Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Granice i ciągłość

Ciało $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych uporządkowane w sposób zupełny (z metryką) stanowi podstawę analizy rzeczywistej. Pamiętamy, że w $\mathbb{R}$ istnieją struktury:

1. *algebraiczna*, wyznaczona przez operacje arytmetyczne na liczbach rzeczywistych;
2. *porządkowa*, wyznaczona przez ciągły porządek liczb rzeczywistych;
3. *topologiczna*, wyznaczona przez metrykę (funkcję odległości), definiowaną w sposób charakterystyczny dla przestrzeni euklidesowych.

Wszystkie te struktury zostaną teraz wykorzystane w badaniu funkcji rzeczywistych, a więc np. w ustalaniu rodzajów monotoniczności, osiągania wartości ekstremalnych (minimalnych lub maksymalnych), przebiegu zmienności funkcji, itd. Dzisiaj omówimy dwa pojęcia: *granicy* funkcji w punkcie oraz *ciągłości funkcji w punkcie.* Słuchaczy zachęcamy do śledzenia roli *aksjomatu ciągłości* w rozważanych konstrukcjach.

Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \neq \emptyset$ oraz $X \subseteq \mathbb{R}$. Mówimy, że:

1. f jest *rosnąca* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$;
2. f jest *malejąca* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$;
3. f jest *niemalejąca* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
4. f jest *nierosnąca* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;

Niech X będzie przedziałem w $\mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest:

1. *wypukła* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ oraz dowolnych $a, b \geqslant 0$ takich, że $a + b = 1$ zachodzi nierówność: $f(a \cdot x_1 + b \cdot x_2) \leqslant a \cdot f(x_1) + b \cdot f(x_2)$
2. *wklęsła* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ oraz dowolnych $a, b \geqslant 0$ takich, że $a + b = 1$ zachodzi nierówność: $f(a \cdot x_1 + b \cdot x_2) \geqslant a \cdot f(x_1) + b \cdot f(x_2)$

- *Funkcje stałe.* Niech $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ oraz $f : X \to \mathbb{R}$. Jeśli $f(x) = c$ dla wszystkich $x \in X$, to f nazywamy funkcją stałą.
- *Funkcje liniowe.* Funkcje $f(x) = a \cdot x + b$, gdzie a oraz b są liczbami rzeczywistymi.
- *Funkcje schodkowe.* Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ oraz $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$. Jeśli f jest stała w każdym z przedziałów (x_{i-1}, x_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$, to f nazywamy funkcją schodkową.
- *Funkcje łamane.* Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ oraz $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$. Jeśli f jest liniowa w każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, to f nazywamy funkcją łamaną.
- *Funkcje wielomianowe.* Wielomianem stopnia n nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o postaci:

$$f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n,$$

gdzie $n \geqslant 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_0 \neq 0$.

- *Funkcje wymierne.* Funkcją wymierną nazywamy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ o postaci:

$$f(x) = \frac{a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n}{b_0 \cdot x^m + b_1 \cdot x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} \cdot x + b_m},$$

gdzie $m, n \geqslant 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ oraz $a_0 \neq 0$ i $b_0 \neq 0$. W tym przypadku X jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, które nie są pierwiastkami wielomianu w mianowniku rozważanej funkcji (o ile licznik i mianownik nie mają wspólnych pierwiastków).

- *Funkcje potęgowe.* Dla dowolnej liczby całkowitej α funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = x^\alpha$ jest nazywana funkcją potęgową. Jak pamiętamy z poprzedniego wykładu, można też określić funkcję potęgową dla dowolnego wykładnika rzeczywistego, przy czym wtedy jej dziedzina i przeciwdziedzina jest przedziałem niewłaściwym $[0, \infty)$. Dla każdej liczby rzeczywistej $\alpha \neq 0$ funkcją odwrotną do funkcji potęgowej $f(x) = x^\alpha$ jest funkcja $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$

- *Funkcje wykładnicze*. Dla $a > 0$ funkcja $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ określona wzorem $f(x) = a^x$ jest nazywana funkcją wykładniczą. Słuchacze pamiętają ze szkoły, że dla $a > 1$ funkcja wykładnicza jest ściśle rosnąca, a dla $0 < a < 1$ jest ściśle malejąca. Szczególnie ważna dla dalszych rozważań jest funkcja wykładnicza e^x.
- *Funkcje logarytmiczne*. Funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ nazywamy funkcją logarytmiczną. Stosujemy dla niej oznaczenie $\log_a x$ (gdzie liczbę a nazywamy podstawą logarytmu). Jej dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$. Szczególnie ważna dla dalszych rozważań jest funkcja logarytmiczna o podstawie e: stosuje się dla niej oznaczenie $\ln x$.
- *Funkcje trygonometryczne*. Znane słuchaczom ze szkoły funkcje: $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\cot x$. Zakładamy, że słuchacze pamiętają, jakie są dziedziny i przeciwdziedziny tych funkcji, wiedzą, że są to funkcje *okresowe*, pamiętają wykresy tych funkcji.

- Rozważmy następujący problem poznawczy: czy jeśli ciąg argumentów funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zbieżny do swojej granicy, to ciąg odpowiadających im wartości funkcji jest zbieżny?
- Inaczej sformułować można ten problem następująco: czy dla argumentów *dostatecznie bliskich* wybranemu punktowi $x_0 \in \mathbb{R}$ ciąg wartości funkcji f dla tych argumentów jest zbieżny do jakiejś liczby, czyli wartości te są *dostatecznie bliskie* tej liczbie?

- Rozważany problem dotyczy własności *lokalnych*: pytamy o „zachowanie się" funkcji w pewnym *otoczeniu* interesującego nas punktu.
- Nie pytamy – na razie – o to, jaka jest wartość funkcji dla argumentu, będącego granicą rozważanego ciągu argumentów. Funkcja może nawet być nieokreślona dla tego punktu granicznego, interesuje nas jedynie, jak „zachowują się" wartości funkcji w otoczeniu tego punktu.

- **Definicja granicy funkcji w punkcie (Cauchy)**. Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie
$$X = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < a \text{ dla pewnej } a > 0\}.$$
Mówimy, że liczba g jest *granicą funkcji* f *w punkcie* x_0, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że: jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. W takim przypadku piszemy: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$. Czasem używa się też zapisu: $f(x) \to g$ dla $x \to x_0$.
- **Definicja granicy funkcji w punkcie (Heine)**. Liczbę g nazywamy *granicą funkcji* f *w punkcie* x_0, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \neq x_0$ dla wszystkich $n \geqslant 1$: jeśli $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, to $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$.

- **Twierdzenie**. *Załóżmy, że funkcja f jest określona dla wszystkich x takich, iż $0 < |x - x_0| < a$ dla pewnej liczby $a > 0$. Istnienie granicy funkcji f w punkcie x_0 w sensie definicji Cauchy'ego jest równoważne istnieniu granicy funkcji f w punkcie x_0 w sensie definicji Heinego.*

- Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to funkcje $f+g$, $f-g$ oraz $f \cdot g$ także mają granice w tym punkcie oraz:
$\lim\limits_{x \to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że funkcja g jest ograniczona w zbiorze wszystkich x spełniających nierówności $0 < |x - x_0| < a$, to $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.
- Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 granicę różną od zera, to funkcja $\frac{1}{f}$ również ma w punkcie x_0 granicę i zachodzi równość:
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$.
- Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 oraz $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ również ma w punkcie x_0 granicę i zachodzi równość:
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

- Obliczymy $\lim_{x\to 0} \sin x$. Pamiętamy nierówność $|\sin x| \leqslant |x|$ dla $|x| < \frac{\pi}{2}$. Niech $\varepsilon > 0$. Jeśli przyjmiemy $\delta = \varepsilon$, to dla $|x| < \delta$ mamy $|\sin x| \leqslant \delta = \varepsilon$. Tak więc, $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.
- Pokażemy, że funkcja $f(x) = x^2$ ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę równą 0. Weźmy bowiem dowolny ciąg liczb rzeczywistych (x_n) dążący do zera, czyli taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Mamy wtedy:
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = (\lim_{n\to\infty} x_n)^2 = 0^2 = 0$.

Pokażemy, że funkcja $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ (zdefiniowana dla $x \neq 0$) nie ma granicy w w punkcie $x_0 = 0$. Wystarczy w tym celu znaleźć dwa ciągi (x_n) oraz (y_n), oba zbieżne do 0 takie, że ciągi wartości $(f(x_n))$ oraz $(f(y_n))$ są zbieżne do różnych granic. Niech: $x_n = \frac{1}{n\cdot\pi}$ oraz $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\cdot n\cdot\pi}$. Wtedy oczywiście: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Mamy jednak:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\cdot\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\cdot n\cdot\pi) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Tak więc, nie istnieje granica funkcji $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ w w punkcie $x_0 = 0$.

- Niech f będzie określona w $(x_0, x_0 + a)$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że f *ma w punkcie* x_0 *granicę prawostronną równą* g, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że: jeśli $0 < x - x_0 < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Zapis: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$.
- Niech f będzie określona w $(x_0 - a, x_0)$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że f *ma w punkcie* x_0 *granicę lewostronną równą* g, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że: jeśli $0 < x_0 - x < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Zapis: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$.
- Niech f będzie określona dla x takich, że $0 < |x - x_0| < a$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że f *ma w punkcie* x_0 *granicę niewłaściwą* $+\infty$, gdy dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, to $f(x) > M$. Zapis: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
- Niech f będzie określona dla x takich, że $0 < |x - x_0| < a$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że f *ma w punkcie* x_0 *granicę niewłaściwą* $-\infty$, gdy dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, to $f(x) < -M$. Zapis: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Przykład. Niech funkcja f będzie określona warunkami:

1. $f(x) = x$ dla $x \leqslant 0$
2. $f(x) = x^2 + 1$ dla $x > 0$.

Zbadamy, czy funkcja ta ma granicę w punkcie $x_0 = 0$.

- *Granica lewostronna funkcji w* $x_0 = 0$. Dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że $x_n < 0$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = 0$ mamy: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Tak więc, mamy: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
- *Granica prawostronna funkcji w* $x_0 = 0$. Dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że $x_n > 0$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = 0$ mamy: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1$. Tak więc, mamy: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Widzimy, że granica lewostronna funkcji w punkcie $x_0 = 0$ jest różna od granicy prawostronnej funkcji w tym punkcie, a więc granica funkcji nie istnieje w punkcie $x_0 = 0$.

- Niech f będzie określona dla $x \in [a, \infty)$ dla pewnego $a > 0$. Mówimy, że *liczba g jest granicą funkcji f przy x dążącym do ∞*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $M > a$ taka, że: jeśli $x > M$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Piszemy wtedy: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$.
- Niech f będzie określona dla $x \in (-\infty, a]$ dla pewnego $a > 0$. Mówimy, że *liczba g jest granicą funkcji f przy x dążącym do $-\infty$*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $M > 0$ taka, że: jeśli $x < -M$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Piszemy wtedy: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$.

- Mówimy, że *funkcja f ma granicę $+\infty$ przy x dążącym do $+\infty$*, gdy f jest określona w pewnym przedziale $[a, +\infty)$ oraz gdy dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba $A > a$ taka, że: jeśli $x > A$, to $f(x) > M$. Podobnie dla pozostałych przypadków granic niewłaściwych funkcji przy x dążącym do $+\infty$ lub $-\infty$.

Przykłady

- Pokażemy, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę niewłaściwą $+\infty$. Pokażemy zatem, że dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $|x - 0| < \delta$, to $\frac{1}{x^2} > M$. Niech $M > 0$. Liczba $\delta > 0$ ma być taka, że $|x| < \delta$, czyli $\frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta}$, a w konsekwencji $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2}$. Jeśli przyjmiemy $\frac{1}{\delta^2} = M$, czyli $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, to $\delta > 0$ oraz zachodzi $\frac{1}{x^2} > M$. To oznacza, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

- Pokażemy jeszcze raz, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę niewłaściwą $+\infty$, tym razem korzystając ze stylizacji Heinego. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od 0 takim, że $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Ponieważ mamy wtedy $(x_n)^2 \neq 0$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^2 = 0$, więc: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x_n^2} = \infty$, otrzymujemy ostatecznie, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - a, x_0 + a)$ punktu x_0, gdzie $a > 0$. Mówimy, że *funkcja f jest ciągła w punkcie x_0*, gdy istnieje jej granica w tym punkcie i jest ona równa jej wartości w tym punkcie, czyli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Twierdzenie. *Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - a, x_0 + a)$ punktu x_0, gdzie $a > 0$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z wzajemnie równoważnych następujących warunków:*

1. **Ciągłość w sensie Cauchy'ego**. *Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że: jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*
2. **Ciągłość w sensie Heinego**. *Dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(x_0)$.*

- W każdym punkcie ciągłe są funkcje: potęgowa, wielomianowa, wykładnicza, sinus, cosinus.
- Ciągłe w tych punktach, w których są określone są funkcje: wymierna, logarytmiczna, tangens, cotangens.

- Funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie jest w nim określona. Jeśli jednak przyjmiemy, że $f(0) = 1$, to tak uzupełniona funkcja jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. Zachęcamy słuchaczy do samodzielnego zmierzenia się z udowodnieniem, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Wskazówka: skorzystaj z nierówności $\sin x \leqslant x$ dla $x > 0$ oraz sporządź rysunek, pozwalający uzasadnić, że $\operatorname{tg} x \geqslant x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
- Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie ma w tym punkcie granicy.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - a, x_0 + a)$ punktu x_0, gdzie $a > 0$ oraz niech f nie będzie ciągła w x_0. Mówimy, że:

1. Funkcja f ma w punkcie x_0 *nieciągłość pierwszego rodzaju*, gdy istnieją granice jednostronne $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$. Jeżeli przy tym f ma granicę $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, to nieciągłość w punkcie x_0 nazywamy *usuwalną*, a jeśli ta granica nie istnieje, to nieciągłość nazywamy *nieusuwalną*.
2. Funkcja f ma w punkcie x_0 *nieciągłość drugiego rodzaju*, gdy nie istnieje co najmniej jedna z granic jednostronnych: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

- Funkcja $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie ma w tym punkcie granicy.
- Funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie jest w nim określona.

- Jeżeli funkcje f oraz g są ciągłe w punkcie x_0, to ciągłe w tym punkcie są również funkcje: $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ oraz $c \cdot f$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Jeżeli dodatkowo $g(x_0) \neq 0$, to ciągłe w punkcie x_0 są też funkcje: $\frac{1}{g}$ oraz $\frac{f}{g}$.
- Załóżmy, że funkcja g jest ciągła w punkcie x_0, natomiast funkcja f jest ciągła w punkcie $g(x_0)$. Wtedy funkcja złożona $f \circ g$ jest ciągła w punkcie x_0. Przypominamy, że $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

- Niech funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $[x_0, x_0 + a)$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że f jest *prawostronnie ciągła w punkcie* x_0, gdy f ma granicę prawostronną w x_0 oraz $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Niech funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $(x_0 - a, x_0]$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że f jest *lewostronnie ciągła w punkcie* x_0, gdy f ma granicę lewostronną w x_0 oraz $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- Niech funkcja f będzie określona w niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$. Mówimy, że f *jest ciągła w punkcie* x_0 *względem zbioru* X, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że: jeżeli $x \in X$ oraz $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Jeżeli funkcja f jest określona w niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$ i jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in X$ względem zbioru X, to mówimy, że f jest *ciągła w zbiorze* X.

- Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona.
- Funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale swoje kresy.

Niech funkcja f będzie określona w niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$. Mówimy, że *f jest jednostajnie ciągła w zbiorze X*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich $x, y \in X$: jeśli $|x - y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Zauważmy, że w powyższej definicji liczba δ jest *wspólnym* ograniczeniem rozważanych odległości między punktami, a więc nie jest wybierana dla każdego z tych punktów z osobna.

- Zauważmy, że np. funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału otwartego $(0, 1)$, ale nie jest w tym przedziale jednostajnie ciągła. Dla dowolnej $\delta > 0$ można bowiem wybrać w tym przedziale punkty x_1 oraz x_2 w taki sposób, że liczba $|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}|$ jest dowolnie duża.
- Funkcja jednostajnie ciągła w zbiorze X jest ciągła w tym zbiorze (ale niekoniecznie na odwrót).
- Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.

Niektórzy słuchacze mogli poczuć się znużeni licznymi subtelnościami pojęciowymi wprowadzonymi w tym wykładzie, a także zniecierpliwieni tym, że rangę twierdzeń przypisuje się obserwacjom, które *wydają się* intuicyjnie oczywiste. Jak poucza historia matematyki (a także epistemologia), oczywistość bywa złudną pułapką. Tak więc, np. stwierdzenie, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona istotnie wymaga *dowodu*, nie wystarcza tu odwołanie się np. do *rysunku*. Podobnie rzecz ma się z następującą ważną własnością, charakteryzującą funkcje ciągłe:

Twierdzenie Darboux. *Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale I (niekoniecznie domkniętym) oraz że w punktach $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 < x_2$ przyjmuje różne wartości $y_1 = f(x_1)$ oraz $y_2 = f(x_2)$. Wtedy w przedziale domkniętym $[x_1, x_2]$ funkcja f przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między y_1 oraz y_2, czyli dla każdego y_0 zawartego między y_1 oraz y_2 istnieje $x_0 \in [x_1, x_2]$ taki, że $y_0 = f(x_0)$.*

Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$.

- Mówimy, że ciąg (f_n) jest *punktowo zbieżny* do funkcji f o wartościach rzeczywistych określonej na X, gdy $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ dla każdego $x \in X$.
- Mówimy, że ciąg (f_n) jest *jednostajnie zbieżny* do funkcji f o wartościach rzeczywistych określonej na X, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba N taka, że $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > N$ oraz wszystkich $x \in X$. Zauważmy, że w tej definicji liczba N jest wybierana niezależnie od punktów $x \in X$.
- Mówimy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest *jednostajnie zbieżny w X do sumy* $s(x)$, gdy ciąg jego sum częściowych $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ jest jednostajnie zbieżny do $s(x)$ w X.

- Ciąg funkcji $f_n(x) = x^n$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f(x)$ takiej, że $f(x) = 0$ dla $0 \leqslant x < 1$ oraz $f(1) = 1$. Zauważmy, że wszystkie funkcje f_n są ciągłe w przedziale domkniętym $[0, 1]$, natomiast funkcja f nie jest ciągła w tym przedziale. Ciąg ten nie jest jednostajnie zbieżny w przedziale domkniętym $[0, 1]$.
- Ciąg $f_n(x) = x^n \cdot (1 - x)^n$ jest zbieżny do funkcji stałej równej zero dla $x \in [0, 1]$. Ponadto, ciąg ten jest jednostajnie zbieżny do swojej granicy.

Szereg potęgowy to szereg funkcyjny o postaci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ lub $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$, gdzie współczynniki $a_n \in \mathbb{R}$. *Promieniem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ nazywamy kres górny R zbioru tych liczb $|x|$, dla których szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ jest zbieżny (gdy zbiór ten nie jest ograniczony, to przyjmujemy $R = \infty$). Przedział $(-R, R)$ nazywamy *przedziałem zbieżności* szeregu potęgowego o promieniu zbieżności R.

Myśl przekornie!

- Czy własność ciągłości ma realność fizyczną?
- Ustaliliśmy, że nie istnieją *nieskończone* liczby rzeczywiste (aksjomat Archimedesa!). Jaki jest zatem sens napisu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$?
- Czy do mówienia o ciągłości funkcji konieczne jest założenie aksjomatu ciągłości?
- Każdy potrafi pomalować płot zwykłym pędzlem. Zastanów się nad możliwościami „pomalowania" np. wnętrza koła pędzlem, którego końcówka jest dokładnie jednym punktem.

Co musisz ZZZ

- Granica funkcji w punkcie, definicja Heinego i definicja Cauchy'ego.
- Ciągłość funkcji w punkcie, definicja Heinego i definicja Cauchy'ego.
- Ciągłość i jednostajna ciągłość funkcji.
- Ciąg funkcyjny i jego granica.