O Aksjomatycznych Opisach Języka Naturalnego[1]

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Współczesną lingwistykę strukturalną charakteryzuje się jako naukę zajmującą się badaniem modeli języka (por. np. [1]). Należy oczywiście wyraźnie określić, co rozumie się w tym przypadku przez model języka. W pracy J.A. Szrejdera [8] pokazuje się, że rozumienie terminu „model” w lingwistyce jest odmienne od rozumienia tego terminu w matematyce. Mianowicie w matematyce przez model rozumie się strukturę relacyjną (tj. zbiór z określonymi na nim relacjami), spełniającą pewne zdania zapisane w odpowiednim języku formalnym. W tym sensie np. para $(Z, +)$ złożona ze zbioru liczb całkowitych i operacji dodawania jest modelem tzw. teorii grup. Inaczej mówiąc, w $(Z, +)$ prawdziwe są pewne zdania, przyjmowane za aksjomaty teorii grup (łączność dodawania, istnienie elementu neutralnego i elementu odwrotnego). Widzimy zatem, że modelem (pewnej teorii formalnej) nazywa się w matematyce konstrukt mnogościowy, posiadający własności wymagane przez aksjomaty (tej teorii). Natomiast w lingwistyce rozumienie terminu „model” jest całkiem odmienne: jak wynika z analizowanych przez J.A. Szrejdera cytatów ([8], s. 67), za model języka uważają lingwiści teorię (ewentualnie formalną) opisującą wewnętrzną strukturę języka. Za J.A. Szrejderem będziemy oznaczać przez model$_l$ model w sensie lingwistycznym (a więc pewną teorię), a przez model$_m$ model w sensie matematycznym (czyli pewien konstrukt mnogościowy). Dalszą część tej pracy poświęcimy zbadaniu zależności między modelami$_l$ a modelami$_m$. Jest widoczne, że ściśle określony, jednoznaczny sens ma mówienie o modelu$_m$ dla modelu$_l$ (model$_m$ dla pewnej teorii, którą jest model$_l$ — por. uwagi J.A. Szrejdera [8], str. 75–76). Wykorzystamy niektóre znane rezultaty otrzymane w jednym z działów logiki matematycznej — teorii modeli — dla pokazania, przy jakich założeniach możliwa jest realizacja programu dotyczącego zbudowania aksjomatycznego opisu języka naturalnego. W celu uniknięcia ewentualnych nieporozumień, postaramy się na wstępie z grubsza chociażby określić, co rozumiemy przez aksjomatyczny opis języka. Istotą metody aksjomatycznej (w matematyce) jest określenie obiektów matematycznych oraz relacji między nimi. W odniesieniu do lingwistyki metoda aksjomatyczna polega na:

- sformalizowaniu języka danej teorii lingwistycznej;
- wybraniu z otrzymanego w powyższy sposób języka formalnego pewnej ilości zdań, przyjmowanych bez dowodu (aksjomaty);

[1] Opublikowano w: *Lingua Posnaniensis* **XXII**, 1979, 37–41.

- wyprowadzaniu (za pomocą ustalonych reguł wnioskowania) twierdzeń z przyjętych aksjomatów — twierdzenia te mają opisywać wewnętrzną strukturę języka.

Proces tworzenia modelu$_l$, czyli teorii opisującej strukturę języka, omawiany był przez wielu autorów (por. np. [4], [6]). Najkrócej mówiąc, skonstruowanie teorii lingwistycznej polega na ustaleniu oraz opisie jednostek językowych i zależności między tymi jednostkami. Analizując wypowiedzi lingwistów, można uznać, że przyjmowane są przy tym następujące założenia (por. [4], [5]):

- 1. Bezpośrednio dane dla teorii lingwistycznej są jedynie konkretne wypowiedzi (dowolnej rozciągłości).
- 2. Wypowiedzi dzielone są na konstytuujące je jednostki.
- 3. Podstawą dzielenia wypowiedzi (kryterium wydzielania jednostek z wypowiedzi) są zależności między jednostkami, wiążące je w całą wypowiedź.
- 4. W języku wyodrębnia się poziomy, tj. zbiory takich wypowiedzi, w których zależności łączące jednostki składowe wypowiedzi mają taką samą naturę. Zależności między jednostkami językowymi są różnego rodzaju na różnych poziomach językowych.
- 5. Dla każdych dwóch sąsiednich poziomów językowych, wypowiedzi należące do jednego z tych poziomów traktowane są jako określonego rodzaju kombinacje wypowiedzi należących do drugiego z rozpatrywanych poziomów.

Z powyższych założeń wynika, że każdej wypowiedzi językowej przyporządkowuje się pewien konstrukt, składający się ze zbioru jednostek językowych oraz wiążących te jednostki zależności (np. zdanie złożone z wyrazów z zaznaczonym związkiem rządu, zgody, itp.). Naturalne jest nazywanie tych konstruktów ***tekstami zanalizowanymi***. Zbiór tekstów zanalizowanych (otrzymanych w opisany powyżej sposób) stanowi materiał wyjściowy dla matematyzacji danej teorii lingwistycznej. Naturalnym sposobem matematyzacji teorii lingwistycznej, utworzonej z uwzględnieniem założeń 1.–5., jest następująca procedura (+):

> każdemu tekstowi zanalizowanemu przyporządkowujemy strukturę relacyjną o dziedzinie mającej tyle elementów, z ilu jednostek składa się dany tekst, a której relacje odpowiadają zależnościom między jednostkami w tym tekście.

W wyniku zastosowania tej procedury każdemu poziomowi językowemu przyporządkowana zostaje rodzina struktur relacyjnych o tej samej sygnaturze. Można zapisać (w języku teorii mnogości) warunki stwierdzające powiązanie poszczególnych poziomów językowych. Dokładniejsze rozważania na ten temat znaleźć można w [5].

Procedura (+) stanowi przejście od modelu$_l$ do modelu$_m$. Opiszemy tę zależność nieco dokładniej. Zakładamy przy tym, że czytelnik zna rachunek predykatów i teorię modeli w zakresie elementarnym. Dla ustalenia uwagi zajmować się będziemy dalej jednym, dowolnie wybranym poziomem językowym. Niech S będzie rodziną struktur relacyjnych przyporządkowanych tekstom z tego poziomu za pomocą (+). Oznaczmy przez L język rachunku predykatów pierwszego rzędu, którego stałymi pozalogicznymi są nazwy relacji występujących w strukturach z S. Potrzebnych nam będzie w dalszym ciągu jeszcze kilka oznaczeń:

- niech M_ω oznacza klasę wszystkich struktur relacyjnych o sygnaturze ω;
- niech L_ω oznacza język rachunku predykatów pierwszego rzędu o zbiorze stałych pozalogicznych równym ω;
- dla $K \subseteq M_\omega$ niech $Th(K)$ oznacza zbiór tych zdań z języka L_ω, które prawdziwe są we wszystkich strukturach należących do K;
- jeśli F jest zbiorem zdań z L_ω, to niech $Mod(F)$ będzie zbiorem tych struktur należących do M_ω, w których prawdziwe są wszystkie zdania z F;
- mówimy, że $K \subseteq M_\omega$ jest aksjomatyzowalną klasą struktur, jeśli istnieje zbiór F zdań z języka L_ω taki, że $K = Mod(F)$;
- dla $A, B \in M_\omega$ zapis $A \equiv B$ oznacza, że A i B są elementarnie równoważne, tj. spełniają dokładnie te same zdania z języka L_ω.

Wróćmy jeszcze do analizowanej teorii lingwistycznej. W przyjętych przez nas oznaczeniach, jeśli S jest zbiorem struktur relacyjnych odpowiadających tekstom zanalizowanym z ustalonego poziomu językowego, to L jest językiem formalnym odpowiadającym językowi rozpatrywanej teorii lingwistycznej (zrelatywizowanej do ustalonego poziomu językowego). Zbiór $Th(S)$ jest zbiorem wszystkich zdań języka L, prawdziwych we wszystkich strukturach należących do S. Zatem $Th(S)$ jest formalnym zapisem własności rozpatrywanego poziomu językowego. Zgodnie z poprzednimi uwagami, zbiór $Th(S)$ nazywać możemy modelem$_l$ danego poziomu językowego. Tenże poziom językowy będzie opisany w sposób aksjomatyczny, jeśli znajdziemy zbiór F zdań z języka L taki, że $S = Mod(F)$. Widzimy zatem, że pojęcia: model$_l$ i aksjomatyczny opis języka nie muszą oznaczać tego samego. Pokażemy to zresztą za chwilę w sposób ścisły, używając niektórych twierdzeń logiki matematycznej. Najpierw jednak rozpatrzmy konkretny przykład. Niech mianowicie S będzie rodziną struktur relacyjnych odpowiadającą poziomowi zdań w jakimś ustalonym języku (np. angielskim). Wtedy S składa się oczywiście ze struktur skończonych. Przypuśćmy, że analizowana przez nas teoria lingwistyczna nie nakłada żadnych ograniczeń na długość zdania (przykładem takiej teorii jest teoria gramatyk generatywnych). Wtedy w S istnieć będą struktury dowolnej mocy skończonej. Można w takim przypadku udowodnić, że S nie jest aksjomatyzowalnym zbiorem struktur, czyli że własność „być zdaniem" (np. języka angielskiego) nie daje się opisać w sposób aksjomatyczny w sformalizowanym języku danej teorii lingwistycznej. Mianowicie prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Załóżmy, że S zawiera struktury dowolnie dużej mocy skończonej. Wtedy nie istnieje zbiór F zdań z języka L taki, że $S = Mod(F)$ (inaczej mówiąc, S nie jest wtedy aksjomatyzowalnym zbiorem struktur — nie istnieje aksjomatyczny opis zbioru S w języku L).

Dowód powyższego twierdzenia znaleźć można np. w [3]. Przeprowadza się go przy użyciu konstrukcji tzw. ultraproduktu struktur relacyjnych. Twierdzenie 1 jest szczególnym przypadkiem z szerokiej klasy faktów dotyczących aksjomatyzowalności zbiorów struktur relacuyjnych. Mówi ono kiedy ***nie można*** aksjomatycznie opisać zbioru S w języku L. Powstaje oczywiście problem, jakie są warunki konieczne i wystarczające na to, żeby istniała taka aksjomatyka. Warunki takie podaje znane w teorii modeli twierdzenie:

Twierdzenie 2.

S jest aksjomatyzowalnym zbiorem struktur wtedy i tylko wtedy, gdy

$$S = Mod(Th(S)).$$

Dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje następujący prosty fakt:

- dla dowolnego zbioru F zdań z języka L zachodzi równość

$$Mod(Th(Mod(F))) = Mod(F)$$

(fakt ten wynika z twierdzenia o pełności dla rachunku predykatów — zbiór $Th(Mod(F))$ jest zbiorem wszystkich zdań dowodliwych z F).

W odniesieniu do teorii lingwistycznych twierdzenie 2 podaje warunki konieczne i wystarczające na to, żeby dany poziom językowy mógł być opisany w sposób aksjomatyczny. Korzystając z uczynionych poprzednio uwag i przyjmując, że S jest modelem$_m$ danego poziomu językowego, widzimy, że twierdzenie 2 pokazuje związki między modelem$_m$, modelem$_l$ oraz aksjomatycznym opisem rozpatrywanego poziomu językowego. Z drugiej strony, twierdzenia 1 i 2 wydają się uzasadniać pewien pesymizm, jeśli chodzi o aksjomatyczne opisy języka naturalnego (poziomów językowych) w formalnym języku rachunku predykatów pierwszego rzędu. Na poparcie tego stanowiska przytoczyć można jeszcze jeden fakt. W tym celu, oznaczmy dla $A \in M_\omega$ przez $th(A)$ zbiór wszystkich zdań z języka L_ω prawdziwych w A. Zachodzi następująca równoważność:

- dla dowolnych $A, B \in M_\omega$: $A \equiv B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \in Mod(th(A))$.

Wynika stąd, że S daje się przedstawić w postaci sumy aksjomatyzowalnych zbiorów struktur wtedy i tylko wtedy, gdy S jest zamknięty na elementarną równoważność. Inaczej mówiąc, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.

Następujące warunki są równoważne:

- a) istnieje rodzina $\{F_1, F_2, \ldots\}$ zbiorów zdań z języka L taka, że $S = \bigcup\limits_n Mod(F_n)$
- b) jeśli $A \in S$ oraz $A \equiv B$, to $B \in S$.

Fakt powyższy ma następujące, ważkie dla lingwistyki konsekwencje: jeżeli matematyzacja danej teorii lingwistycznej nie spełnia warunku b), to nie istnieje zbiór (nawet nieskończony) teorii pierwszego rzędu, który stanowiłby rodzinę aksjomatyk dla zbioru tekstów z danego poziomu językowego.

Porównajmy wnioski wynikające z twierdzeń 1.–3. z uwagami J.A. SZREJDERA ([7], str. 216):

> „Mówiliśmy już, że teksty języka naturalnego można rozpatrywać jako modele. Zagadnienia lingwistyki matematycznej byłyby w pewnym sensie wyczerpane, jeżeli udałoby się wykazać, że teksty języka naturalnego tworzą aksjomatyzowalną klasę modeli oraz udało się skonstruować odpowiednią teorię. Najprawdopodobniej zadanie to w takiej formi jest nierozwiązalne."

Wydaje się jednak, że nie należy popadać w zbyt głęboki pesymizm, jeżeli chodzi o aksjomatyczne opisy języka. Posługując się ścisłymi metodami dedukcyjnymi można udowodnić bardzo wiele interesujących faktów na temat modeli$_m$ i modeli$_l$ dla języka naturalnego. Ciekawe wydają się także niektóre propozycje J.A. SZREJDERA dotyczące uczynienia bardziej adekwatnymi formalnych procedur używanych w badaniu języka. Znane są też aksjomatyczne opisy języka w językach formalnych o większej „mocy wyrażania" niż język rachunku predykatów pierwszego rzędu (por. np. [2]).

BIBLIOGRAFIA

1. APRESJAN, J., *Koncepcje i metody współczesnej lingwistyki strukturalnej*, PIW, Warszawa 1971.

2. BATÓG, T., *The axiomatic method in phonology*, Routledge & Kegan Paul, London 1967.

3. BELL, J.L., SLOMSON, A.B, *Models and ultraproducts*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam – London 1969

4. HJELMSLEV, L., *Prolegomena to a theory of language*, The University of Wisconsin Press, Madison 1961.

5. POGONOWSKI, J., Mathematical model of linguistic analysis, *Studia Anglica Posnaniensia* **X**, 1979, 123–130.

6. REWZIN, I.I., *Modeli jazyka*, Izd. AH CCCP, Moskwa 1962.

7. SZREJDER, J.A., *Równość, podobieństwo, porządek*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1975.

8. SZREJDER, J.A., Modeli w lingwistikie i w matiematikie. W: *Matiematiczeskaja lingwistika*, Nauka, Moskwa 1973.

Allatum die 18 mensis Martii 1977