Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Rachunek relacji

Ontologia matematyki

- Przedmiotem badań matematycznych są zbiory wyposażone w pewne struktury. Badane uniwersa składają się z elementów powiązanych jakimiś zależnościami. Formalnym odpowiednikiem tego typu pojęć jak *zależność*, *związek*, *stosunek* jest pojęcie *relacji*.
- Relacje mają ustalone liczby swoich *argumentów*.

- Dla przykładu, relacja *mniejszości* lub relacja *podzielności* to zależności, zachodzące między dwoma elementami (dwiema liczbami).
- Relacja *leżenia między* to relacja łącząca trzy argumenty, zaś czteroargumentowa jest np. relacja zachodząca między punktami a, b, c oraz d na płaszczyźnie dokładnie wtedy, gdy odległość od a do b jest, powiedzmy, taka sama jak odległość od c do d.

Z poprzedniego wykładu pamiętamy definicje pary uporządkowanej oraz produktu kartezjańskiego:

- $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
- $X \times Y = \{(x, y) : x \in X$ oraz $y \in Y\}$.

- Mówimy, że R jest *relacją* (dwuargumentową) między elementami zbiorów X oraz Y, gdy $R \subseteq X \times Y$, czyli gdy R jest podzbiorem produktu kartezjańskiego zbiorów X oraz Y. Dla relacji dwuargumentowych używamy zamiennie zapisu: $(x, y) \in R$ lub xRy (mówimy wtedy, że relacja R zachodzi między elementami x oraz y).
- Jeśli $R \subseteq X \times X$, to mówimy, że relacja R jest określona w zbiorze X. Zbiór $X \times X$ jest *potęgą kartezjańską* zbioru X.

Przykłady

- Zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ to potęga kartezjańska zbioru $\mathbb{Z}$. Jego reprezentacją graficzną jest zbiór wszystkich *punktów kratowych* płaszczyzny (punktów o obu współrzędnych całkowitych).
- Relacja mniejszości w zbiorze $\{1, 2, 3\}$ to zbiór par: $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.
- Relacja podzielności (bez reszty) w zbiorze wszystkich dodatnich liczb naturalnych zdefiniowana jest następująco: $x|y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna z taka, że $x \cdot z = y$. Jeśli $x|y$, to mówimy, że x dzieli y (lub: y jest podzielna przez x).

Przykłady

- Konstytucja Rzeczpospolitej Polskiej uznaje za *małżeństwo* stosownie zarejestrowany związek kobiety i mężczyzny, spełniających odpowiednie kryteria wieku oraz braku pokrewieństwa. Jeśli M to zbiór mężczyzn, zaś K to zbiór kobiet, to:
  1. Relacja *bycia mężem* (w sensie Konstytucji RP) jest podzbiorem zbioru $M \times K$.
  2. Relacja *bycia żoną* (w sensie Konstytucji RP) jest podzbiorem zbioru $K \times M$.
- Pamiętajmy jednak, że Konstytucja RP nie ustala, kto jest kobietą, a kto mężczyzną.

Definicje

- Trójkę uporządkowaną (o pierwszym elemencie x_1, drugim x_2 oraz trzecim x_3) definiujemy następująco: $(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2), x_3)$.
- Ogólnie, n-tkę uporządkowaną definiujemy jako: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = ((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}), x_n)$.
- Produkt kartezjański zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definiujemy następująco:
$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n =$$
$$= \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : x_i \in X_i \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$
- Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą dowolnymi zbiorami. Relacją n-argumentową między elementami tych zbiorów nazywamy dowolny podzbiór produktu kartezjańskiego $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Relacje *jednoargumentowe* to podzbiory uniwersum. Relacje *zeroargumentowe* to elementy uniwersum.

Przykłady

- Zbiór $\{0, 1\}^3$, czyli trzecia potęga kartezjańska zbioru $\{0, 1\}$ to zbiór wszystkich trójek uporządkowanych (x, y, z), gdzie $x, y, z \in \{0, 1\}$. Masz jakieś wyobrażenia geometryczne związane z tym zbiorem?
- *Zdrada*. W potocznym rozumieniu, zdrada jest relacją trójargumentową: osoba x zdradza osobę y z osobą z.

- „Być liczbą parzystą" to przykład relacji jednoargumentowej w zbiorze $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych. Ta relacja to po prostu zbiór wszystkich liczb parzystych.
- Trójargumentowa relacja $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}$ oraz $x < y < z\}$ zachodzi między liczbami rzeczywistymi x, y oraz z, gdy y leży między (w sensie relacji mniejszości) liczbami x oraz z.

Definicje. Niech $R \subseteq X \times Y$.

- *R-następnik*. Dla $x \in X$ niech $R(x) = \{y \in Y : xRy\}$. Zbiór $R(x)$ to zbiór wszystkich *R-następników* elementu $x \in X$.
- *R-poprzednik*. Dla $y \in Y$ niech $R^{-1}(y) = \{x \in X : xRy\}$. Zbiór $R^{-1}(y)$ to zbiór wszystkich *R-poprzedników* elementu $y \in Y$.
- *Dziedzina*. $dom(R) = \{x \in X : xRy$ dla pewnego $y \in Y\}$. Zbiór $dom(R)$ nazywamy *dziedziną* relacji R (inny termin: *dziedzina lewostronna*).
- *Przeciwdziedzina*. $rng(R) = \{y \in Y : xRy$ dla pewnego $x \in X\}$. Zbiór $rng(R)$ nazywamy *przeciwdziedziną* relacji R (inny termin: *dziedzina prawostronna*).
- *Pole*. Sumę dziedziny i przeciwdziedziny relacji R nazywamy *polem* relacji R i oznaczamy przez $fld(R)$: $fld(R) = dom(R) \cup rng(R)$.

Definicje

- *Obraz zbioru względem relacji*. Niech $A \subseteq X$. *Obrazem* zbioru A względem relacji R jest zbiór:
  $R[A] = \{y \in Y : xRy$ dla pewnego $x \in A\}$.
- *Przeciwobraz zbioru względem relacji*. Niech $B \subseteq Y$. *Przeciwobrazem* zbioru B względem relacji R jest zbiór:
  $R^{-1}[B] = \{x \in X : xRy$ dla pewnego $y \in B\}$.

- Jeśli $R \subseteq X \times Y$ oraz $S \subseteq X \times Y$, to mówimy, że:
  1. Relacja R jest *podrelacją* relacji S, gdy $R \subseteq S$.
  2. Relacje R i S są *rozłączne*, gdy $R \cap S = \emptyset$.
- Relacja *pusta* to relacja, która nie zachodzi między żadnymi elementami (ustalonego zbioru). Relacja *pełna* na zbiorze X, to relacja, która zachodzi między każdymi dwoma (różnymi lub nie) elementami zbioru X.

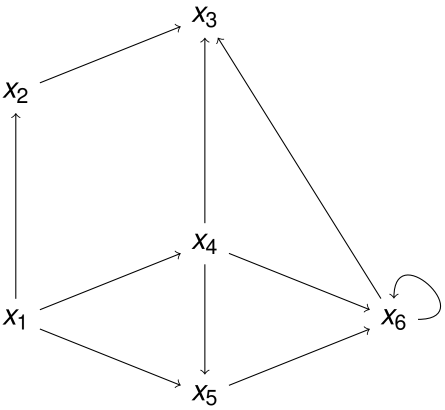
Przykłady

- Rozważmy relację podzielności w zbiorze wszystkich dodatnich liczb naturalnych. Poprzednikiem liczby x względem tej relacji jest każdy dzielnik liczby x. Następnikiem liczby x względem tej relacji jest każda wielokrotność liczby x.
- Rozważmy relację $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$. Dziedziną tej relacji jest $\mathbb{R} - \{0\}$. Jej przeciwdziedziną również jest $\mathbb{R} - \{0\}$. W konsekwencji, jest to także jej pole.
- Rozważmy relację *bycia mężem* (w sensie Konstytucji RP), rozumianą jako podzbiór produktu kartezjańskiego $M \times K$, gdzie K to zbiór kobiet, a M to zbiór mężczyzn. Jej dziedziną jest zbiór wszystkich żonatych, a jej przeciwdziedziną jest zbiór wszystkich zamężnych. Jej polem jest zbiór wszystkich osób pozostających w związku małżeńskim (w sensie Konstytucji RP).
- Relacja $<$ jest podrelacją relacji $\leqslant$ na zbiorze $\mathbb{N}$.

- Rozważmy relację podzielności w zbiorze wszystkich dodatnich liczb naturalnych oraz zbiór $\{2, 3, 5\}$. Jego obrazem względem tej relacji jest zbiór tych wszystkich dodatnich liczb naturalnych, które są podzielne przez co najmniej jedną z liczb: 2, 3, 5.
- Rozważmy relację podzielności w zbiorze wszystkich dodatnich liczb naturalnych oraz zbiór $\{12, 13, 15\}$. Jego przeciwobrazem względem tej relacji jest zbiór tych wszystkich dodatnich liczb naturalnych, które dzielą bez reszty co najmniej jedną z liczb: 12, 13, 15, a więc zbiór: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 15\}$.
- Relacje $<$ oraz $>$ na zbiorze $\mathbb{R}$ są rozłączne. Nie są rozłączne relacje $\leqslant$ oraz $\geqslant$ na tym zbiorze, ponieważ ich część wspólna to relacja identyczności.
- Jeśli zbiór X ma n elementów, to zbiór $X \times X$ ma n^2 elementów. Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru $X \times X$ ma zatem 2^{n^2} elementów. Na zbiorze n-elementowym istnieje zatem 2^{n^2} różnych relacji. Ile zatem jest relacji na zbiorze $\{1, 2, 3\}$?

- *Grafy*. Każdej relacji $R \subseteq X \times Y$ odpowiada *graf*: jego *wierzchołkami* są elementy zbiorów X oraz Y, połączone *krawędzią* są te elementy x oraz y, dla których zachodzi xRy. Mówimy przy tym o krawędziach *zorientowanych* (rysowanych np. w postaci strzałek), bowiem ważna jest kolejność argumentów relacji.
- *Macierze*. Dla skończonych zbiorów X oraz Y wyliczamy elementy zbioru X w wierszach, a elementy zbioru Y w kolumnach. Jeśli relacja $R \subseteq X \times Y$ zachodzi dla pary (x, y), to na przecięciu wiersza odpowiadającego x oraz kolumny odpowiadającej y umieszczamy 1, w przeciwnym przypadku na tym miejscu umieszczamy 0.
- *Reprezentacje geometryczne*. Relacje $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reprezentujemy jako podzbiory płaszczyzny kartezjańskiej $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Narysujemy graf relacji R na zbiorze $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, gdzie R jest zbiorem par $\{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_6), (x_6, x_3), (x_6, x_6)\}$:



Strzałka między x_6 a x_6 jest przykładem *pętli*.

Narysujemy graf relacji mniejszości w zbiorze $\{1, 2, 3\}$:

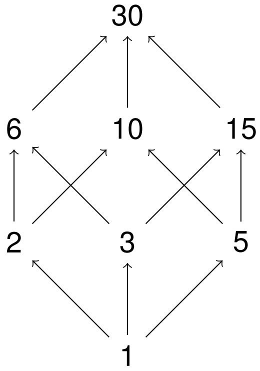
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, bend left] \arrow[rr, bend left=50] & 2 \arrow[r, bend left] & 3
\end{tikzcd}$$

Narysujemy graf relacji inkluzji właściwej w zbiorze potęgowym zbioru $\{1, 2, 3\}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

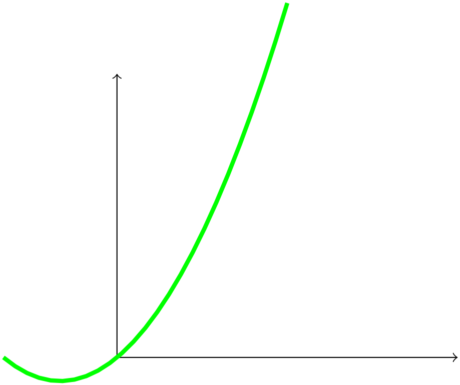
Zastosowaliśmy tu uproszczenie, pomijając niektóre strzałki. Rozważana relacja zawiera jeszcze pary: $(\emptyset, \{1, 2\})$, $(\emptyset, \{1, 3\})$, $(\emptyset, \{2, 3\})$, $(\emptyset, \{1, 2, 3\})$, $(\{1\}, \{1, 2, 3\})$, $(\{2\}, \{1, 2, 3\})$, $(\{3\}, \{1, 2, 3\})$.

Narysujemy graf relacji podzielności w zbiorze $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$:

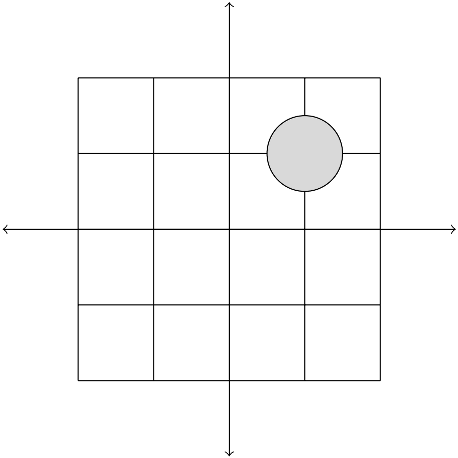


Powyższy graf „wygląda” tak samo, jak graf z poprzedniego przykładu. W jednym z dalszych rozdziałów wprowadzone zostanie pojęcie *izomorfizmu*, które jest formalnym odpowiednikiem nieodróżnialności dwóch struktur.

Narysujemy graf relacji $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x + x^2\}$. Ponieważ jest to zbiór nieskończony, więc w istocie narysujemy jedynie jego fragment:



Niech $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < \frac{1}{4}\}$. Obszar zacieniowany reprezentuje tę relację na płaszczyźnie kartezjańskiej (koło bez brzegu):

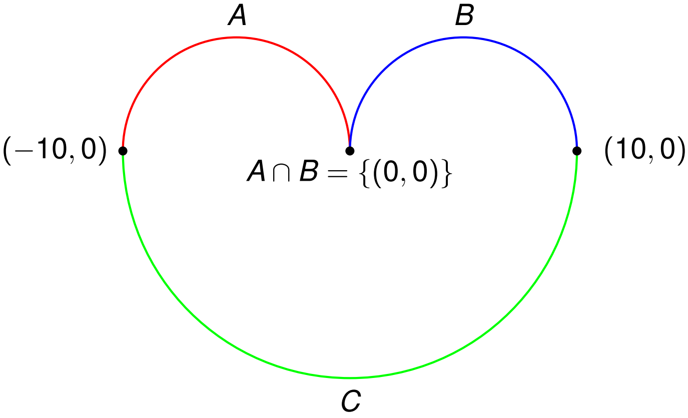


Rozważmy następujące trzy zbiory par (czyli trzy relacje):

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x + 5)^2 + y^2 = 25 \text{ oraz } y \geqslant 0\}$

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x - 5)^2 + y^2 = 25 \text{ oraz } y \geqslant 0\}$

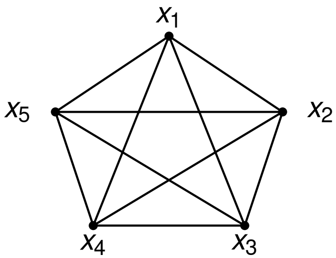
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 100 \text{ oraz } y \leqslant 0\}$

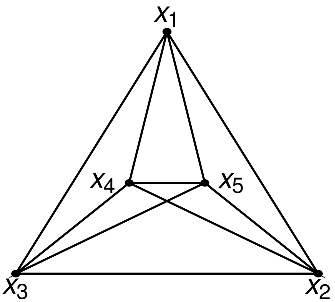


Pary (x, y) należące do zbioru A leżą na czerwonym półokręgu, należące do zbioru B na niebieskim półokręgu, a należące do zbioru C na zielonym półokręgu. Mamy ponadto, m.in.:

1. $A \cap B = \{(0, 0)\}$
2. $A \cap C = \{(-10, 0)\}$
3. $B \cap C = \{(10, 0)\}$
4. $(A \cup B) - C = (A \cup B) - \{(-10, 0), (10, 0)\}$.

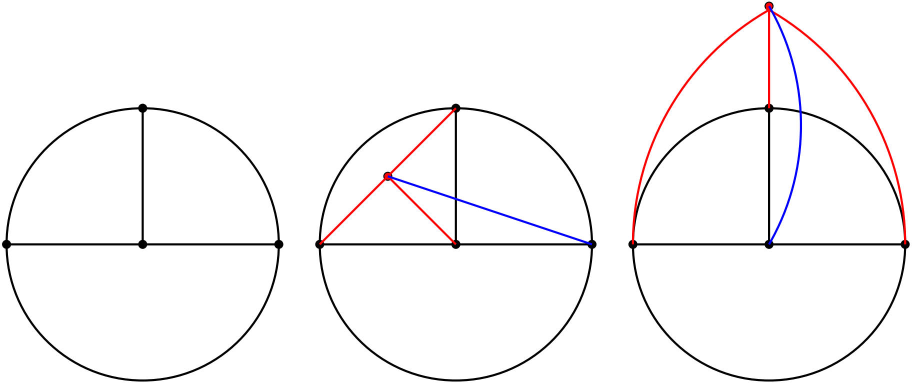
Relację zachodzącą między każdymi dwoma elementami zbioru pięcioelementowego można przedstawić grafem K_5 m.in. na następujące sposoby (pomijamy pętle):





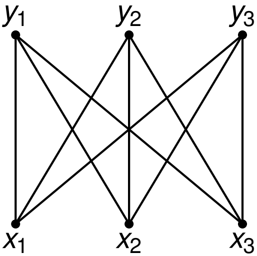
Nie można jednak narysować na płaszczyźnie grafu tejże relacji w taki sposób, aby uniknąć przecinania się krawędzi grafu.

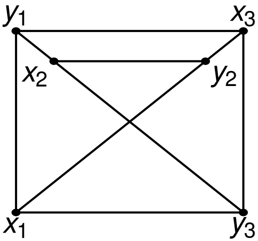
Dowód, że graf K_5 nie jest planarny, czyli musi mieć przecinające się krawędzie (na płaszczyźnie):



Do grafu K_4 dodajemy wierzchołek (czerwony) i łączymy go z pozostałymi wierzchołkami. Nie unikniemy przecięcia krawędzi.

Podobną własność ma relacja między elementami zbiorów trójelementowych $\{x_1, x_2, x_3\}$ i $\{y_1, y_2, y_3\}$ reprezentowana przez poniższy graf $K_{3,3}$, narysowany na dwa sposoby:





Dowodzi się, że graf nie jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera graf K_5 lub graf $K_{3,3}$.

Przykłady

- Macierz dla relacji mniejszości w zbiorze $\{1, 2, 3\}$:

$<$	1	2	3
1	0	1	1
2	0	0	1
3	0	0	0

- Macierz relacji identyczności na zbiorze $\{1, 2, 3\}$:

$=$	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

Przykład

- Macierz dla relacji inkluzji właściwej w rodzinie podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3\}$:

$\subset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\emptyset$	0	1	1	1	1	1	1	1
$\{1\}$	0	0	0	0	1	1	0	1
$\{2\}$	0	0	0	0	1	0	1	1
$\{3\}$	0	0	0	0	0	1	1	1
$\{1, 2\}$	0	0	0	0	0	0	0	1
$\{1, 3\}$	0	0	0	0	0	0	0	1
$\{2, 3\}$	0	0	0	0	0	0	0	1
$\{1, 2, 3\}$	0	0	0	0	0	0	0	0

Proste wnioskowania

Które z rozumowań uznasz za poprawne:

- Skoro A jest przodkiem B, zaś B jest przodkiem C, to A jest przodkiem C.
- Skoro A jest ojcem B, zaś B jest ojcem C, to A jest ojcem C.
- Skoro liczba a jest mniejsza od liczby b, to b nie jest mniejsza od a.
- Dla dowolnych liczb rzeczywistych x oraz y, skoro nie zachodzi $x < y$ i nie zachodzi $x = y$, to $y < x$.

- Na jakiej podstawie sądzisz, że żadna liczba nie jest mniejsza od siebie samej?
- Na jakiej podstawie uznajesz niektóre z powyższych rozumowań za poprawne, a niektóre za niepoprawne?

Niech R będzie relacją dwuargumentową na zbiorze X, czyli $R \subseteq X \times X$.

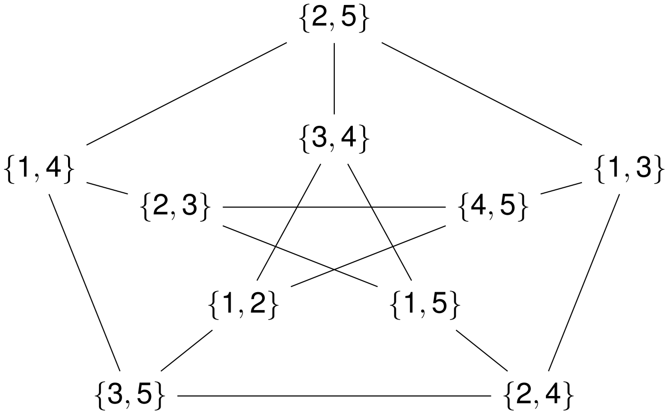
- Relacja R jest *zwrotna*, gdy xRx dla wszystkich $x \in X$.
- Relacja R jest *przeciwzwrotna*, gdy xRx nie zachodzi dla żadnego $x \in X$.

Przykłady:

- Relacja $\leqslant$ jest zwrotna w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.
- Relacja $<$ jest przeciwzwrotna w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.
- Istnieją relacje, które nie są ani zwrotne ani przeciwzwrotne, np: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

- Relacja R jest *symetryczna*, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli xRy, to yRx.
- Relacja R jest *asymetryczna*, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli xRy, to nie zachodzi yRx.
- Relacja R jest *antysymetryczna*, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli xRy oraz yRx, to $x = y$.

- Relacja rozłączności zbiorów jest symetryczna.
- Relacja $<$ jest asymetryczna w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.
- Relacja $\leqslant$ jest antysymetryczna w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.
- Relacja inkluzji jest antysymetryczna w dowolnej rodzinie zbiorów.
- Istnieją relacje, które nie są ani symetryczne ani asymetryczne, np.: $\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1)\}$.



Relacja rozłączności w rodzinie dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,4,5\}$.

- Relacja R jest *przechodnia*, gdy dla wszystkich $x \in X$, $y \in X$ oraz $z \in X$: jeśli xRy oraz yRz, to xRz.
- Relacja R jest *euklidesowa*, gdy dla wszystkich $x \in X$, $y \in X$ oraz $z \in X$: jeśli xRy oraz xRz, to yRz.

- Relacja inkluzji jest przechodnia.
- Relacja bycia elementem nie jest przechodnia.
- Relacja równoległości prostych na płaszczyźnie jest euklidesowa.
- Relacja prostopadłości prostych na płaszczyźnie nie jest przechodnia i nie jest euklidesowa.
- Relacje $<$ oraz $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych są przechodnie.
- Relacja zachodząca między ludźmi określona następująco: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy y jest przyjacielem (lub przyjaciółką) x nie jest przechodnia. Doradzamy pamiętać, że *przyjaciółka twojego przyjaciela niekoniecznie jest twoją przyjaciółką*.

- Relacja R jest *spójna*, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: $x = y$ lub xRy lub yRx.
- Wyrazić ten warunek można również tak: relacja R jest *spójna*, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli $x \neq y$, to xRy lub yRx.

- Relacja $<$ jest spójna w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.
- Relacja inkluzji (w całkiem dowolnej rodzinie zbiorów) nie jest spójna.

- Relacja R jest *serialna*, gdy dla każdego $x \in X$ istnieje $y \in X$ taki, że xRy.

- Relacja $<$ w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych jest serialna.
- Relacja podzielności ($x|y$, gdy x dzieli y) w zbiorze wszystkich dodatnich liczb naturalnych jest serialna.
- Relacja $\subset$ inkluzji właściwej w rodzinie podzbiorów $\wp(X)$ dowolnego niepustego zbioru X nie jest serialna: nie zachodzi $X \subset X$.

- Rozważmy relację między (wszystkimi kiedykolwiek żyjącymi) ludźmi, określoną następująco: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x jest przodkiem y.
- Innymi słowy, xRy zachodzi wtedy, gdy y jest potomkiem (czyli dzieckiem, wnukiem, prawnukiem, itd.) x.
- *Czujemy intuicyjnie*, że przodkowie naszych przodków są naszymi przodkami oraz że potomkowie naszych potomków są naszymi potomkami.
- Kłopot sprawia ustalenie listy Pierwszych Przodków, jak słuchacze dowiedzą się z kursu dotyczącego ewolucyjnych aspektów nauk kognitywnych.
- Doktryny religijne dostarczają dogmatycznych odpowiedzi na ten temat i nie powinniśmy się nimi przejmować.
- Z czysto formalnego punktu widzenia możemy ustalić m.in., że wyżej określona relacja R nie jest serialna: istnieli i istnieją ludzie, którzy są bezpotomni.

Czy z reprezentacji własności w postaci grafów lub macierzy odczytać można własności relacji? Innymi słowy: jakie regularności w owych reprezentacjach odpowiadają poszczególnym własnościom relacji?

- Graf relacji zwrotnej zawiera pętlę przy każdym wierzchołku.
- Graf relacji przeciwzwrotnej nie zawiera żadnej pętli.
- W grafie relacji symetrycznej: jeśli dwa wierzchołki są połączone zorientowaną krawędzią, to w obie strony. Tak więc, grafy relacji symetrycznych można uprościć, pomijając orientację krawędzi (i rysując jedynie krawędzie *niezorientowane*).
- W grafie relacji asymetrycznej jeśli dwa wierzchołki są połączone zorientowaną krawędzią, to tylko w jedną stronę.
- Macierz relacji zwrotnej ma na głównej przekątnej jedynki.
- Macierz relacji symetrycznej jest symetryczna względem głównej przekątnej.

- Relacjom mogą przysługiwać całe zestawy własności.
- Tak więc, relacje, które odpowiadają nieodróżnialności obiektów pod ustalonymi względami mają kilka wspólnych własności.
- Relacje między obiektami mogą odwoływać się do cech tych obiektów, np. do posiadania jakiejś wspólnej cechy, bądź różnienia się jakąś cechą.
- Relacje ustalające uszeregowania obiektów lub ustalania hierarchicznej struktury w zbiorze obiektów także mają wspólne własności, odnoszące się do porzedzania jednych obiektów przez inne obiekty.
- Relacjom porządkującym (szeregowania, hierarchie) poświęcony jest w całości jeden z dalszych wykładów.

- Relacje, które są zwrotne i symetryczne, nazywamy relacjami *podobieństwa* (lub *tolerancji*). Podobieństwo polegać może na posiadaniu przez obiekty co najmniej jednej cechy wspólnej (z jakiegoś ustalonego inwentarza cech).
- Relacje, które są przeciwzwrotne i symetryczne, nazywamy relacjami *opozycji*. Opozycja może polegać na różnieniu się obiektów co najmniej jedną cechą (z jakiegoś ustalonego inwentarza cech).
- Jeśli niepusta relacja R jest przechodnia, asymetryczna oraz serialna, to jej pole musi być zbiorem *nieskończonym*. Zachęcamy słuchaczy do refleksji nad tym stwierdzeniem.

- Niech R będzie relacją dwuargumentową na zbiorze X, czyli $R \subseteq X \times X$. Mówimy, że R jest *relacją równoważności* na zbiorze X, jeśli R jest relacją zwrotną, symetryczną oraz przechodnią w X.
- Jeśli R jest relacją równoważności na X, to oznaczamy:
  1. $[x]_R = R(x) = \{y \in X : xRy\}$. Zbiór $[x]_R$ nazywamy *klasą abstrakcji* (*klasą równoważności*) elementu $x \in X$ względem relacji R.
  2. $X/R = \{[x]_R : x \in X\}$. Rodzinę X/R nazywamy rodziną *klas abstrakcji* relacji R. Używa się również terminu *zbiór ilorazowy zbioru* X *względem relacji* R na oznaczenie zbioru X/R.

- Każda klasa abstrakcji relacji R jest zbiorem niepustym. To wynika ze zwrotności R.
- Każdy element zbioru X należy do jakiejś klasy abstrakcji relacji R (czyli suma rodziny wszystkich klas abstrakcji relacji R jest równa zbiorowi X). To wynika ze zwrotności R oraz z faktu, że każda klasa abstrakcji jest podzbiorem zbioru X.

Jeśli R jest relacją równoważności na zbiorze X, to xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $[x]_R = [y]_R$.

- Załóżmy bowiem, że xRy. Aby udowodnić, że wtedy $[x]_R = [y]_R$, zauważmy, że wystarczy (ze względu na to, iż R jest symetryczna) pokazać, że $[x]_R \subseteq [y]_R$. Niech $z \in [x]_R$. Wtedy zRx. Ponieważ z założenia xRy, a więc, na mocy przechodniości relacji R, zRy, czyli $z \in [y]_R$.
- Załóżmy teraz, że $[x]_R = [y]_R$. Mamy xRx (zwrotność), czyli $x \in [x]_R$. Ponieważ $[x]_R = [y]_R$, więc $x \in [y]_R$, a to oznacza, że xRy.

- Pokażemy, że każde dwie różne klasy abstrakcji relacji R są rozłączne.
- Z tego, co udowodniono przed chwilą wynika, że jeśli $[x]_R \neq [y]_R$, to nie zachodzi xRy.
- Musimy pokazać, że $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.
- Przeprowadzimy dowód nie wprost.
- Przypuśćmy, że $z \in [x]_R \cap [y]_R$.
- Wtedy xRz oraz zRy, a zatem (przechodniość R), także xRy, wbrew założeniu.
- Musimy więc odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie: $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

Przykłady

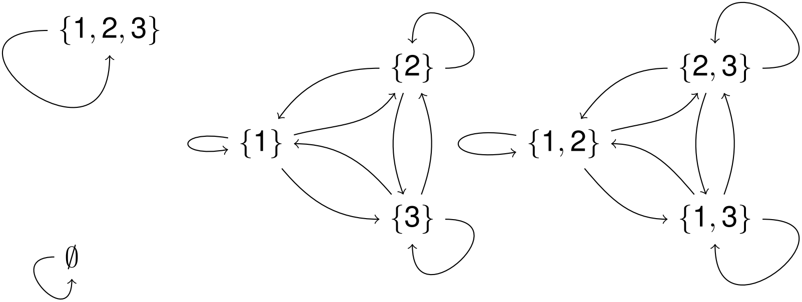
- *Relacja identyczności*. Relacja identyczności (na zbiorze X) to zbiór $\{(x, x) : x \in X\}$. Nazywa się ją też czasem *przekątną* zbioru X. Używa się dla niej oznaczeń: $=$, id_X, $\triangle_X$.
- Relacja identyczności na zbiorze X jest zawarta w każdej relacji równoważności na tym zbiorze. Każda relacja równoważności na zbiorze X jest zawarta w relacji pełnej $X \times X$, która jest oczywiście relacją równoważności.
- Relacja przystawania trójkątów jest relacją równoważności.
- Relacja równoległości prostych na płaszczyźnie jest relacją równoważności. Każda jej klasa abstrakcji wyznacza zatem pewien *kierunek* na płaszczyźnie.
- *Kongruencje*. Jak zobaczymy nieco później, szczególnie ważne są takie relacje równoważności, które – w ściśle określonym sensie – są *zgodne* z działaniami na obiektach matematycznych.

Macierz relacji $\doteq$ równoliczności na zbiorze $\wp(\{1, 2, 3\})$: $A \doteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy A ma tyle samo elementów co B.

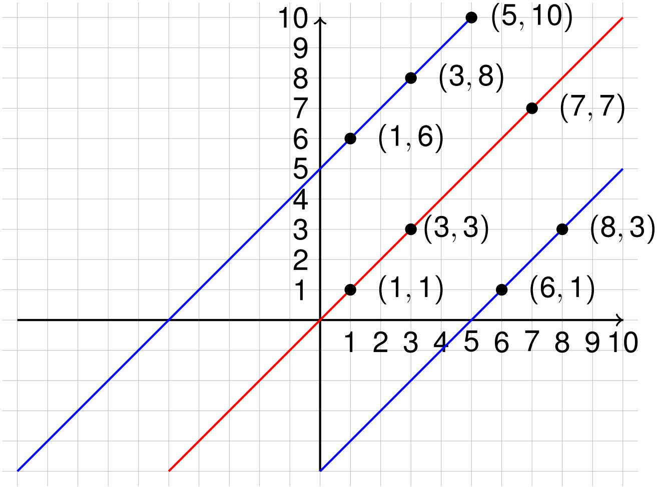
$\doteq$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\emptyset$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\{1\}$	0	1	1	1	0	0	0	0
$\{2\}$	0	1	1	1	0	0	0	0
$\{3\}$	0	1	1	1	0	0	0	0
$\{1,2\}$	0	0	0	0	1	1	1	0
$\{1,3\}$	0	0	0	0	1	1	1	0
$\{2,3\}$	0	0	0	0	1	1	1	0
$\{1,2,3\}$	0	0	0	0	0	0	0	1

Bloki złożone z samych 1 odpowiadają klasom równoważności tej relacji. Zbiór ilorazowy $\wp(\{1, 2, 3\})/\doteq$ to rodzina: $\{\{\emptyset\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}\}$.

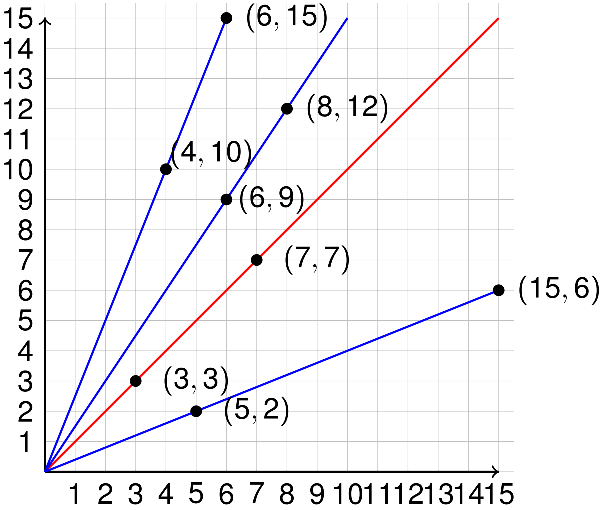
Graf tej samej relacji:



Każda klasa rozważanej relacji równoważności jest reprezentowana przez *składową* grafu. Każda składowa jest grafem pełnym. Składowe są rozłączne.


(5, 10)
(3, 8)
(7, 7)
(1, 6)
(3, 3)
(8, 3)
(1, 1)
(6, 1)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

- Określamy relację $\approx \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$: $(a, b) \approx (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a + d = c + b$.
- Jest to relacja równoważności.
- Narysujmy prostą $f(x) = x$ i dla każdego punktu $(n, 0)$ prostą przechodzącą przez ten punkt i równoległą do prostej $f(x) = x$.
- Graficzną reprezentacją klasy równoważności $[(a, b)]_{\approx}$ jest zbiór wszystkich punktów kratowych (c, d) leżących na tej samej prostej, na której leży punkt (a, b).
- W wykładzie 6 pokażemy, że powyższa konstrukcja pozwala otrzymać reprezentację zbioru liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, wychodząc od liczb naturalnych i operacji ich dodawania.


(6, 15)
(8, 12)
(4, 10)
(6, 9)
(7, 7)
(15, 6)
(3, 3)
(5, 2)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

- Określamy relację $\sim \subseteq (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})) \times (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}))$ wzorem: $(a, b) \sim (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot d = b \cdot c$.
- Jest to relacja równoważności.
- Dla każdego punktu kratowego (a, b) w pierwszej ćwiartce płaszczyzny kartezjańskiej narysujmy prostą przechodzącą przez ten punkt i przez początek układu współrzędnych.
- Graficzną reprezentacją klasy równoważności $[(a, b)]_\sim$ jest zbiór wszystkich punktów kratowych (c, d), leżących na tej samej prostej, na której leży punkt (a, b).
- W wykładzie 6 pokażemy, że powyższa konstrukcja pozwala otrzymać reprezentację zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, wychodząc od liczb całkowitych i operacji ich mnożenia.

Podziałem zbioru X nazywamy każdą rodzinę jego niepustych podzbiorów $\mathcal{X}$ taką, że:

1. Dowolne dwa różne elementy rodziny $\mathcal{X}$ są zbiorami rozłącznymi.
2. Suma wszystkich zbiorów należących do rodziny $\mathcal{X}$ jest równa zbiorowi X.

- Rozważmy relację $\equiv_2$ określoną dla liczb całkowitych w sposób następujący: $x \equiv_2 y$ wtedy i tylko wtedy, gdy x oraz y mają takie same reszty z dzielenia przez 2. Relacja ta wyznacza podział zbioru $\mathbb{Z}$ na dokładnie dwie klasy: wszystkich całkowitych liczb parzystych oraz wszystkich całkowitych liczb nieparzystych.
- Rozważmy teraz relację $\equiv_n$ określoną dla liczb całkowitych w sposób następujący: $x \equiv_n y$ wtedy i tylko wtedy, gdy x oraz y mają takie same reszty z dzielenia przez n. Czy potrafisz wskazać rodzinę wszystkich klas abstrakcji tej relacji?

Podziałem zbioru X nazywamy każdą rodzinę jego niepustych podzbiorów $\mathcal{X}$ taką, że:

1. Dowolne dwa różne elementy rodziny $\mathcal{X}$ są zbiorami rozłącznymi.
2. Suma wszystkich zbiorów należących do rodziny $\mathcal{X}$ jest równa zbiorowi X.

- Rozważmy relację $\equiv_2$ określoną dla liczb całkowitych w sposób następujący: $x \equiv_2 y$ wtedy i tylko wtedy, gdy x oraz y mają takie same reszty z dzielenia przez 2. Relacja ta wyznacza podział zbioru $\mathbb{Z}$ na dokładnie dwie klasy: wszystkich całkowitych liczb parzystych oraz wszystkich całkowitych liczb nieparzystych.
- Rozważmy teraz relację $\equiv_n$ określoną dla liczb całkowitych w sposób następujący: $x \equiv_n y$ wtedy i tylko wtedy, gdy x oraz y mają takie same reszty z dzielenia przez n. Czy potrafisz wskazać rodzinę wszystkich klas abstrakcji tej relacji?

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między relacjami równoważności, określonymi na danym zbiorze a podziałami tego zbioru:

- Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze X. Wtedy rodzina wszystkich jej klas abstrakcji jest podziałem zbioru X. Pokazaliśmy to już poprzednio.
- Jeśli $\mathcal{X}$ jest podziałem zbioru X, to relacja $R_{\mathcal{X}} \subseteq X \times X$ określona następująco: $xR_{\mathcal{X}}y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $A \in \mathcal{X}$ taki, że $x \in A$ oraz $y \in A$ jest relacją równoważności na zbiorze X. Zwrotność relacji $R_{\mathcal{X}}$ wynika z tego, że suma wszystkich elementów podziału $\mathcal{X}$ zbioru X wyczerpuje cały zbiór X. Relacja $R_{\mathcal{X}}$ jest oczywiście symetryczna. Przechodniość relacji $R_{\mathcal{X}}$ wynika z faktu, że elementy podziału $\mathcal{X}$ zbioru X są rozłączne.

- Jeśli $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{Y}$ są podziałami zbioru X, to ich *skrzyżowaniem* nazywamy rodzinę $\mathcal{Z}$ podzbiorów zbioru X taką, że:
  1. Dla dowolnych $A \in \mathcal{X}$ oraz $B \in \mathcal{Y}$ mamy: $A \cap B \in \mathcal{Z}$.
  2. Dla dowolnego $C \in \mathcal{Z}$ istnieją $A \in \mathcal{X}$ oraz $B \in \mathcal{Y}$ takie, że $C = A \cap B$.
- Jeśli skrzyżowanie dwóch podziałów $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{Y}$ zbioru X jest podziałem zbioru X, to mówimy, że podziały $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{Y}$ są *niezależne*.

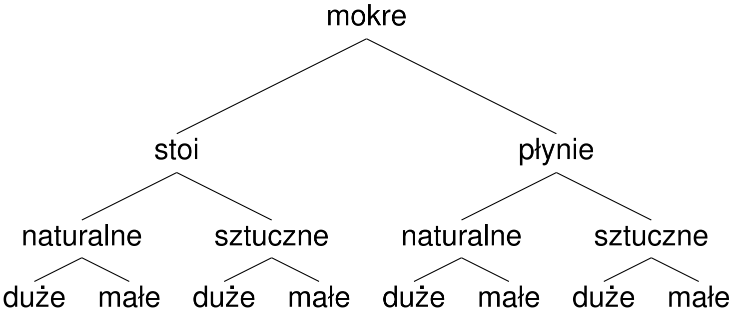
- Podział zbioru nazywany bywa też *klasyfikacją*.
- O podziałach oraz ich skrzyżowaniach mowa też będzie podczas kursu *Wprowadzenia do logiki*.

Rozważmy trzy podziały następujących ośmiu mokrych (wypełnionych wodą) obiektów:

	płynie	stoi	naturalne	sztuczne	duże	małe
rzeka	TAK		TAK		TAK	
strumień	TAK		TAK			TAK
kanał	TAK			TAK	TAK	
rów	TAK			TAK		TAK
morze		TAK	TAK		TAK	
bajoro		TAK	TAK			TAK
staw		TAK		TAK	TAK	
basen		TAK		TAK		TAK

Staw rozumiemy tutaj jako *staw hodowlany*.

Te trzy podziały reprezentować można też poprzez *drzewo*:



Każde dwa z rozważanych podziałów są niezależne. Skrzyżowanie wszystkich trzech rozważanych podziałów daje w wyniku podział, który pozwala odróżnić każde dwa z branych pod uwagę rodzajów obiektów.

Ponieważ – w ujęciu ekstensjonalnym – relacje traktujemy jako zbiory, więc stosować można do nich znane już operacje na zbiorach:

- *Suma relacji R oraz S*:
  $R \cup S = \{(x, y) \in X \times Y : xRy \text{ lub } xSy\}$
- *Iloczyn (część wspólna) relacji R oraz S*:
  $R \cap S = \{(x, y) \in X \times Y : xRy \text{ oraz } xSy\}$
- *Różnica relacji R oraz S*:
  $R - S = \{(x, y) \in X \times Y : xRy \text{ oraz nie zachodzi } xSy\}$
- *Różnica symetryczna relacji R oraz S*:
  $R \div S = (R - S) \cup (S - R) = (R \cup S) - (R \cap S)$
- *Dopełnienie relacji R*: R' (inne oznaczenie: $-R$):
  $R' = \{(x, y) \in X \times Y : \text{ nie zachodzi } xRy\} = (X \times Y) - R$

Operacje boolowskie wykonywać można też oczywiście w przypadku, gdy $X = Y$, a więc dla relacji określonych na ustalonym zbiorze X.

Przykłady

- Suma relacji $<$ oraz relacji $=$ to relacja $\leqslant$ (powiedzmy, w zbiorze $\mathbb{R}$).
- Iloczyn relacji $\leqslant$ oraz $\geqslant$ to relacja identyczności $=$ (powiedzmy, w zbiorze $\mathbb{R}$).

- Różnica relacji $\leqslant$ oraz $=$ to relacja $<$ (powiedzmy, w zbiorze $\mathbb{R}$).
- Różnica symetryczna relacji $\leqslant$ oraz $\geqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$ to suma relacji $<$ oraz $>$, a więc (prawo trychotomii!) dopełnienie relacji identyczności.
- Dopełnienie relacji $<$ w zbiorze $\mathbb{R}$ to relacja $\geqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$.

Konwers

- Niech R będzie relacją dwuargumentową między elementami zbiorów X oraz Y, czyli $R \subseteq X \times Y$.
- *Relacją odwrotną* do relacji R (inaczej: *konwersem* relacji R) nazywamy relację $R^{-1} \subseteq Y \times X$ zdefiniowaną następująco: $yR^{-1}x$ wtedy i tylko wtedy, gdy xRy. Inne czasem używane oznaczenie dla konwersu relacji R to $\breve{R}$.

$$\begin{tikzcd} & & c \arrow[d] \\ a \arrow[r] & b \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & c \arrow[dl] \\ a & b \arrow[l] & \\ & & d \arrow[ul] \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

$R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, d)\}$
$R^{-1} = \{(b, a), (c, b), (d, b), (d, c)\}$
Macierz dla R^{-1} ma zera tam, gdzie macierz dla R ma jedynki, a jedynki tam, gdzie macierz dla R ma zera.

Konwers

- Konwersem relacji $<$ w zbiorze $\mathbb{N}$ jest relacja $>$ w zbiorze $\mathbb{N}$.
- Konwersem relacji $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest relacja $\geqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$.
- Nie należy mylić dopełnienia relacji z jej konwersem! Zauważmy, że np.: dopełnieniem relacji $<$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest relacja $\geqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$, natomiast konwersem relacji $<$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest relacja $>$ w zbiorze $\mathbb{R}$.
- Konwersem relacji *bycia mężem* (w sensie Konstytucji RP) jest relacja *bycia żoną* (w sensie Konstytucji RP).

Złożenie

- Niech R będzie relacją dwuargumentową między elementami zbiorów X oraz Y, czyli $R \subseteq X \times Y$, zaś S relacją dwuargumentową między elementami zbiorów Y oraz Z, czyli $S \subseteq Y \times Z$.
- *Złożeniem* relacji R oraz S nazywamy relację $R \circ S \subseteq X \times Z$ zdefiniowaną następująco: $xR \circ Sz$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $y \in Y$ taki, że xRy oraz ySz.

$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "S"] & z \\
x \arrow[u, "R"] \arrow[ur, "R \circ S"'] &
\end{tikzcd}
$$

Złożenie

- Rozważmy relacje $<$ oraz $>$ w zbiorze $\mathbb{Z}$ wszystkich liczb całkowitych. Kiedy zachodzi $x < \circ > y$? Z definicji złożenia relacji jest tak wtedy, gdy istnieje $z \in \mathbb{Z}$ taka, że $x < z$ oraz $z > y$. Ponieważ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}$ taka z istnieje (np. $z = |x| + |y| + 1$), więc złożenie $< \circ >$ jest relacją pełną w $\mathbb{Z}$, czyli $< \circ > = \mathbb{Z}^2$.
- Złożeniem relacji $<$ z relacją $<$ w zbiorze $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych jest relacja $<$. Mamy zatem: $< \circ < = <$.

Rozważmy relacje: *być żoną* (w sensie Konstytucji RP) oraz *być ojcem* (biologicznym). Co jest złożeniem tych relacji? Jeżeli osoba x miałaby być w tym złożeniu relacji z osobą y, to musiałaby istnieć osoba z taka, że:

1. x jest żoną z oraz
2. z jest biologicznym ojcem y.

- Tak więc, omawiane złożenie to relacja: *być matką lub macochą*. Zauważmy jednak, że w ten sposób uwzględniamy tylko matki pozostające w związku małżeńskim (w sensie Konstytucji RP), a pomijamy matki niezamężne, np. panny, rozwódki, wdowy. Pomijamy też drażliwą sprawę dzieci pozamałżeńskich.
- Cóż, dzieci rodzą się niezależnie od ustaleń Konstytucji RP oraz zaleceń doktryn religijnych.
- Jak mawiał John von Neumann: *kto mówi, że Matematyka jest trudna, ten nie ma pojęcia, jak skomplikowane jest Życie*.

Przechodnim domknięciem relacji $R \subseteq X \times X$ nazywamy relację R^{tr} zdefiniowaną indukcyjnie:

1. $R^1 = R$
2. $R^{n+1} = R^n \circ R$
3. $R^{tr} = \bigcup_n R^n$.

Tak więc, $xR^{tr}y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ oraz istnieją elementy $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ takie, że $x_0 = x$, $x_n = y$ oraz x_iRx_{i+1} dla wszystkich $0 \leqslant i < n$.

- Relacja R^{tr} jest przechodnia, dla dowolnej relacji R.
- Przechodnie domknięcie relacji podobieństwa jest relacją równoważności.

Jest jeszcze całe mnóstwo dalszych operacji na relacjach, czujemy jednak, że ich omawianie w tym momencie byłoby przesadą.

Przykłady praw

- Operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.
- Operacja złożenia nie jest przemienna, tj. nie dla wszystkich relacji R_1 i R_2 zachodzi: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
- $R \circ id_X = id_X \circ R = R$.
- $R \circ \emptyset = \emptyset \circ R = \emptyset$.
- $(R^{-1})^{-1} = R$, $(R^{-1})' = (R')^{-1}$.

- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
- $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$.
- $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$,
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Udowodnimy, dla przykładu, że: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych relacji R oraz S oraz dowolnych x i y:

- $x(R \circ S)^{-1}y$
- $y(R \circ S)x$
- istnieje z taki, że yRz oraz zSx
- istnieje z taki, że zSx oraz yRz
- istnieje z taki, że $xS^{-1}z$ oraz $zR^{-1}y$)
- $x(S^{-1} \circ R^{-1})y$.

Słuchacze mogą próbować dowieść niektórych z tych praw. Ważne jest nie zapamiętywanie poszczególnych praw (nie prowadzimy kursu botaniki), lecz raczej *odwaga (i rozwaga) dedukcyjna*: postawa przejawiająca się w tym, że staramy się poprawnie *rozumować*, czyli efektywnie korzystać z mocy naszych umysłów.

Spróbujesz udowodnić?

W terminach operacji na relacjach wyrazić można własności relacji, np.:

- R jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $id_X \subseteq R$
- R jest przeciwzwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap id_X = \emptyset$
- R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$
- R jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap R^{-1} = \emptyset$

- R jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap R^{-1} \subseteq id_X$
- R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$
- R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{tr}$
- R jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cup R^{-1} \cup id_X = X \times X$.

Spróbujesz udowodnić?

- Jeśli relacje R i S są zwrotne, to relacje: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \circ S$, R^{-1}, R^{tr} też są zwrotne.
- Jeśli relacje R i S są przeciwzwrotne, to relacje: $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1} też są przeciwzwrotne.
- Złożenie $R \circ S$ relacji przeciwzwrotnych jest przeciwzwrotne wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} = \emptyset$.

- Jeśli relacje R i S są symetryczne, to symetryczne są też relacje: $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}, $R \circ R^{-1}$, R^{tr}.
- Jeśli relacje R i S są symetryczne, to $R \circ S$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = S \circ R$.
- Jeśli R jest asymetryczna, to R^{-1} też.

Spróbujesz udowodnić?

- Jeśli R jest asymetryczna, to $R \cap S$ jest asymetryczna, dla dowolnej S.
- Jeśli R i S są przechodnie, to $R \cap S$, R^{-1} i R^{tr} też.
- Jeśli R i S są antysymetryczne, to $R \cap S$ i R^{-1} też.

- Jeśli R i S są antysymetryczne, to: $R \cup S$ jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} \subseteq id_X$.
- Jeśli R i S są asymetryczne, to: $R \cup S$ jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} = \emptyset$.
- Jeśli R jest symetryczna i przechodnia, to R jest zwrotna, czyli $R = R^{-1}$ oraz $R \circ R \subseteq R$ implikują $id_X \subseteq R$.

Udowodnimy, dla przykładu, że: złożenie $R_1 \circ R_2$ równoważności R_1 i R_2 jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
Najpierw pokazujemy, że jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
Jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to zachodzą następujące równości: $R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1$.

Niech $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Pokażemy, że $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością.
Po pierwsze, mamy: $(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2$, tj. $R_1 \circ R_2$ jest symetryczna. Po drugie, mamy:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 = (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest przechodnia. Zwrotność $R_1 \circ R_2$ jest oczywista, ponieważ R_1 oraz R_2 są zwrotne z założenia.

Myśl przekornie!

- Jakiego typu relacją jest związek przyczynowo skutkowy?
- Jak wyrazić *siłę* (stopień) zachodzenia relacji?
- Jakiego typu relacją jest *analogia*?

- Jak wiadomo, *do zdrady trzeba trojga*. Jakie własności mają relacje trójargumentowe (czteroargumentowe, itd.)?
- Czy relacje mogą mieć zmienną liczbę argumentów?
- Czy relacje mogą mieć nieograniczoną liczbę argumentów?

Co musisz ZZZ (Zapamiętać-Ze-Zrozumieniem):

- Relacja dwuargumentowa: zbiór par uporządkowanych.
- Relacja *n*-argumentowa: zbiór *n*-tek uporządkowanych.
- Dziedzina i przeciwdziedzina relacji (dwuargumentowej).
- Obrazy i przeciwobrazy zbiorów względem relacji.
- Własności relacji dwuargumentowych: zwrotność, przeciwzwrotność, symetria, asymetria, antysymetria, przechodniość, euklidesowość, spójność.
- Relacje równoważności: klasy abstrakcji, związek między relacjami równoważności a podziałami zbiorów.
- Operacje na relacjach: operacje boolowskie, konwers, złożenie, przechodnie domknięcie.
- Reprezentacje: grafy, macierze, reprezentacje geometryczne.