jarosław Hašek pisał, że bardzo trudno jest opisywać nieistniejące zwierzęta, ale jeszcze trudniej jest je pokazywać. Uważamy, że cierpliwi słuchacze tego wykładu zasługują na jakąś nagrodę. Proponujemy uznać za taką nagrodę garść ciekawostek dotyczących zbiorów, których własności miarowe okazują się być zaskakujące (z punktu widzenia doświadczenia potocznego). W poniższych przykładach występują pewne terminy matematyczne, które nie były objaśniane na wykładach. Uważamy, że jeśli słuchacz zostanie zaciekawiony danym przykładem, to nie oprze się chęci samodzielnego odszukania potrzebnych definicji: są powszechnie dostępne w sieci, czyli dotarcie do nich wiąże się z minimalnym wysiłkiem – klik, klik i gotowe. Informacje te są oczywiście także dostępne w Księgach (to z nich trafiły do sieci), ale Wyprawa do Biblioteki bywa dla współczesnych studentów Podróżą poza Horyzont (co wnioskujemy na podstawie osobistych doświadczeń).

1. *Spirale*. Niech $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, gdzie $a_n \in \mathbb{R}_+$ dla $n \in \mathbb{N}$. Budujemy spiralę z odcinków o długościach: a_1, $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$ (powiedzmy, prawoskrętną, kąt skrętu $-\frac{\pi}{2}$). Długość tej spirali to: $2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Spirala mieści się na ograniczonym obszarze.

   (a) Dla ciągu $a_n = q^{n-1}$ oraz $q = \frac{95}{100}$ spirala ma długość 40.

   (b) Dla ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ spirala ma długość nieskończoną (rozbieżność szeregu harmonicznego!).

2. *Rozkład przez podział*. Mówiąc w uproszczeniu, dwie bryły uważamy za *równoważne przez rozkład*, jeśli możemy jedną z nich rozłożyć na proste kawałki, z których złożyć możemy drugą. Czworościan nie jest równoważny przez rozkład z sześcianem (np. naroże sześcianu jednostkowego nie jest równoważne przez rozkład z sześcianem o boku $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$).

3. *Zbiór Cantora*. Przeprowadzamy następującą konstrukcję, wychodząc od przedziału $[0,1]$:

   $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$,...

   $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, czyli: $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=0}^{3^{n-1}-1} ([0, \frac{3k+1}{3^n}] \cup [\frac{3k+2}{3^n}, 1])$.

   Otrzymany w ten sposób zbiór C nazywamy *zbiorem Cantora*.

   Zbiór C jest: domknięty, nieprzeliczalny, zwarty, doskonały, nigdzie gęsty, całkowicie niespójny. Jest zupełną przestrzenią metryczną, ma miarę Lebesgue'a równą zero, nie zawiera żadnego niepustego przedziału. Jest homeomorficzny z produktem $2^{\mathbb{N}}$, jest samopodobny, jego wymiar Hausdorffa równy jest $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Każda zwarta przestrzeń metryczna jest ciągłym obrazem zbioru C. Każda nieprzeliczalna ośrodkowa i metryzowalna w sposób zupełny przestrzeń topologiczna zawiera jako podprzestrzeń przestrzeń Cantora.

4. *Zbiory Vitalego*. Dla $x, y \in \mathbb{R}$ definiujemy: $x \approx y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y$ jest liczbą wymierną. Wtedy $\approx$ jest relacją równoważności. Każdy jej selektor nazywamy *zbiorem Vitalego*. Każdy zbiór Vitalego jest niemierzalny w sensie Lebesgue'a. Nie istnieje miara na całym $\mathbb{R}$ niezmiennicza na przesunięcia i przyjmująca skończone dodatnie wartości na przedziałach.

5. *Zbiory Bernsteina*. Podzbiór B nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X nazywamy *zbiorem Bernsteina*, gdy zarówno B jak i dopełnienie B ma niepusty przekrój z każdym zbiorem borelowskim w X. Zbiory Bernsteina są niemierzalne w sensie Lebesgue'a, nie mają własności Baire'a. Aksjomat determinacji AD implikuje ich nieistnienie. Aksjomat wyboru AC gwarantuje ich istnienie.

6. *Zbiór Kakeyi*. Besicovitch udowodnił, że odcinek jednostkowy może zostać (w sposób ciągły) obrócony o $360°$ wewnątrz wielokąta o dowolnie małej powierzchni. Zachęcamy słuchaczy do samodzielnego odnalezienia informacji na temat tej konstrukcji.

7. *Sfera Besicovitcha*. Besicovitch udowodnił, że dla dowolnych dodatnich ε oraz α istnieje w $\mathbb{R}^3$ powierzchnia homeomorficzna ze sferą dwuwymiarową mająca pole mniejsze od ε, ograniczająca obszar o objętości większej od α. Sfera Besicovitcha jest obiektem granicznym, w którego konstrukcji wykorzystujemy zarówno poczciwe wielościany, jak i zbiór Cantora. Konstrukcja jest ważna, np. w związku z *problemem Plateau*: Dla danej krzywej Jordana C w $\mathbb{R}^3$ znaleźć w $\mathbb{R}^3$ powierzchnię S, ograniczoną przez C, o najmniejszym polu.

8. *Naszyjnik Antoine'a*. Naszyjnik Antoine'a stanowi topologiczne włożenie zbioru Cantora w $\mathbb{R}^3$. Jego dopełnienie nie jest jednospójne. Pomijając matematyczne szczegóły konstrukcji, można ją sobie wyobrazić następująco. Zaczynamy od torusa i umieszczamy wewnątrz niego torusy „zazębiające się" jak ogniwa (skończonego) łańcucha. W każdym z tych torusów umieszczamy torusy „zazębiające się" jak ogniwa (skończonego) łańcucha, itd. Naszyjnik Antoine'a to część wspólna tych wszystkich torusów. Jego spójne składowe to pojedyncze punkty. Zbiór ten jest domknięty, nigdzie gęsty, doskonały, całkowicie niespójny i ma moc kontinuum, a zatem jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. Zachęcamy słuchaczy do wykonania rysunku, reprezentującego omawianą sytuację.

9. *Sad Euklidesa*. Funkcja Thomae, określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{jeśli } x = \frac{p}{q} \text{ jest liczbą wymierną (ułamek nieskracalny),} \\ 0 & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą niewymierną,} \end{cases}$$

jest ciągła dla każdego argumentu niewymiernego, natomiast nieciągła dla każdego argumentu wymiernego. Jest całkowalna w sensie Riemanna. Jej wykres nosi wiele pomysłowych nazw (sad Euklidesa, Gwiazdy Babilonu, funkcja Riemanna, prażona kukurydza, krople deszczu, itd.).

10. *Funkcja Dirichleta*. Przypominamy, że funkcja Dirichleta zdefiniowana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą wymierną,} \\ 0 & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą niewymierną,} \end{cases}$$

Jest ona nieciągła dla każdego argumentu swojej dziedziny. Nie jest całkowalna w sensie Riemanna, jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. Ponieważ $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{j\to\infty} (\cos(k!\pi x))^{2j}$, więc jest to funkcja drugiej klasy Baire'a.

Uwaga: nie istnieje funkcja, która byłaby ciągła dla wszystkich argumentów wymiernych, a nieciągła dla wszystkich argumentów niewymiernych (ponieważ zbiór punktów nieciągłości musi być zbiorem F_σ, czyli przeliczalną sumą zbiorów domkniętych).

11. *Figlarne przekątne kwadratu*. Poniższa konstrukcja pokazuje, że można połączyć przeciwległe wierzchołki kwadratu rozłącznymi (!) zbiorami spójnymi C_1 i C_2, z których każdy jest obrazem dwóch łuków domkniętych i łuku otwartego:

    $C_1 = \{(-1+t, -1+\frac{7}{8}t) : t \in [0,1]\} \cup \{(t, \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2t}) + \frac{1}{4}) : t \in (0,1]\} \cup \{(1, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t) : t \in [0,1]\}$

    $C_2 = \{(-1+t, 1-\frac{7}{8}t) : t \in [0,1]\} \cup \{(t, \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2t}) - \frac{1}{4}) : t \in (0,1]\} \cup \{(1, -1+\frac{5}{4}t) : t \in [0,1]\}$.

    Zachęcamy słuchaczy do wykonania rysunku, reprezentującego omawianą sytuację.

12. *Diabelskie schody*. Funkcja Cantora-Lebesgue'a jest stała na wszystkich przedziałach, które usuwa się ze zbioru trójkowego Cantora, określonego na przedziale $[0,1]$. Funkcja ta ma ponadto następujące własności:

    (a) Jest niemalejąca, przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[0,1]$.

    (b) Funkcja ta jest wszędzie ciągła; w istocie jest ona jednostajnie ciągła (ale nie jest bezwzględnie ciągła).

    (c) Jej pochodna jest prawie wszędzie równa zeru: jest równa zeru we wszystkich punktach poza zbiorem Cantora.

    Funkcję Cantora można zdefiniować na sposób arytmetyczny (wykorzystując rozwinięcia trójkowe i dwójkowe), ale określić ją także można jako granicę następującego ciągu funkcji:

    (a) $f_0(x) = x$

    (b) $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}f_n(3x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$

    (c) $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}$ dla $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$

    (d) $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x-2)$ dla $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1$.

    Ciąg funkcji f_n jest zbieżny punktowo do funkcji Cantora; jest to ponadto zbieżność jednostajna. Zachęcamy słuchaczy do wykonania rysunku, reprezentującego omawianą sytuację.

13. *Funkcja różniczkowalna o nieprzeliczalnym zbiorze punktów krytycznych.* Punktem krytycznym funkcji nazwiemy punkt, w którym jej pochodna nie istnieje lub jest równa zeru (wartość funkcji dla takiego punktu to jej *wartość krytyczna*). Przypominamy, że dopełnienie zbioru trójkowego Cantora C jest sumą przedziałów otwartych: $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n, \beta_n)$. Zdefiniujmy $f(x) = 0$ dla $x \in C$ oraz $f(x) = (x - \alpha_n)(\beta_n - x)$ dla $x \in (\alpha_n, \beta_n)$. Niech $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Ponieważ $F' = f$, więc F' jest ciągła. Mamy: $S =_{def} \{t : F'(t) = 0\}$ (zbiór punktów krytycznych F) jest równy C, a ponieważ f jest dodatnia na dopełnieniu nigdzie gęstego podzbioru przedziału $[0, 1]$, więc F jest ściśle rosnąca i zbiór $\{F(t) : t \in S\}$ jej wartości krytycznych jest nieprzeliczalny.

14. *Krzywa Volterry*. Krzywa Volterry wykorzystuje zbiór SVC Smitha-Volterry-Cantora. Jest on konstruowany podobnie jak zbiór trójkowy Cantora. Zaczynamy od $[0, 1]$ i w n-tym kroku konstrukcji usuwamy przedział otwarty o długości $\frac{1}{2^{2n}}$ z każdego z 2^{n-1} otrzymanych uprzednio przedziałów domkniętych. Dwa pierwsze kroki dają więc, odpowiednio: $[0, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1]$ oraz $[0, \frac{5}{32}] \cup [\frac{7}{32}, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, \frac{25}{32}] \cup [\frac{27}{32}, 1]$. Zbiór SVC jest częścią wspólną wszystkich przedziałów domkniętych otrzymywanych w kolejnych krokach konstrukcji. Jest to zbiór domknięty o pustym wnętrzu, jego miara Lebesgue'a równa jest $\frac{1}{2}$ (a więc jego brzeg ma dodatnią miarę Lebesgue'a!).

    W konstrukcji funkcji Volterry wykorzystujemy stosowne „kopie” funkcji zdefiniowanej przez $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$, które odpowiednio „sklejamy” na brzegach odcinków usuniętych w konstrukcji SVC. Funkcja Volterry jest granicą takiego ciągu „kopii”.

    Funkcja Volterry jest wszędzie różniczkowalna, a jej pochodna jest nieciągła dokładnie w każdym punkcie SVC. Tak więc, pochodna funkcji Volterry nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

    Polecamy: David Marius Bressoud *Wrestling with the Fundamental Theorem of Calculus: Volterra's function* (dostępne w sieci).

15. *Paradoks Bertranda*. Wybieramy losowo cięciwę okręgu o promieniu długości 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg? Zachęcamy słuchaczy do wykonania rysunku, reprezentującego omawianą sytuację. W zależności od tego, co uznamy za przestrzeń zdarzeń elementarnych, otrzymamy różne wyniki:

    (a) $\frac{1}{3}$: wykorzystujemy długość łuku.
    (b) $\frac{1}{2}$: wykorzystujemy długość odcinka.

(c) $\frac{1}{4}$: wykorzystujemy pole.

16. *Niezależność zdarzeń: zależy od miary*. Podstawowymi obiektami badanymi w rachunku prawdopodobieństwa są układy (X, S, μ), gdzie:

    (a) X jest przestrzenią zdarzeń elementarnych;

    (b) S jest σ-ciałem podzbiorów zbioru X (rodzina zbiorów mierzalnych; rodzina zdarzeń);

    (c) $\mu : S \to [0, 1]$ jest miarą w (X, S), przy czym $\mu(X) = 1$ (funkcja prawdopodobieństwa).

    Jeśli $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ jest rodziną zdarzeń, to mówimy, że $\mathcal{A}$ jest *niezależna*, gdy dla każdej liczby naturalnej N oraz każdego $\{A_n : 1 \leqslant n \leqslant N \wedge (i \neq j \to A_i \neq A_j)\} \subseteq \mathcal{A}$ zachodzi:

    $$\mu(\bigcap_{n=1}^{N} A_n) = \prod_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

    Pokażemy na dwóch przykładach, że niezależność zdarzeń nie jest własnością samych zdarzeń, ale własnością zależną od miary.

    (a) Niech $X = \{a, b, c, d\}$, $S = \wp(X)$, $\mu(a) = \mu(b) = \mu(c) = \mu(d) = \frac{1}{4}$. Wtedy rodzina $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ nie jest niezależna, natomiast każda jej dwuelementowa podrodzina jest niezależna.

    (b) Niech $X = \{a, b, c, d\}$, $S = \wp(X)$, $\mu(a) = \frac{1}{10}$, $\mu(b) = \frac{2}{10}$, $\mu(c) = \frac{3}{10}$, $\mu(d) = \frac{4}{10}$. Wtedy dwa zdarzenia tworzą rodzinę niezależną wtedy i tylko wtedy, gdy jedno z nich jest równe $\emptyset$ lub X.

Sądzimy, że podane wyżej przykłady (a jest jeszcze całe mnóstwo równie ciekawych) powinny być interesujące dla studentów nauk kognitywnych.

8 Czego być może zabrakło w tych wykładach?

Wykład został przeprowadzony wedle programu zawartego w zatwierdzonym urzędowo syllabusie przedmiotu. Można oczywiście zastanawiać się, czy istotnie podaliśmy słuchaczom te informacje, które najbardziej są potrzebne studiującym nauki kognitywne. W opinii piszącego te słowa, program wykładu *Matematycznych podstaw kognitywistyki* warto byłoby uzupełnić m.in. o następujące treści:

1. *Algebra*. Starano się wskazać, jak ważne są pojęcia *izomorfizmu* (jako formalnej reprezentacji nieodróżnialności strukturalnej) oraz *kongruencji* (jako relacji pozwalającej na tworzenie struktur ilorazowych). Nie starczyło czasu na dokładniejsze omówienie ważnych typów struktur algebraicznych, np. *krat*, *algebr Boole'a*, *algebr Heytinga*: są to struktury ważne m.in. dla opisu semantyki wielu systemów logicznych, a przecież refleksja nad wybranymi systemami logiki ma fundamentalne znaczenie dla nauk kognitywnych. Za lukę w programie wykładu uważać można pominięcie przedstawienia podstawowych faktów dotyczących ciała *liczb zespolonych*. Brakiem wykładu było też pominięcie omówienia wybranych tematów z *algebry liniowej*, przede wszystkim *macierzy*, *wyznaczników*, *układów równań liniowych*.

2. *Topologia*. Pojęcia topologiczne były omawiane w wykładzie właściwie wyłącznie w przypadku przestrzeni euklidesowych i to w ograniczeniu do zagadnień mających znaczenie dla późniejszego wprowadzenia w podstawy analizy rzeczywistej funkcji jednej zmiennej. Uważamy, że studenci nauk kognitywnych powinni oswoić się z rozumieniem podstawowych pojęć topologicznych (*otoczenie*, *bliskość*, *domknięcie*, *zbiór otwarty*, *metryka*, itd.) także w przypadku ogólnych przestrzeni topologicznych. W naukach kognitywnych często używa się pojęcia *reprezentacji*, które – o ile nam wiadomo – nie doczekało się jeszcze dobrego formalizmu matematycznego. Pozwalamy sobie przypuszczać, że właśnie ogólne pojęcia topologiczne mogłyby być pomocne w tym zakresie. Należy oczywiście zachować pewien umiar w proponowaniu nowych treści programowych – trzeba dążyć do oswojenia słuchaczy z pojęciami dotyczącymi np. *kształtu*, *krzywizny*, itp. bez epatowania ich nadmiernie rozbudowanym wykładem, powiedzmy, topologii algebraicznej oraz geometrii różniczkowej.

3. *Analiza*. Podstawowym brakiem było ograniczenie się do rozważania jedynie funkcji rzeczywistych jednej zmiennej. Należy rozumieć, że ograniczenie to powodowane było względami natury dydaktycznej. Wielkości badane w naukach kognitywnych (w naukach fizycznych oczywiście również) zależą w ogólności od wielu zmiennych, a do opisu ich zmienności wymagana jest znajomość *pochodnych cząstkowych* oraz różnego rodzaju *całek* (wielokrotnych, krzywoliniowych, powierzchniowych). Drugim brakiem wykładu jest pominięcie omówienia *równań różniczkowych*, choćby tylko w najprostszej ich postaci. Wreszcie, studenci nauk kognitywnych mogliby zostać poinformowani – chociażby w formie opisowej – o rudymentach *analizy zespolonej*.

4. *Miara i prawdopodobieństwo*. Wspomniano o *skończonych* przestrzeniach probabilistycznych, co było właściwie przypomnieniem wiadomości z dydaktyki szkolnej. Przy omawianiu poważniejszych zastosowań metod probabilistycznych w naukach kognitywnych niezbędne jest jednak rozważanie dowolnych takich przestrzeni, co pociąga za sobą konieczność oswojenia słuchaczy z pojęciem *miary*. Można oczywiście zakładać, że takie pojęcia jak np. *zmienna losowa*, jej *dystrybuanta* oraz inne charakteryzujące ją pojęcia zostaną omówione na wykładzie ze statystyki, przewidzianym dla studentów nauk kognitywnych. Jednak prowadzący zajęcia ze statystyki równie dobrze mógłby założyć, że pojęcia te wprowadzone zostały już na wykładzie z matematyki.

5. *Wybrane działy matematyki dyskretnej*. W drugim wykładzie mówiono o *rachunku relacji*, wspominając o reprezentacji relacji w postaci *grafów*. Nie wątpimy, że studentom nauk kognitywnych przydatna może być większa wiedza o samych grafach oraz ich zastosowaniach w modelowaniu zjawisk. Pominięto w wykładzie omówienie *algorytmów*, mając świadomość, że studenci poznańskiej kognitywistyki mają osobny wykład na ten temat.

6. *Rozwój rozumienia pojęć matematycznych*. Nauki kognitywne zajmują się m.in. tworzeniem oraz rozumieniem pojęć. Dla studentów tych nauk jest zatem frapujące, jak pozwalamy sobie sądzić, m.in. to, jak zmieniało się rozumienie takich podstawowych pojęć, jak np.: *liczba*, *przestrzeń*, *funkcja*, itp. Deklarowaliśmy na początku tych wykładów, że proponujemy rozumieć matematykę jako:

   (a) *Naukę o wzorcach*.

   (b) *Naukę o rozwiązywaniu problemów*.

   W ramach tego pierwszego tematu staraliśmy się ukazać różne rodzaje *struktur*: arytmetycznych, algebraicznych, porządkowych, topologicznych, różniczkowych, mierzalnych. Osobnego komentarza wymagałoby ukazanie, jak dochodzono do wyróżnienia takich właśnie struktur, co stawało się *standardem* matematycznym (w odróżnieniu od *wyjątków* oraz *patologii*). Drugi z tych tematów wiąże się oczywiście z dążeniami matematyków do ustalenia poprawnych *metod* postępowania w ich badaniach, a więc m.in. z pojęciem *dowodu matematycznego*.

   Piszący te słowa proponuje studentom starszych lat poznańskiej kognitywistyki osobne wykłady fakultatywne dotyczące dwóch wymienionych wyżej tematów:

(a) *Poznanie matematyczne*. Wykład poświęcony rozwojowi rozumienia pojęć matematycznych oraz stanowisk w naukach kognitywnych dotyczących wiedzy matematycznej. Materiały będą dostępne na stronie: http://logic.amu.edu.pl/index.php/Matcog

(b) *Zagadki*. Wykład poświęcony matematycznym metodom rozwiązywania problemów. Materiały dostępne na stronie: http://logic.amu.edu.pl/index.php/Zagadki2016

Można również zastanawiać się nad *sposobem* przekazywania wiedzy matematycznej studentom nauk kognitywnych. Zakłada się – nie całkiem realistycznie – że student pierwszego roku kognitywistyki zna i rozumie cały materiał omawiany w szkolnej dydaktyce matematyki. W praktyce należałoby raczej zakładać, że student ów posiada pewne umiejętności rachunkowe (arytmetyczne, a po trosze też algebraiczne), które wdrożyła szkoła oraz – ewentualnie – pewną wyobraźnię geometryczną, dotyczącą najprostszych reprezentacji przestrzennych. Obserwuje się, że studenci pierwszego roku mają (co zaskakuje) trudności z przeprowadzaniem *rozumowań* matematycznych (np. opartych na wykorzystaniu zasady indukcji matematycznej). Trudnością okazuje się też zaakceptowanie ze zrozumieniem faktu, że matematyka na poziomie uniwersyteckim dotyczy głównie *teorii*, nowych *pojęć* i *twierdzeń*, wraz z ich *dowodami*, a mniej dotyczy różnego rodzaju konkretnych *rachunków*, traktowanych jedynie jako poglądowe ilustracje.

W opinii piszącego te słowa, ulepszenie *sposobu* wykładania matematyki dla studentów nauk kognitywnych mogłoby uwzględnić m.in.:

1. *Posługiwanie się trafnymi przykładami problemów wyjściowych*. Dobra dydaktyka matematyki powinna przestrzegać zasady, aby słuchacze w każdym momencie rozumieli, *co robimy* w trakcie wywodu matematycznego oraz *po co to robimy*. Sądzimy, że jednym ze sposobów utrzymania tego stanu *rozumiejącej uwagi* słuchaczy jest rozpoczynanie wykładu określonych treści matematycznych każdorazowo przez postawienie jasno określonego *problemu wyjściowego*, który przedstawianym później postępowaniem mielibyśmy rozwiązać. Tego typu – nakierowana na cel – dydaktyka matematyki powinna dostarczać słuchaczom przekonania, że poświęcają z sensem swój czas na uczenie się matematyki.

2. *Wyzwolenie kreatywności słuchaczy*. Wielokrotnie w niniejszych wykładach posługiwaliśmy się zwrotem: *wyobraźmy sobie*. Nacisk na owe zdolności imaginacyjne był celowy – uważamy bowiem, że są one główną umiejętnością, którą wykształcić ma dydaktyka matematyki u studentów kognitywistyki. Dopiero dysponowanie trafnymi mentalnymi reprezentacjami rozważanych sytuacji problemowych pozwala na zastosowanie w nich metod

(procedur, chwytów, sztuczek, itp.) obliczeniowych. Posługiwanie się wyuczonymi na pamięć algorytmami obliczeń, bez *rozumienia*, co właściwie reprezentują te obliczenia jest podobne do sytuacji opisanej w znanej kognitywistom metaforze *chińskiego pokoju* Johna Searle'a. Od studentów pierwszego roku kognitywistyki nie wymaga się, aby od razu *twórczo* wykorzystywali poznane metody matematyczne (nie wymaga się tego nawet od studentów pierwszego roku matematyki). Pożądane jest jednak, aby stosowanie tych metod przeżywali ze świadomym *rozumieniem*, co robią.

3. *Ukazanie matematyki jako frapującej sfery obiektów badanej przez umysł.* Pozostawmy filozofom rozstrzyganie sporu czy matematyka polega na *tworzeniu* czy na *odkrywaniu* – dla *praktycznej działalności badawczej* matematyków jego rozstrzygnięcie nie ma, jak się zdaje, znaczenia. Fizykom pozostawiamy rozstrzyganie, jaka jest natura przestrzeni fizycznej (dyskretna czy ciągła? skończona czy nieskończona?). Podobnie, pozostawmy teologom objaśnianie tego, na czym polegać miałoby rzekome *życie wieczne* (czyli *nieskończone trwanie*). Dla nauk kognitywnych interesujące jest jednak, jak umysł obchodzi się (jak traktuje, bada, próbuje rozumieć) z pojęciami tego rodzaju, jak np. *ciągłość* oraz *nieskończoność*. Ważne jest, aby słuchacze trzymali w pamięci, iż konkretne wyniki matematyczne dotyczące np. kresów zbiorów uporządkowanych, zbieżności ciągów, szeregów lub całek, działań na zbiorach nieskończonych, przejść granicznych, itd. są właśnie wynikiem oswajania tych pojęć przez intelekt.

4. *Ustalenie rozumnej proporcji między objętością wykładu a pobudzaniem wyobraźni słuchaczy*. Zwykle prowadzący wykład z matematyki stara się nie podawać żadnych faktów i stwierdzeń bez uzasadnienia. To jednak znacznie zwiększa objętość wykładu. Z reguły jest niezwykle trudno zdecydować, jaka ilość informacji jest już wystarczająca, aby dotarcie do pozostałej potrzebnej wiedzy można byłoby powierzyć samodzielnej refleksji słuchaczy. W rezultacie – z ostrożności – wykładowca podaje zwykle zbyt wiele informacji. To z kolei może powodować, że słuchacze czują się przytłoczeni ich ilością i zagubieni w odnajdywaniu tego, co najistotniejsze.

Tymi uwagami kończymy zasadniczą część tegorocznego wykładu *Matematycznych podstaw kognitywistyki*. Dwa następne wykłady będą poświęcone powtórce omawianego materiału, która ma przygotować słuchaczy do uzyskania oczekiwanej nagrody, czyli *zaliczenia wykładu*.