MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

KOGNITYWISTYKA UAM, 2022–2023. ZALICZENIE WYKŁADU: 3.2.2023

Imię i nazwisko: .... WALECZNA MRÓWECZKA

1. [3 punkty] Niech $X = \{2, 3, 5, 6, 10, 30\}$. Narysuj graf relacji $R \subseteq X \times X$, zdefiniowanej warunkiem: $x \; R \; y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $z \in X$ taki, że $y = x \cdot z$.

2. [4 punkty] Niech $X \neq \emptyset$, a R będzie relacją między podzbiorami zbioru X, zdefiniowaną warunkiem: $A \; R \; B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = A \cap B$. Sprawdź, czy jest to relacja: a) zwrotna, b) symetryczna, c) spójna.

3. [4 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C).$$

4. [4 punkty] Wyznacz (w możliwie najprostszej postaci) pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2 - e}{\sqrt{2 \cdot x}}.$$

5. [5 punktów] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i przeprowadź dowód, stosując indukcję matematyczną:

1. Udowodnij, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

2. Udowodnij, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

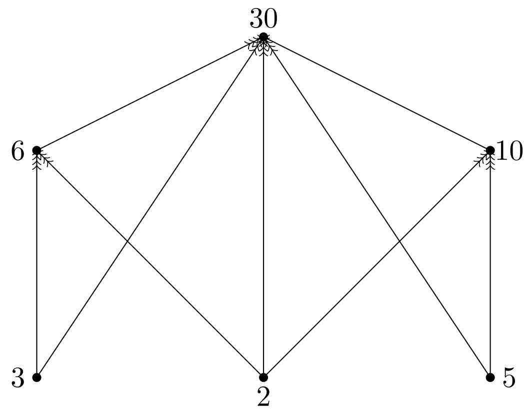
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Liczba punktów	Ocena
< 11	2
11–12	3
13–14	3+
15–16	4
17–18	4+
19–20	5

JERZY POGONOWSKI, Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM, pogon@amu.edu.pl

ROZWIĄZANIA

1. Relacja R to relacja podzielności: $x \ R \ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy y jest podzielna przez x. Graf relacji R wygląda następująco:



2. Akceptujemy każde z podanych rozwiązań:

Pierwsze rozwiązanie. Relacja R to po prostu relacja zawierania się zbiorów (relacja inkluzji), ponieważ następujące warunki są równoważne:

1. $A = A \cap B$
2. $A - B = \emptyset$
3. $A \subseteq B$.

Pamiętamy, że relacja inkluzji jest zwrotna (każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem), antysymetryczna (jeśli $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, to $A = B$) i przechodnia (jeśli $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, to $A \subseteq C$), ale nie jest symetryczna (bo jeśli $A \subset B$, to oczywiście także $A \subseteq B$, ale nie zachodzi $B \subseteq A$) i nie jest spójna (ponieważ jeśli $A \neq B$ oraz $A - B \neq \emptyset$ i $B - A \neq \emptyset$, to nie zachodzi ani $A \subseteq B$ ani $B \subseteq A$).

Drugie rozwiązanie. Można oczywiście sprawdzić, czy R jest zwrotna, symetryczna i spójna, korzystając z podanej definicji R:

Zwrotność. Czy $A \ R \ A$? Mamy $A = A \cap A$, a więc R jest zwrotna.

Symetria. Czy jeśli $A \ R \ B$, to $B \ R \ A$? Aby pokazać, że ten warunek nie jest spełniony, wystarczy zauważyć, że jeśli $A = A \cap B$ oraz $B = B \cap A$, to musi być $A = B$, ponieważ $A \cap B = B \cap A$. A zatem, jeśli $A \ R \ B$ oraz $B \neq A$, to nie zachodzi $B \ R \ A$. Tak więc, R nie jest symetryczna.

Przy okazji, pokazaliśmy, że R jest antysymetryczna. Zauważmy jeszcze, że istnieją relacje, które są jednocześnie symetryczne i antysymetryczne: taka jest np. relacja identyczności.

Spójność. Czy jeśli $A \neq B$, to $A \ R \ B$ lub $B \ R \ A$? Aby pokazać, że ten warunek nie jest spełniony, wystarczy podać przykład zbiorów $A \subseteq X$ oraz $B \subseteq X$ takich, że:

1. $A \neq B$
2. nie zachodzi $A \ R \ B$
3. nie zachodzi $B \ R \ A$.

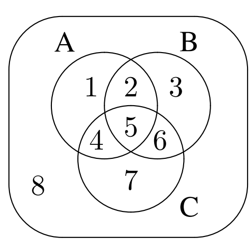
Niech np. $X = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Wtedy:

1. $A \neq B$
2. $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{1\} \neq A$, czyli nie zachodzi $A \ R \ B$
3. $B \cap A = \{2, 3\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \neq B$, czyli nie zachodzi $B \ R \ A$.

Pokazaliśmy więc, że R nie jest spójna.

3. Znalezienie kontrprzykładu dla równości $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$ polega na podaniu takich zbiorów A, B i C, że wynik operacji po lewej stronie tej równości nie będzie tożsamy z wynikiem operacji po prawej stronie.

Można narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości. Jeśli wynik wykonanych operacji po lewej stronie nie będzie tożsamy z wynikiem operacji wykonanych po prawej stronie, to podane zbiory stanowią kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po lewej stronie równości:
$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A - (B \cup C) = \{1\}$.
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po prawej stronie równości:
$A - B = \{1, 4\}$
$A - C = \{1, 2\}$
$(A - B) \cup (A - C) = \{1, 2, 4\}$.
Ponieważ $\{1\} \neq \{1, 2, 4\}$, więc podane zbiory A, B i C stanowią kontrprzykład dla rozważanej równości.

4. Korzystamy ze wzorów na pochodną: ilorazu funkcji, funkcji pierwiastkowej, funkcji wielomianowej i funkcji złożonej.

$$f'(x) = (\frac{x^2 - e}{\sqrt{2 \cdot x}})' =$$

$$\frac{(x^2 - e)' \cdot \sqrt{2 \cdot x} - (x^2 - e) \cdot (\sqrt{2 \cdot x})'}{(\sqrt{2 \cdot x})^2} =$$

$$\frac{2 \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot x} - (x^2 - e) \cdot \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot x}}}{2 \cdot x} =$$

$$\frac{\frac{2 \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot x} \cdot \sqrt{2 \cdot x} - (x^2 - e)}{\sqrt{2 \cdot x}}}{2 \cdot x} =$$

$$\frac{2 \cdot x \cdot 2 \cdot x - x^2 + e}{2 \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot x}} =$$

$$\frac{4 \cdot x^2 - x^2 + e}{2 \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot x}} =$$

$$\frac{3 \cdot x^2 + e}{2 \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot x}}.$$

5.1. Udowodnimy, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k + 1) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2),$$

korzystając z zasady indukcji matematycznej.

Krok początkowy. Dla $n = 1$ lewa strona rozważanej równości to $1 \cdot 2$, czyli 2. Prawa strona to w tym przypadku $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$, czyli także 2. Badana równość zachodzi więc dla $n = 1$.

Krok następnikowy. Zakładamy teraz, że $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ dla pewnej ustalonej $n \leqslant 1$. Musimy pokazać, że wtedy zachodzi także $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \cdot (k+1) = \frac{1}{3} \cdot (n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot ((n+1)+2)$, czyli że $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \cdot (k+1) = \frac{1}{3} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$.

Mamy obliczyć: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \cdot (k+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) + (n+1) \cdot (n+2)$.

Z założenia indukcyjnego: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \cdot (k+1) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + (n+1) \cdot (n+2)$.

Obliczamy: $\frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + (n+1) \cdot (n+2) = (n+1) \cdot (n+2) \cdot (\frac{1}{3} \cdot n + 1) = (n+1) \cdot (n+2) \cdot \frac{1}{3} \cdot (n+3) = \frac{1}{3} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$.

Pokazaliśmy zatem, że jeśli rozważany wzór zachodzi dla pewnej ustalonej $n \geqslant 1$, to zachodzi także dla $n + 1$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, rozważany wzór jest prawdziwy dla wszystkich $n \geqslant 1$.

5.2. Udowodnimy, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

korzystając z zasady indukcji matematycznej.

Krok początkowy. Dla $n = 1$ lewa strona rozważanej równości to $\frac{1}{1 \cdot 2}$, czyli $\frac{1}{2}$. Prawa strona to w tym przypadku $1 - \frac{1}{1+1}$, czyli także $\frac{1}{2}$. Badana równość zachodzi więc dla $n = 1$.

Krok następnikowy. Zakładamy teraz, że $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ dla pewnej ustalonej $n \geqslant 1$. Musimy pokazać, że wtedy zachodzi także $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)+1}$, czyli że $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

Mamy obliczyć: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}$.

Na mocy założenia indukcyjnego: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}$.

Obliczamy: $1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=1-\frac{1}{n+1}\cdot(1-\frac{1}{n+2})=1-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+2-1}{n+2}=1-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}$.

Pokazaliśmy zatem, że jeśli rozważany wzór zachodzi dla pewnej ustalonej $n \geqslant 1$, to zachodzi także dla $n+1$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, rozważany wzór jest prawdziwy dla wszystkich $n \geqslant 1$.