MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

# ZALICZENIE WYKŁADU: 26.I.2017

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

**Imię i nazwisko:**. . . . . . . . . . . . . POGROMCY HYDR LERNEJSKICH

**1**. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$(A \cup C) - (B \cup C) = (A - B) \cap (C - B)$$

**2**. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$a_n = \frac{\sqrt{1 + 2 + 3 + \ldots + n}}{n}$$

**3**. Oblicz drugą pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

**4**. Znajdź w przedziale $[0, e]$ ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

**5**. Udowodnij LEMAT KÖNIGA: jeśli drzewo $D = (X, R, x_0)$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

---

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

# ZALICZENIE WYKŁADU: 26.I.2017

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

**Imię i nazwisko:**. . . . . . . . . . . . . . . . ŁOWCY LWÓW NEMEJSKICH

**1**. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$(A - B) \cap (C - B) = (A - B) \cup (B - C)$$

**2**. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$a_n = n \cdot (\ln(n+1) - \ln n)$$

**3**. Oblicz drugą pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

**4**. Obwód prostokąta wynosi $L$. Przy jakich długościach boków prostokąt ten ma największe pole?

**5**. Udowodnij TWIERDZENIE CANTORA: żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.

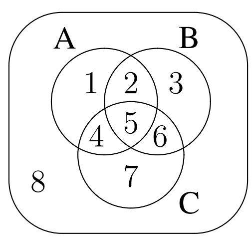
---

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

# ROZWIĄZANIA

POGROMCY HYDR LERNEJSKICH

**1**. Zadanie można rozwiązać różnymi sposobami. Pokażemy rozwiązanie wykorzystujące diagramy Venna. Można narysować diagramy Venna dla lewej i prawej strony badanej równości i pokazać, że reprezentują one różne zbiory, zaznaczając np. różnymi kolorami brane pod uwagę obszary. Ponieważ jednak mamy pokazać, że rozważana równość ***nie*** zachodzi, więc zadanie jest łatwiejsze: umieścimy w każdej składowej diagramu Venna jakiś element (np. liczbę), obliczymy czemu równa jest wtedy lewa i prawa strona rozważanej równości i (jeżeli pytanie było uczciwe) dostaniemy w wyniku różne zbiory.




W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:

1. $A = \{1, 2, 4, 5\}$
2. $B = \{2, 3, 5, 6\}$
3. $C = \{4, 5, 6, 7\}$
4. $A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
5. $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
6. $(A \cup C) - (B \cup C) = \{1\}$
7. $A - B = \{1, 4\}$
8. $C - B = \{4, 7\}$

9. $(A - B) \cap (C - B) = \{4\}$
10. Widać zatem, że $(A \cup C) - (B \cup C) = \{1\} \neq \{4\} = (A - B) \cap (C - B)$.

Podaliśmy więc przykład zbiorów $A$, $B$, $C$, które nie spełniają równości

$$(A \cup C) - (B \cup C) = (A - B) \cap (C - B),$$

czyli wykazaliśmy, że równość ta nie jest prawem rachunku zbiorów.

**2**. Po pierwsze, należało ustalić, czemu równa jest suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, czyli suma pierwszych $n$ dodatnich liczb naturalnych. To można było ustalić na różne sposoby:

1. Wystarczy zauważyć, że mamy do czynienia z sumą $n$ wyrazów ciągu arytmetycznego, którą oznaczmy przez $s_n$ i zastosować znany ze szkoły wzór: $s_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$, czyli $s_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$
2. Można zastosować sprytną argumentację Gaussa, którą – wedle anegdoty – popisał się on w szkole: wypiszmy w jednym rzędzie liczby od 1 do $n$, a pod spodem te same liczby w odwrotnej kolejności:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

   Zauważmy teraz, że sumą każdej kolumny jest $n + 1$, wszystkich kolumn jest $n$, i każda liczba powtarza się dwukrotnie w podanym wyliczeniu. A zatem suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ równa jest $(n + 1) \cdot n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
3. Wreszcie, można było uzasadnić wzór $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ przez indukcję matematyczną. Dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu, czyli dla $k = 1$ wzór oczywiście zachodzi. Czynimy teraz założenie indukcyjne: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$. Musimy udowodnić, że wtedy: $1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$. Mamy:

   $1+2+3+\ldots+k+k+1 = (1+2+3+\ldots+k)+k+1 = \frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1 = \frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$.

   Tak więc, dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych $n$ zachodzi wzór: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Obliczamy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{\sqrt{1+2+3+...+n}}{n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2+3+...+n}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+2+3+...+n}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n^2}} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+n}{2\cdot n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot n}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**3**. Najpierw obliczamy pierwszą pochodną funkcji $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:

$f'(x) = (\frac{x^2-1}{x^2+1})' = \frac{(x^2-1)'\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot x\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2\cdot x}{(x^2+1)^2} =$
$= \frac{2\cdot x^3+2\cdot x-2\cdot x^3+2\cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{4\cdot x}{(x^2+1)^2}$.

Następnie obliczamy drugą pochodną badanej funkcji, również korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:

$f''(x) = (\frac{4\cdot x}{(x^2+1)^2})' = \frac{(4\cdot x)'\cdot(x^2+1)^2-(4\cdot x)\cdot((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4} = \frac{4\cdot(x^2+1)^2-4\cdot x\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2\cdot x}{(x^2+1)^4} =$
$= \frac{4\cdot(x^2+1)\cdot(x^2+1-4\cdot x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{4\cdot(1-3\cdot x^2)}{(x^2+1)^3}$.

**4**. Obliczamy pochodną funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$:

$f'(x) = (\frac{e^x}{x})' = \frac{(e^x)'\cdot x-(x)'\cdot e^x}{x^2} = \frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}\cdot(x-1)$.

Widać zatem, że:

1. $f'(x) = 0$ dla $x = 1$
2. $f'(x) > 0$ dla $x > 1$, czyli $f$ jest rosnąca dla $x > 1$
3. $f'(x) < 0$ dla $x < 1$, czyli $f$ jest malejąca dla $x < 1$.

Funkcja $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ma zatem minimum lokalne w punkcie $x = 1$. Mamy: $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$. Pozostaje obliczenie granic jednostronnych funkcji $f$ na krańcach badanego przedziału. Mamy:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty$
2. $\lim\limits_{x\to e^-} \frac{e^x}{x} = \frac{e^e}{e} = e^{e-1}$.

Zauważamy, że funkcja $f(x) = \frac{e^x}{x}$ nie jest określona dla $x = 0$, czyli lewy kraniec przedziału domkniętego $[0, e]$ nie należy do dziedziny tej funkcji: dziedziną funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$ jest $\mathbb{R} - \{0\}$. Gdybyśmy badali przebieg zmienności tej funkcji w całej jej dziedzinie (co nie było treścią pytania), to można ustalić np. że:

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

4. Osie układu współrzędnych są asymptotami wykresu tej funkcji.

5. Badana funkcja jest wklęsła w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz wypukła w przedziale $(0, \infty)$.

**5**. LEMAT KÖNIGA. *Jeśli drzewo* $D = (X, R, x_0)$ *rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.*

DOWÓD. Przypuśćmy, że $D$ jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w $D$ przez indukcję matematyczną.

Element $x_0$ (czyli korzeń drzewa $D$) jest pierwszym elementem konstruowanej gałęzi. Ponieważ $D$ jest nieskończone, więc $x_0$ ma nieskończenie wiele $R$-następników (bo wszystkie pozostałe wierzchołki drzewa są $R$-następnikami $x_0$). To krok początkowy indukcji.

Kolejne elementy konstruowanej gałęzi nieskończonej będziemy wybierali z kolejnych poziomów drzewa.

Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że $x_i$ należy do $i$-tego poziomu drzewa $D$ oraz $x_i$ ma nieskończenie wiele $R$-następników (dla $0 \leqslant i < n$). To założenie indukcyjne. Trzeba teraz pokazać, że znajdziemy element $x_n$ z $n$-tego poziomu drzewa $D$, który ma nieskończenie wiele $R$-następników i który dołączymy do konstruowanej gałęzi.

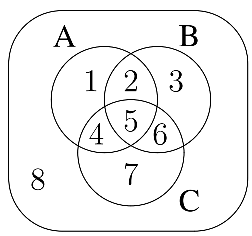
Z założenia (że drzewo $D$ jest rzędu skończonego), $x_{n-1}$ ma tylko skończenie wiele *bezpośrednich* $R$-następników i wszystkie te bezpośrednie $R$-następniki elementu $x_{n-1}$ należą do $n$-tego poziomu drzewa $D$. Ponieważ $x_{n-1}$ ma nieskończenie wiele $R$-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich $R$-następników także ma nieskończenie wiele $R$-następników. Wybieramy więc element $x_n$ z $n$-tego poziomu drzewa $D$ o tej właśnie własności. Wtedy $x_n$ ma nieskończenie wiele $R$-następników. Ponieważ jest tak dla każdego $n$, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie $D$.

Na wykładzie podkreślano niekonstruktywny charakter tego dowodu: wybierając element $x_n$ w sposób podany powyżej, korzystamy istotnie z *aksjomatu wyboru*.

# ROZWIĄZANIA

ŁOWCY LWÓW NEMEJSKICH

**1**. Zadanie można rozwiązać różnymi sposobami. Pokażemy rozwiązanie wykorzystujące diagramy Venna. Można narysować diagramy Venna dla lewej i prawej strony badanej równości i pokazać, że reprezentują one różne zbiory, zaznaczając np. różnymi kolorami brane pod uwagę obszary. Ponieważ jednak mamy pokazać, że rozważana równość ***nie*** zachodzi, więc zadanie jest łatwiejsze: umieścimy w każdej składowej diagramu Venna jakiś element (np. liczbę), obliczymy czemu równa jest wtedy lewa i prawa strona rozważanej równości i (jeżeli pytanie było uczciwe) dostaniemy w wyniku różne zbiory.




W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:

1. $A = \{1, 2, 4, 5\}$
2. $B = \{2, 3, 5, 6\}$
3. $C = \{4, 5, 6, 7\}$
4. $A - B = \{1, 4\}$
5. $C - B = \{4, 7\}$
6. $(A - B) \cap (C - B) = \{4\}$
7. $A - B = \{1, 4\}$ (jak wyżej)
8. $B - C = \{2, 3\}$

9. $(A - B) \cup (B - C) = \{1, 2, 3, 4\}$

10. Widać zatem, że

    $(A - B) \cap (C - B) = \{4\} \neq \{1, 2, 3, 4\} = (A - B) \cup (B - C).$

Podaliśmy więc przykład zbiorów $A$, $B$, $C$, które nie spełniają równości

$$(A - B) \cap (C - B) = (A - B) \cup (B - C),$$

czyli wykazaliśmy, że równość ta nie jest prawem rachunku zbiorów.

**2**. Po pierwsze, trzeba było pamiętać, że $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$, o czym mówiono zarówno na wykładzie, jak i podczas konwersatorium. Nie było wymagane pamiętanie, jak ustalamy zbieżność ciągu $((1 + \frac{1}{n})^n)$. Przypomnijmy jednak, że dowód, iż ciąg o wyrazie ogólnym $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony uzyskujemy, wykorzystując wzór dwumianowy Newtona dla $(1 + \frac{1}{n})^n$ oraz nierówność $n! \geqslant 2^{n-1}$, która zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ (co łatwo wykazać przez indukcję matematyczną). Skoro ciąg o wyrazie ogólnym $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony, to jest on zbieżny i jego granicę oznaczamy właśnie przez $e$. Trzeba też pamiętać, że $e$ jest podstawą logarytmu naturalnego, a zatem $\ln e = 1$.

Po drugie, trzeba było odwołać się do ciągłości funkcji logarytmicznej, co było konieczne dla uzasadnienia faktu, iż $\ln \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n$ (logarytm naturalny z granicy ciągu równy jest granicy logarytmów naturalnych wyrazów tego ciągu).

Trzeba było również pamiętać, że różnica logarytmów z dwóch wielkości równa jest logarytmowi z ilorazu tych wielkości, a także że logarytm z $n$-tej potęgi wielkości $x$ równy jest $n$ razy logarytm z $x$. Te wiadomości słuchacze uzyskali w szkole.

Wiedząc to wszystko, obliczamy granicę ciągu $(a_n)$:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot (\ln(n + 1) - \ln n) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \ln \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{n+1}{n})^n =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})^n = \ln \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \ln e = 1.$

**3**. Najpierw obliczamy pierwszą pochodną funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:

$f'(x) = (\frac{x^2}{x^2+1})' = \frac{(x^2)'\cdot(x^2+1)-x^2\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot x\cdot(x^2+1)-x^2\cdot 2\cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot x}{(x^2+1)^2}.$

Następnie obliczamy drugą pochodną badanej funkcji, również korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:

$f''(x) = (\frac{2\cdot x}{(x^2+1)^2})' = \frac{(2\cdot x)'\cdot(x^2+1)^2-2\cdot x\cdot((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4} = \frac{2\cdot(x^2+1)^2-2\cdot x\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2\cdot x}{(x^2+1)^4} =$

$= \frac{2\cdot(x^2+1)\cdot(x^2+1-4\cdot x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2\cdot(1-3\cdot x^2)}{(x^2+1)^3}$.

**4**. Mamy znaleźć długości boków prostokąta o obwodzie $L$, dla których pole tego prostokąta ma największą wartość.

Niech $x$ oznacza długość jednego z boków prostokąta. Wtedy $\frac{L-2\cdot x}{2}$ jest długością drugiego boku. Pole prostokąta podaje funkcja: $f(x) = x \cdot \frac{L-2\cdot x}{2}$. Pytanie dotyczy więc znalezienia maksimum lokalnego tej funkcji w przedziale $(0, L)$. Obliczamy pochodną funkcji $f$:

$f'(x) = (x \cdot \frac{L-2\cdot x}{2})' = \frac{1}{2} \cdot (L \cdot x - 2 \cdot x^2)' = \frac{1}{2} \cdot (L - 4 \cdot x)$

Mamy zatem:

1. $f'(x) = 0$ dla $x = \frac{L}{4}$
2. $f'(x) > 0$ dla $0 < x < \frac{L}{4}$, czyli $f$ jest rosnąca dla $0 < x < \frac{L}{4}$
3. $f'(x) < 0$ dla $\frac{L}{4} < x < L$, czyli $f$ jest malejąca dla $0 < x < \frac{L}{4}$.

Tak więc, funkcja $f$ ma maksimum lokalne w punkcie $x = \frac{L}{4}$. Wtedy boki prostokąta mają długości:

1. $x = \frac{L}{4}$
2. $\frac{L-2\cdot\frac{L}{4}}{2} = \frac{L}{4}$.

Prostokąt o obwodzie $L$ i największym polu to kwadrat o boku długości $\frac{L}{4}$.

**5**. Twierdzenie Cantora. *Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów*.

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Weźmy dowolny zbiór $X$ i przypuśćmy, że $X$ jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje bijekcja $f$ ze zbioru $X$ na zbiór $\wp(X)$. Określmy następujący element rodziny $\wp(X)$:

$$X_f = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}.$$

Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Zapytajmy teraz: czy $x_f \in X_f$?

1. Jeśli $x_f \in X_f$, to $x_f \in \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$, czyli $x_f \notin X_f$.

2. Jeśli $x_f \notin X_f$, to $x_f \notin \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$, czyli $x_f \in \{x \in X \ :$ nieprawda, że $x \notin f(x)\} = \{x \in X \ : \ x \in f(x)\}$, a zatem $x_f \in X_f$.

Otrzymujemy zatem, iż: $x_f \in X_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_f \notin X_f$, a to jest *sprzeczność*. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji $f$. W konsekwencji, nie istnieje bijekcja między $X$ oraz $\wp(X)$, czyli $X$ oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.

---

Wszystkie prace zaliczeniowe zostaną zarchiwizowane w pokoju 80. Każdy ze słuchaczy może obejrzeć swoją pracę w godzinach dyżuru wykładowcy.

Lektura prac słuchaczy skłania do kilku refleksji. Większość łatwo poradziła sobie z zadaniem pierwszym oraz (choć czasem z błędami rachunkowymi) z zadaniem trzecim. Niepokojąca okazała się nieznajomość pewnych elementarnych wiadomości i umiejętności omawianych w dydaktyce szkolnej (działania na logarytmach!). Martwi także to, że zaledwie kilka osób próbowało przeprowadzić dowód, wymagany w zadaniu piątym. Zachęcamy słuchaczy do treningu w uprawianiu dedukcji, w uzasadnianiu twierdzeń. Na dalszych latach studiów kognitywistycznych metody dedukcyjne będą intensywnie wykorzystywane. Ponadto, umiejętność uzasadniania twierdzeń jest cechą wymaganą w przypadku osoby, chcącej uchodzić za wykształconą.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

## Matematyczne Podstawy Kognitywistyki

# Zaliczenie Poprawka: 7.II.2017

### Kognitywistyka UAM, 2016–2017

**Imię i nazwisko:** .............. Łowcy Łani Kyrenejskiej

**1**. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów (tutaj $X'$ oznacza dopełnienie zbioru $X$ w rozważanym uniwersum):

$$A \cap (C \cup B)' = (A - C) \cap (B - C)$$

**2**. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + \pi^n}$$

**3**. Oblicz drugą pochodną funkcji:

$$f(x) = e^{\sin x}$$

**4**. Znajdź wartości liczbowe ekstremów lokalnych funkcji:

$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 6 \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

---

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

# ZALICZENIE POPRAWKA: 7.II.2017

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

**Imię i nazwisko:** . . . . . . . . . . . ŁOWCY DZIKA ERYMANTEJSKIEGO

**1**. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów (tutaj $X'$ oznacza dopełnienie zbioru $X$ w rozważanym uniwersum):

$$A \cup (C \cup B)' = (A - C) \cap (A - B)$$

**2**. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$a_n = \sqrt[n]{\pi^n + 5^n}$$

**3**. Oblicz drugą pochodną funkcji:

$$f(x) = e^{\cos x}$$

**4**. Znajdź wartości liczbowe ekstremów lokalnych funkcji:

$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 6 \cdot \mathrm{tg}\, \frac{\pi}{4}$$

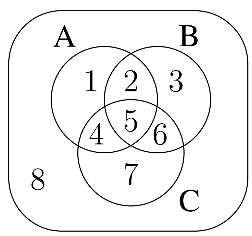
---

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

# ROZWIĄZANIA

ŁOWCY ŁANI KYRENEJSKIEJ

**1**. Zadanie można rozwiązać różnymi sposobami. Pokażemy rozwiązanie wykorzystujące diagramy Venna. Można narysować diagramy Venna dla lewej i prawej strony badanej równości i pokazać, że reprezentują one różne zbiory, zaznaczając np. różnymi kolorami brane pod uwagę obszary. Ponieważ jednak mamy pokazać, że rozważana równość ***nie*** zachodzi, więc zadanie jest łatwiejsze: umieścimy w każdej składowej diagramu Venna jakiś element (np. liczbę), obliczymy czemu równa jest wtedy lewa i prawa strona rozważanej równości i (jeżeli pytanie było uczciwe) dostaniemy w wyniku różne zbiory.




W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:

1. $A = \{1, 2, 4, 5\}$
2. $B = \{2, 3, 5, 6\}$
3. $C = \{4, 5, 6, 7\}$
4. $C \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
5. $(C \cup B)' = \{1, 8\}$
6. $A - C = \{1, 2\}$
7. $B - C = \{2, 3\}$
8. $A \cap (C \cup B)' = \{1\}$

9. $(A - C) \cap (B - C) = \{2\}$

10. Tak więc: $A \cap (C \cup B)' = \{1\} \neq \{2\} = (A - C) \cap (B - C)$.

**2**. Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Ponieważ $2 < \pi$, więc zachodzą nierówności:

$$\sqrt[n]{\pi^n} \leqslant \sqrt[n]{2^n + \pi^n} \leqslant \sqrt[n]{\pi^n + \pi^n}.$$

Mamy dalej: $\sqrt[n]{\pi^n} = \pi$ oraz $\sqrt[n]{\pi^n + \pi^n} = \sqrt[n]{2 \cdot \pi^n} = \pi \cdot \sqrt[n]{2}$. Jak wiadomo z wykładu, $\lim\limits_{n\to\infty} \pi \cdot \sqrt[n]{2} = \pi \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \pi \cdot 1 = \pi$.

Mamy zatem trzy ciągi:

1. $b_n = \sqrt[n]{\pi^n}$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pi$
2. $c_n = \sqrt[n]{2 \cdot \pi^n}$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \pi$
3. $a_n = \sqrt[n]{2^n + \pi^n}$, przy czym $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ dla wszystkich $n$.

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach mamy wtedy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \pi$.

**3**. Obliczamy pierwszą pochodną funkcji $f(x) = e^{\sin x}$:

$$(f(x))' = (e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

Obliczamy drugą pochodną funkcji $f(x) = e^{\sin x}$:

$$f''(x) = (e^{\sin x} \cdot \cos x)' = ((e^{\sin x})' \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (\cos x)') =$$
$$= e^{\sin x} \cdot (\sin x)' \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (-\sin x) = e^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \cos x - \sin x) =$$
$$= e^{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin x)$$

**4**. Mamy do czynienia z funkcją wielomianową, a więc jej dziedziną jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Obliczamy pochodną funkcji $f(x)$:

$$f(x)' = (2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 6 \cdot \sin \frac{\pi}{2})' = 6 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 36 = 6 \cdot (x^2 - x - 6)$$

Mamy: $f(x)' = 0$ dokładnie wtedy, gdy $x^2 - x - 6 = 0$. W szkole nauczyliśmy się, jak rozwiązywać równanie kwadratowe:

1. Można obliczyć wyróżnik $\Delta = 25$ i znaleźć dwa pierwiastki $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, posługując się stosownym wzorem szkolnym.
2. Można skorzystać z faktu, że iloczyn pierwiastków równy jest $-6$, zaś ich suma równa jest $1$ i na tej podstawie ustalić, że $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Tak więc, $f(x)' = 0$ dla $x = -2$ oraz $x = 3$. Badamy znak pochodnej w trzech przypadkach: dla argumentu mniejszego od $-2$, dla argumentu między $-2$ a $3$ oraz dla argumentu większego od $3$:

1. $f(-3)' = 36 > 0$
2. $f(0)' = -36 < 0$
3. $f(4)' = 36 > 0$

Tak więc, funkcja $f$ jest:

1. rosnąca w przedziale $(-\infty, -2)$
2. malejąca w przedziale $(-2, 3)$
3. rosnąca w przedziale $(3, \infty)$.

W konsekwencji, funkcja $f$ ma:

1. maksimum lokalne w punkcie $-2$ i mamy $f(-2) = 50$ (pamiętamy, że $\sin \frac{\pi}{2} = 1$)
2. minimum lokalne w punkcie $3$ i mamy $f(3) = -75$.

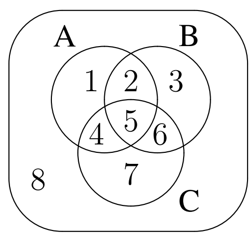
Ponieważ badana funkcja jest funkcją wielomianową o nieparzystym wykładniku przy najwyższej potędze $x$ oraz dodatnim współczynniku przy tej potędze, więc otrzymujemy dodatkowo:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

# ROZWIĄZANIA

ŁOWCY DZIKA ERYMANTEJSKIEGO

**1**. Zadanie można rozwiązać różnymi sposobami. Pokażemy rozwiązanie wykorzystujące diagramy Venna. Można narysować diagramy Venna dla lewej i prawej strony badanej równości i pokazać, że reprezentują one różne zbiory, zaznaczając np. różnymi kolorami brane pod uwagę obszary. Ponieważ jednak mamy pokazać, że rozważana równość ***nie*** zachodzi, więc zadanie jest łatwiejsze: umieścimy w każdej składowej diagramu Venna jakiś element (np. liczbę), obliczymy czemu równa jest wtedy lewa i prawa strona rozważanej równości i (jeżeli pytanie było uczciwe) dostaniemy w wyniku różne zbiory.




W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:

1. $A = \{1, 2, 4, 5\}$
2. $B = \{2, 3, 5, 6\}$
3. $C = \{4, 5, 6, 7\}$
4. $C \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
5. $(C \cup B)' = \{1, 8\}$
6. $A - C = \{1, 2\}$
7. $A - B = \{1, 4\}$
8. $A \cup (C \cup B)' = \{1, 2, 4, 5, 8\}$

9. $(A-C)\cap(A-B)=\{1\}$

10. Tak więc, $A\cup(C\cup B)'=\{1,2,4,5,8\}\neq\{1\}=(A-C)\cap(A-B)$

**2**. Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Ponieważ $\pi<5$, więc zachodzą nierówności:

$$\sqrt[n]{5^n}\leqslant\sqrt[n]{\pi^n+5^n}\leqslant\sqrt[n]{5^n+5^n}.$$

Mamy dalej: $\sqrt[n]{5^n}=5$ oraz $\sqrt[n]{5^n+5^n}=\sqrt[n]{2\cdot 5^n}=5\cdot\sqrt[n]{2}$. Jak wiadomo z wykładu, $\lim\limits_{n\to\infty}5\cdot\sqrt[n]{2}=5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=5\cdot 1=5$.

Mamy zatem trzy ciągi:

1. $b_n=\sqrt[n]{5^n}$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=5$

2. $c_n=\sqrt[n]{2\cdot 5^n}$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=5$

3. $a_n=\sqrt[n]{\pi^n+5^n}$, przy czym $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$ dla wszystkich $n$.

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach mamy wtedy: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=5$.

**3**. Obliczamy pierwszą pochodną funkcji $f(x)=e^{\cos x}$:

$$(f(x))'=(e^{\cos x})'=e^{\cos x}\cdot(\cos x)'=-e^{\cos x}\cdot\sin x$$

Obliczamy drugą pochodną funkcji $f(x)=e^{\cos x}$:

$$(f(x))''=(-e^{\cos x}\cdot\sin x)'=-((e^{\cos x})'\cdot\sin x+e^{\cos x}\cdot(\sin x)')=$$
$$=-(e^{\cos x}\cdot(\cos x)'\cdot\sin x+e^{\cos x}\cdot\cos x)=-(e^{\cos x}\cdot(-\sin x)\cdot\sin x+e^{\cos x}\cdot\cos x)=$$
$$=e^{\cos x}\cdot(\sin^2 x-\cos x)$$

**4**. Mamy do czynienia z funkcją wielomianową, a więc jej dziedziną jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Obliczamy pochodną funkcji $f(x)$:

$$f(x)'=(2\cdot x^3-3\cdot x^2-12\cdot x+6\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4})'=6\cdot x^2-6\cdot x-12=6\cdot(x^2-x-2)$$

Mamy: $f(x)'=0$ dokładnie wtedy, gdy $x^2-x-2=0$. W szkole nauczyliśmy się, jak rozwiązywać równanie kwadratowe:

1. Można obliczyć wyróżnik $\Delta = 9$ i znaleźć dwa pierwiastki $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, posługując się stosownym wzorem szkolnym.
2. Można skorzystać z faktu, że iloczyn pierwiastków równy jest $-2$, zaś ich suma równa jest $1$ i na tej podstawie ustalić, że $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Tak więc, $f(x)' = 0$ dla $x = -1$ oraz $x = 2$. Badamy znak pochodnej w trzech przypadkach: dla argumentu mniejszego od $-1$, dla argumentu między $-1$ a $2$ oraz dla argumentu większego od $2$:

1. $f(-2)' = 24 > 0$
2. $f(0)' = -12 < 0$
3. $f(3)' = 24 > 0$

Tak więc, funkcja $f$ jest:

1. rosnąca w przedziale $(-\infty, -1)$
2. malejąca w przedziale $(-1, 2)$
3. rosnąca w przedziale $(2, \infty)$.

W konsekwencji, funkcja $f$ ma:

1. maksimum lokalne w punkcie $-1$ i mamy $f(-1) = 13$ (pamiętamy, że $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$)
2. minimum lokalne w punkcie $2$ i mamy $f(2) = -14$.

Ponieważ badana funkcja jest funkcją wielomianową o nieparzystym wykładniku przy najwyższej potędze $x$ oraz dodatnim współczynniku przy tej potędze, więc otrzymujemy dodatkowo:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

---

Wszystkie prace zaliczeniowe są zarchiwizowane w pokoju 80. Każdy ze słuchaczy może obejrzeć swoją pracę w godzinach dyżuru wykładowcy.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl