

# Po Co Humanistce Logika Gödla-Löba?

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM  
[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)  
[pogon@amu.edu.pl](mailto:pogon@amu.edu.pl)

21 V 2007

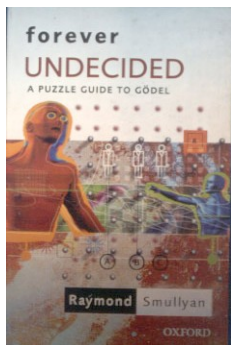
## Po co tego słuchać?

Pokazujemy kilka twierdzeń z naszego tłumaczenia książki Raymonda Smullyana *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel.*, które ukaże się w 2007 roku nakładem *Książki i Wiedzy*, pod tytułem *Na Zawsze nierozstrzygnięte. Zagadkowy Przewodnik Po Twierdzeniach Gödla.*

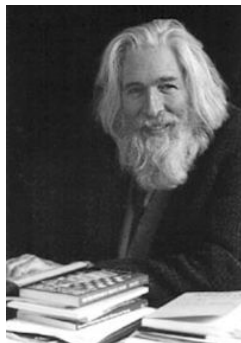
Obok zagadek o Rycerzach (mówiących zawsze prawdę) oraz Łotrach (mówiących zawsze fałsz), książka zawiera zagadki logiczne, w których w formie popularnej przedstawia się *logikę epistemiczną* oraz *logikę dowodliwości*.

Logika epistemiczna jest Państwu być może znana, o logice dowodliwości (*logice Gödla-Löba*) nie każda Humanistka słyszała. Proszę traktować niniejszą prezentację jako rozrywkę. Chciałbym przede wszystkim zwrócić uwagę na mistrzostwo Smullyana w popularyzowaniu wiedzy logicznej.

# Forever Undecided



Forever Undecided



Raymond Smullyan

## Kilka książek o logice modalnej

- Boolos, G. 1993. *The Logic of Provability*. Cambridge University Press.
- Smullyan, R. 1992. *Gödel's Incompleteness Theorems*. Oxford University Press.
- Jacek Hawranek: *Aspekty algebraiczne systemu modalnego Gödla–Löba*. Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 1994.
- Andrzej Indrzejczak: *Hybrydowe systemy dedukcyjne w logikach modalnych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 2006.
- Jerzy Perzanowski: *Logiki modalne a filozofia*. Uniwersytet Jagielloński, Rozprawy Habilitacyjne nr 156, Kraków, 1989.
- Kazimierz Świrydowicz: *Podstawy logiki modalnej*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2004.

## Książki z zagadkami logicznymi Raymonda Smullyana

- *Jaki jest tytuł tej książki? Tajemnica Drakuli, zabawy i łamigłówek logiczne.* Warszawa 1993. Przełożył: Bohdan Chwedeńczuk. Trzy wydania polskie.
- *Dama czy tygrys oraz inne zagadki logiczne.* Warszawa 1995, 2004. Przełożył: Bohdan Chwedeńczuk.
- *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki.* Warszawa 1998. Przełożyli z angielskiego: Anna i Krzysztof Wójtowicz.
- *Przedrzeźniać Przedrzeźniacza. Oraz Inne Zagadki Logiczne Łącznie z Zadziwiającą Przygodą w Krainie Logiki Kombinatorycznej.* Warszawa 2007. Przekład z języka angielskiego: Jerzy Pogonowski.
- *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel.* Oxford University Press, 1988. Z angielskiego przełożył Jerzy Pogonowski. Ukaże się w 2007 jako: *Na zawsze nierozstrzygnięte. Zagadkowy Przewodnik po Twierdzeniach Gödla.*

# Proste pytania

Jakie pożytki może mieć Humanistka z:

- teorii obliczeń (funkcji rekurencyjnych, maszyn Turinga, ...);
- logiki modalnej (w szczególności, logiki epistemicznej);
- logiki dowodliwości?

Są to, jak sądzę, ważne pytania dydaktyczne.

Uprzejmie proszę zwrócić uwagę, że wiedza dotycząca obliczalności oraz matematycznych podstaw logik modalnych należy do standardu nauczania we współczesnych szkołach wyższych na kierunkach: językoznawczych, informatycznych, filozoficznych.

Warto to chyba wziąć pod uwagę układając program studiów Językoznawstwa i Nauk o Informacji.

# Aby cieszyć się wędrówką po Szczytach Metalogiki. . .



. . . najpierw musimy ominąć przepaście.

# Plan na dziś

## Plan na dziś:

- **Systemy przekonań.** Kto jest prostaczkiem logicznym?
- **Poziomy samoświadomości.** Kto jest szczęściarzem epistemicznym?
- **II Twierdzenie Gödla.**  
Czy możesz wiedzieć, że twój system przekonań jest niesprzeczny, bez popadnięcia przy tym w sprzeczność?
- **Twierdzenie Löba i samospełniające się przekonania.**  
Kiedy *wishful thinking* ma wartość?
- **I Twierdzenie Gödla i Twierdzenie Rossera (o niezupełności).**  
Czy łatwy jest los *Besserwissera*?
- **Twierdzenie Tarskiego.**  
Czy *dictum: Doctrina multiplex, veritas una!* jest mrzonką?



# Kurt Gödel



Kurt Gödel



Logik i Fizyk

Logik rozwiązał równania Fizyka, otrzymując [Rotacyjny Model Wszechświata](#), w którym możliwe są podróże w czasie. Z rozwiązania tego korzystał ostatnio JM Rektor UAM (Zarządzenie Rektora nr 72/2006/2007 z dnia 15 III 2007 roku).

## Systemy przekonań

**Notacja.** Operatory doksastyczne i epistemiczne to np.:

- $B$  — zdanie  $Bp$  czytamy: (rozważany podmiot) *wierzy*, że  $p$ ;
- $K$  — zdanie  $Kp$  czytamy (rozważany podmiot) *wie*, że  $p$ .

(gdzie  $p$  jest dowolnym zdaniem języka logiki epistemicznej). Zwykle zakłada się, że  $Kp \equiv (p \wedge Bp)$ .

Systemy epistemiczne są interesujące same przez się — w opisie systemów przekonań, w szczególności: racjonalnych świadomych przekonań. Mają one także interesującą i ważną interpretację metalogiczną:

$Bp$  można interpretować jako *zdanie  $p$  jest dowodliwe w arytmetyce PA*.

**Uwaga.** Angielski termin *reasoner* oddaję przez polski neologizm *myślak*.

# Systemy przekonań

Przypuśćmy, że jesteś racjonalną, samoświadomą Istotą. Jak to przypuszczenie przełożyć na język logiki epistemicznej? Oto propozycja. Nazwiemy **szczęściarzem epistemicznym** każdą osobę  $S$ , której system przekonań spełnia warunki:

- (1a)  $S$  wierzy we wszystkie tautologie klasycznego rachunku zdań;
- (1b) system przekonań  $S$  jest domknięty na regułę *modus ponens*: jeśli  $S$  wierzy w  $p$  oraz wierzy w  $p \rightarrow q$ , to wierzy także w  $q$ ;
- (2) dla dowolnych  $p$  oraz  $q$ ,  $S$  wierzy w  $(Bp \wedge B(p \rightarrow q)) \rightarrow Bq$ ;
- (3) dla dowolnego  $p$ , jeśli  $S$  wierzy w  $p$ , to wierzy w  $Bp$ ;
- (4) dla dowolnego  $p$ ,  $S$  wierzy w  $Bp \rightarrow BBp$ .

**Uwaga:** rozważamy tylko osoby, które albo zawsze mówią prawdę, albo zawsze mówią fałsz.

## Poziomy samoświadomości

Każdą osobę, która spełnia jedynie warunki (1a) i (1b) nazwiemy **prostaczkim logicznym**. Zatem, jeśli  $S$  jest prostaczkim logicznym, to jego/jej system przekonań zawiera klasyczną logikę zdaniową, ale  $S$  może być tego nieświadom(a).

Powiemy, że osoba  $S$  jest:

- **normalna**, gdy jeśli wierzy w  $p$ , to wierzy też w  $Bp$ ;
- **regularna**, gdy jeśli wierzy w  $p \rightarrow q$ , to wierzy też w  $Bp \rightarrow Bq$ ;
- **sprzeczna**, gdy do jej systemu przekonań należy jakaś para zdań wzajem sprzecznych, lub — co na jedno wychodzi — *fałsz logiczny*, który oznaczamy przez  $\perp$ .

**Uwaga.** Może bardziej właściwe byłoby mówienie o własnościach **systemów przekonań**, a nie **osób**.

## Poziomy samoświadomości

Można udowodnić, że: (\*) dowolny szczęściarz epistemiczny  $S$  wie, że jeśli uwierzy w jakieś zdanie  $p$  oraz w jego negację  $\neg p$ , to stanie się sprzeczny.

O szczęściarzach epistemicznych można udowodnić wiele innych ciekawych rzeczy. Nie wszystkie z nich będą nam dalej potrzebne. Dodajmy może jedynie, że:

- każdy szczęściarz epistemiczny jest normalny, a nawet wie, że jest normalny;
- każdy szczęściarz epistemiczny jest regularny i o tym także wie;
- wreszcie, każdy szczęściarz epistemiczny jest przekonany o tym, że jest szczęściarzem epistemicznym; a zatem to jego przekonanie jest trafne i, w konsekwencji, każdy szczęściarz epistemiczny wie, że jest szczęściarzem epistemicznym.

# Poziomy samoświadomości

Można rozważać pięć typów myślaków, o wstępujących poziomach samoświadomości:

- Typ 1: prostaczek logiczny.
- Typ 1\*: prostaczek logiczny, który, jeśli uwierzył w  $p \rightarrow q$ , to uwierzy, że jeśli uwierzył w  $p$ , to uwierzy w  $q$ .
- Typ 2: prostaczek logiczny, który wierzy we wszystkie zdania postaci  $(Bp \wedge B(p \rightarrow q)) \rightarrow Bq$ .
- Typ 3: myślak typu 2, który, jeśli wierzy w  $p$ , to wierzy w  $Bp$ .
- Typ 4: szczęściarz epistemiczny, tj. normalny i regularny prostaczek logiczny, który wierzy we wszystkie zdania postaci  $Bp \rightarrow BBp$ , czyli wierzy, że jest normalny.

**Uwaga.** Terminy: prostaczek logiczny oraz szczęściarz epistemiczny nie występują w *Forever Undecided*; wprowadzamy je na użytek tej prezentacji.

# Poziomy samoświadomości

Z podanych definicji wynika, że:

- Każdy prostaczek logiczny jest myślakiem typu  $1^*$ .
- Każdy myślak typu  $1^*$  jest regularnym prostaczkiem logicznym (i *vice versa*).
- Każdy myślak typu 2 wie, że jest typu  $1^*$ .
- Myślaki typu 3 to dokładnie normalne myślaki typu 2.
- Dla  $1 \leq n < 4$ : każdy myślak typu  $n$  jest też myślakiem typu  $n + 1$ .
- $1 < n \leq 4$ : każdy myślak typu  $n$  wierzy, że jest myślakiem typu  $n - 1$ .

**Uwaga.** Ponieważ każdy szczęściarz epistemiczny **wie**, że jest szczęściarzem epistemicznym, więc stanowi on zwieńczenie hierarchii samoświadomych myślaków. Inaczej mówiąc, gdybyśmy chcieli zdefiniować myślaka typu 5 jako takiego, który jest typu 4 i wierzy, iż jest typu 4, to otrzymalibyśmy jedynie myślaka typu 4.

# Zapraszam na szczyt



Możemy już rozpocząć wyprawę na kilka Szczytów Metalogiki.



## II Twierdzenie Gödla

Za chwilę dowiesz się czegoś naprawdę frapującego o swoim systemie przekonań. Udowodnimy mianowicie:

### Twierdzenie 1.

Przypuśćmy, że normalny prostaczek logiczny  $S$  wierzy w zdanie postaci  $p \equiv \neg Bp$ . Wtedy:

- (a) Jeśli  $S$  kiedykolwiek uwierzy w  $p$ , to stanie się sprzeczny.
- (b) Jeśli  $S$  jest szczęściarzem epistemicznym, to wie, iż jeśli kiedykolwiek uwierzy w  $p$ , to stanie się sprzeczny — tj. uwierzy w  $Bp \rightarrow B \perp$ .
- (c) Jeśli  $S$  jest szczęściarzem epistemicznym i wierzy, że nie może być sprzeczny, to stanie się sprzeczny.

## II Twierdzenie Gödla

### Dowód Twierdzenia 1.

(a) Przypuśćmy, że  $S$  wierzy w  $p$ .

Będąc normalnym, uwierzy w  $Bp$ .

Nadto, ponieważ wierzy w  $p$  oraz wierzy w  $p \equiv \neg Bp$ ,  
więc musi uwierzyć w  $\neg Bp$   
(bo jest prostaczką logiczną).

A więc uwierzy jednocześnie w  $Bp$  oraz w  $\neg Bp$ ,  
a stąd stanie się sprzeczny.

## II Twierdzenie Gödla

(b) Przypuśćmy, że  $S$  jest szczęściarzem epistemicznym. Ponieważ jest wtedy prostaczkim logicznym i wierzy w  $p \equiv \neg Bp$ , więc musi także wierzyć w  $p \rightarrow \neg Bp$ .

Nadto,  $S$  jest regularny, a stąd uwierzy w  $Bp \rightarrow B\neg Bp$ . Wierzy też w  $Bp \rightarrow BBp$  (ponieważ wie, że jest normalny).

Zatem  $S$  uwierzy w  $Bp \rightarrow (BBp \wedge B\neg Bp)$ , które jest logiczną konsekwencją ostatnich dwóch zdań.

Wierzy również w  $(BBp \wedge B\neg Bp) \rightarrow B \perp$  (na mocy (\*), ponieważ dla dowolnego zdania  $X$ ,  $S$  wierzy w  $(BX \wedge B\neg X) \rightarrow B \perp$ , a więc wierzy w jego szczególny przypadek, gdzie  $X$  jest zdaniem  $Bp$ ).

Gdy  $S$  już uwierzy jednocześnie w  $Bp \rightarrow (BBp \wedge B\neg Bp)$  oraz w  $(BBp \wedge B\neg Bp) \rightarrow B \perp$ , będzie musiał uwierzyć w  $Bp \rightarrow B \perp$  (ponieważ jest prostaczkim logicznym).

## II Twierdzenie Gödla

(c) Ponieważ  $S$  wierzy w  $Bp \rightarrow B \perp$  (jak właśnie udowodniliśmy), więc wierzy także w  $\neg B \perp \rightarrow \neg Bp$ .

Założmy teraz, że  $S$  wierzy w  $\neg B \perp$  (wierzy, że nie może być sprzeczny).

Ponieważ wierzy też w  $\neg B \perp \rightarrow \neg Bp$  (jak właśnie widzieliśmy), więc uwierzy w  $\neg Bp$ .

A ponieważ wierzy również w  $p \equiv \neg Bp$ , więc uwierzy w  $p$ , a stąd stanie się sprzeczny, na mocy (a).

## II Twierdzenie Gödla

Udowodniliśmy przed chwilą nie byle co, bo modalną (epistemiczną) wersję **II Twierdzenia Gödla** (o niedowodliwości niesprzeczności arytmetyki w samej arytmetyce).

Oczywiście był to dowód w postaci wielce uproszczonej — precyzyjny dowód wymagałby, powiedzmy, jednosemestralnego wykładu wstępnego.

W tej prezentacji korzystaliśmy z rozdziału 12 tłumaczenia książki Raymonda Smullyana *Forever Undecided*.

Poddajemy ocenie audytorium, czy ten sposób popularyzacji wiedzy (meta)logicznej można uznać za dydaktycznie przydatny.

## Przykład teologiczny

### Przykład.

Przypuśćmy, że jesteś studentką teologii i że Twój Ulubiony Profesor teologii mówi do Ciebie:

*Bóg istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nigdy nie uwierzysz, że Bóg istnieje.*

Jeśli wierzysz profesorowi, to wierzysz w zdanie  $g \equiv \neg Bg$ , gdzie  $g$  jest zdaniem stwierdzającym, że Bóg istnieje.

Wtedy, zgodnie z Twierdzeniem 1, nie możesz wierzyć w swoją własną niesprzeczność bez popadnięcia w sprzeczność.

Oczywiście, możesz wierzyć we własną niesprzeczność, bez popadnięcia przy tym w sprzeczność — wystarczy, że przestaniesz ufać Twojemu Ulubionemu Profesorowi.

Coś za coś.

## Modalna interpretacja dowodliwości

Przy modalnej interpretacji **dowodliwości** nie mamy jednak takiej możliwości ucieczki, jak w powyższym przykładzie.

Wiadomo, że formuła  $god(\bar{n})$ , stwierdzająca swoją własną niedowodliwość w PA, jest prawdziwa, lecz dowodu w PA nie posiada.

Można pokazać, że twierdzeniem stosownego systemu modalnego (w którym reprezentujemy dowodliwość w PA) jest:

$$god(\bar{n}) \equiv \neg \mathbf{B}god(\bar{n}).$$

## Navigare necesse est

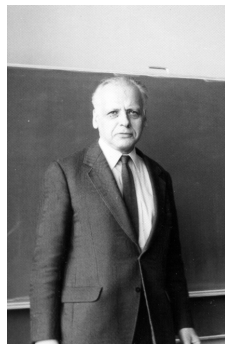


Schodzimy ze szczytu Gödla. Przed nami pasmo Gór Löba.



# Wishful thinking

Pokażemy teraz, co wystarcza, aby każda z obecnych tu Uroczych Pań została — powiedzmy — **Miss World 2007**. Będzie to przykład samospełniającego się przekonania.



Martin Hugo Löb

# Samospełniające się przekonania

Przypuśćmy, że:

- jesteś szczęściarą epistemiczną;
- osoby, które rozważamy albo zawsze mówią fałsz, albo zawsze mówią prawdę (i Ty wiesz, że tak jest);
- wierzysz swojemu chłopakowi, który prawdziwie (!) mówi:  
( $\dagger$ ) *Jeśli uwierzysz, że zostaniesz Miss World 2007, to zostaniesz Miss World 2007.*
- wierzysz też mnie (JP), który mówi:  
( $\ddagger$ ) *Jeśli wierzysz, że ja zawsze mówię prawdę, to zostaniesz Miss World 2007.*

## Twierdzenie 2.

Przy powyższych założeniach *zostaniesz Miss World 2007*. Cieszysz się?

# Samospełniające się przekonania

Dla skrótu, przyjmijmy oznaczenia:

- $k$  zastępuje zdanie stwierdzające, iż ja (JP) zawsze mówię prawdę;
- $\alpha$  zastępuje zdanie stwierdzające, że zostaniesz Miss World 2007.

Dowód składa się z dwóch części.

1. W pierwszej pokazujemy, że nasze założenia implikują  $B\alpha$ . Jest to dowód założeniowy, dostępny dla każdej szczęściary epistemicznej.

Mamy udowodnić formułę:

$$(\star) \quad ((B\alpha \rightarrow \alpha) \wedge (k \equiv (Bk \rightarrow \alpha))) \rightarrow B\alpha.$$

**Uwaga.** Zdanie  $k$  stwierdza, iż JP zawsze mówi prawdę; a więc prawdą jest, że JP wypowiada ( $\ddagger$ ) dokładnie wtedy, gdy prawdziwe jest  $k \equiv (\ddagger)$ , czyli dokładnie wtedy, gdy prawdziwe jest  $k \equiv (Bk \rightarrow \alpha)$ .

- |      |  |  |
|------|--|--|
| 1.   | $(B\alpha \rightarrow \alpha) \wedge (k \equiv (Bk \rightarrow \alpha))$ | założenie  |
| 2.   | $B\alpha \rightarrow \alpha$   | OK: 1  |
| 3.   | $k \equiv (Bk \rightarrow \alpha)$                                       | OK: 1  |
| 4.   | $k \rightarrow (Bk \rightarrow \alpha)$                                  | OR: 3  |
| 5.   | $(Bk \rightarrow \alpha) \rightarrow k$                                  | OR: 3  |
| 6.1. | $k$  | założenie dodatkowe                                  |
| 6.2. | $Bk \rightarrow \alpha$  | MP: 4, 6.1.  |
| 6.3. | $Bk$   | 6.1. i warunek (3)                                   |
| 6.4. | $\alpha$   | MP: 6.2., 6.3.                                       |
| 7.   | $k \rightarrow \alpha$   | 6.1. $\rightarrow$ 6.4.                              |
| 8.   | $B(k \rightarrow \alpha)$  | 7 i warunek (3)                                      |
| 9.   | $Bk \rightarrow B\alpha$   | 8 i warunki (1a) i (2)                               |
| 10.  | $Bk \rightarrow \alpha$  | 2, 9 i warunki (1b), (1a)<br>(prawo sylog. hipotet.) |
| 11.  | $k$  | MP: 5, 10  |
| 12.  | $Bk$   | 11 i warunek (3)                                     |
| 13.  | $\alpha$   | MP: 10, 12   |
| 14.  | $B\alpha$  | 13 i warunek (3).                                    |

# Samospełniające się przekonania

2. Ponieważ proroctwo ( $\dagger$ ) Twojego chłopaka (tj. zdanie  $B\alpha \rightarrow \alpha$ ) jest założenia prawdziwe, a powyższy dowód formuły ( $\star$ ) pokazuje, iż nasze założenia implikują  $B\alpha$ , więc na mocy reguły odrywania otrzymujemy  $\alpha$ , czyli tezę.

**Zostaniesz Miss World 2007!!!**

Cieszysz się???

**Uwaga.** Powyższy dowód był przykładem dowodu wprost. Aby pokazać, że zostaniesz Miss World 2007 nie musieliśmy odwoływać się do absurdu.

Cieszysz się?

# Samospełniające się przekonania

**Ciekawostka prowincjonalna.** 16 maja 2005 roku odbyły się demokratyczne wybory Dyrektora Instytutu Językoznawstwa UAM. Dwa tygodnie wcześniej, na Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM, odczyt *Kto będzie Dyrektorem Instytutu Językoznawstwa UAM?* wygłosiła Pani Dr **Alice Ann Hunter** (*Department of Independent Logic, King David University, Negev Desert*).

Korzystając z twierdzeń logiki epistemicznej (z Twierdzenia Löba), Dr **Hunter** trafnie przewidziała wynik wyborów. Jak się domyślasz, dowód był podobny do podanego wyżej dowodu, że zostaniesz Miss World 2007. Tekst odczytu dostępny na stronie:

[www.logic.amu.edu.pl/seminarium.html](http://www.logic.amu.edu.pl/seminarium.html)

# Wędrujemy dalej?



Jeśli mamy: czas, siły oraz ochotę, to możemy wrócić w Góry Gödlowskie.

# I Twierdzenie Gödla

Myślak jest nazywany **stabilnym**, jeśli dla każdego zdania  $p$ , jeśli wierzy on w  $Bp$ , to wierzy też w  $p$ .

Powiemy, że system przekonań myślaka jest **niezupełny**, jeśli istnieje co najmniej jedno zdanie  $p$  takie, że myślak nigdy nie uwierzy w  $p$  ani też nigdy nie uwierzy w  $\neg p$  (pozostanie na zawsze niezdecydowany, czy  $p$  jest prawdziwe, czy fałszywe).

Systemy przekonań, które nie są niezupełne, nazywamy **zupełnymi**. Osoby, które władają takimi systemami przekonań, są dość uciążliwe w kontaktach społecznych — każda taka osoba jest **Besserwisserem**, kimś kto na każdy pogląd ma wyrobione zdanie, pozbawiony jest wątpliwości.

Gdy zajmujemy się **systemami twierdzeń** raczej niż **zespołami przekonań**, to **systemami typu 1** nazwiemy te, które spełniają warunki 1a i 1b podane wyżej.



# I Twierdzenie Gödla

Normalny prostaczek logiczny przybywa na Wyspę Rycerzy i Łotrów i wierzy w reguły wyspy. (To, czy reguły wyspy rzeczywiście obowiązują, czy nie, jest bez znaczenia.)

Spotyka tubylca, który mówi:

„Nigdy nie uwierzysz, że jestem rycerzem.”

Udowodnimy, że zachodzi wtedy:

## Twierdzenie 3.

Jeśli myślak jest jednocześnie niesprzeczny i stabilny, to jego system przekonań jest niezupełny. Dokładniej mówiąc, znajdziemy zdanie  $p$  takie, że zachodzą następujące dwa warunki:

- (a) Jeśli myślak jest niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w  $p$ .
- (b) Jeśli myślak jest jednocześnie niesprzeczny i stabilny, to nigdy nie uwierzy w  $\neg p$ .

## I Twierdzenie Gödla

Zdanie  $p$  o które chodzi jest po prostu zdaniem  $k$  — zdaniem stwierdzającym, że tubylec jest rycerzem.

Tubylec wygłosił  $\neg Bk$ , a więc myślak uwierzy w  $k \equiv \neg Bk$ .

(a) Przypuśćmy, że myślak wierzy w  $k$ . Wtedy, będąc normalnym, uwierzy w  $Bk$ . Uwierzy też w  $\neg Bk$  (ponieważ wierzy w  $k$  oraz wierzy w  $k \equiv \neg Bk$  i jest prostaczką logiczną), a stąd stanie się sprzeczny. Zatem, jeśli jest niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w  $k$ .

(b) Przypuśćmy, że myślak jest prostaczką logiczną i wierzy w  $k \equiv \neg Bk$ , wtedy wierzy też w  $\neg k \equiv Bk$ . Przypuśćmy teraz, że kiedykolwiek uwierzy on w  $\neg k$ . Wtedy uwierzy w  $Bk$ . Jeśli jest stabilny, to uwierzy w  $k$  i stąd stanie się sprzeczny (ponieważ wierzy w  $\neg k$ ). Zatem, jeśli jest jednocześnie stabilny i niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w  $\neg k$ . Podsumowując, jeśli jest on jednocześnie stabilny i niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy że tubylec jest rycerzem i nigdy nie uwierzy, że tubylec jest łotrem.

# I Twierdzenie Gödla

To samo rozumowanie, którego użyto w rozwiązaniu powyższego problemu, gdy zastosować je do systemów matematycznych raczej niż do myślaków, ustanawia następującą postać **Pierwszego Twierdzenia Gödla o Niezupełności**:

**Twierdzenie 4.** Dowolny niesprzeczny, normalny, stabilny system Gödłowski musi być niezupełny. Dokładniej, jeśli  $S$  jest normalnym systemem typu 1, a  $p$  jest zdaniem takim, że  $p \equiv \neg \mathbf{B}p$  jest dowodliwe w  $S$ , to jeśli  $S$  jest niesprzeczny, to  $p$  nie jest dowodliwe w  $S$ , a jeśli  $S$  jest dodatkowo stabilny, to  $\neg p$  również nie jest dowodliwe w  $S$ .

Zdanie  $p$  nazywamy **nierozstrzygalnym** w systemie  $S$ , jeśli ani  $p$  ani jego negacja  $\neg p$  nie jest dowodliwe w  $S$ . Zatem Pierwsze Twierdzenie Gödla o Niezupełności mówi nam, że dla dowolnego niesprzecznego, normalnego, stabilnego systemu Gödłowskiego  $S$ , musi zawsze istnieć co najmniej jedno zdanie  $p$ , które, choć **wyrażalne** w języku  $S$ , nie jest **rozstrzygalne** w  $S$  — nie można w  $S$  udowodnić ani tego zdania, ani jego negacji.

# I Twierdzenie Gödla

Dla dowolnej własności  $P$  liczb, zdanie stwierdzające, że istnieje co najmniej jedna liczba  $n$  mająca własność  $P$  zapisujemy:  $\exists nP(n)$ .

Przypuśćmy, że mamy system matematyczny i własność  $P$  taką, że zdanie  $\exists nP(n)$  jest dowodliwe w systemie, a jednak dla każdego poszczególnego  $n$  zdanie  $\neg P(n)$  jest dowodliwe — to jest, wszystkie z nieskończenie wielu zdań  $\neg P(0), \neg P(1), \neg P(2), \dots, \neg P(n), \dots$  są dowodliwe.

Oznacza to, z jednej strony, że w systemie można udowodnić zdanie stwierdzające, że **jakaś** liczba ma własność  $P$ , a jednak o każdej **poszczególnej** liczbie  $n$  można udowodnić, że liczba ta owej własności nie posiada!

Systemy takie nazywane są  *$\omega$ -sprzecznymi*.

# I Twierdzenie Gödla

Pojęcie  $\omega$ -sprzeczności zostało kiedyś zabawnie scharakteryzowane przez matematyka Paula Halmosa, który zdefiniował  $\omega$ -sprzeczną matkę jako taką, która mówi swojemu dziecku: „Jest coś, co możesz robić, ale nie możesz robić tego, nie możesz robić tamtego, nie możesz robić owego, ...” Dziecko pyta: „Ale, mamusiu, czy jest *cokolwiek* co mógłbym robić?” Matka odpowiada: „O tak, ale nie jest to to, ani tamto, ani owo, ...”

System jest nazywany  $\omega$ -niesprzecznym, jeśli nie jest on  $\omega$ -sprzeczny. Tak więc dla systemu  $\omega$ -niesprzecznego, jeśli  $\exists nP(n)$  jest dowodliwe, to istnieje co najmniej jedna liczba  $n$  taka, że zdanie  $\neg P(n)$  *nie jest* dowodliwe.

Sprzeczny system typu 1 jest również  $\omega$ -sprzeczny, ponieważ w sprzecznym systemie typu 1 wszystkie zdania są dowodliwe.

# I Twierdzenie Gödla

We wszystkich dotąd rozważanych problemach, *kolejność* w której myślak wierzył w różnorakie zdania nie odgrywała roli. W pozostałych problemach w tej części, kolejność ta odgrywa rolę pierwszorzędą.

Myślak przybywa na Wyspę Rycerzy i Łotrów pewnego dnia, który nazwiemy dniem numer 0. Następny dzień jest dniem numer 1, następny dniem numer 2, i tak dalej.

Dla każdej liczby naturalnej  $n$  mamy więc dzień numer  $n$  ( $n$ -ty dzień) i zakładamy, że myślak jest nieśmiertelny i ma przed sobą nieskończenie wiele dni.

# I Twierdzenie Gödla

Dla każdej liczby naturalnej  $n$  i dowolnego zdania  $p$  niech  $B_n p$  będzie zdaniem stwierdzającym, że myślak uwierzył w  $p$  w jakimś momencie  $n$ -tego dnia.

Zdanie  $Bp$  jest, jak zwykle, zdaniem stwierdzającym, że myślak uwierzy w  $p$  tego lub innego dnia, lub, co na jedno wychodzi, zdaniem  $\exists n B_n p$  (istnieje  $n$  takie, że myślak uwierzy w  $p$   $n$ -tego dnia).

Nazwiemy myśłaka  *$\omega$ -sprzecznym*, jeśli istnieje co najmniej jedno zdanie  $p$  takie, że myślak (kiedyś) wierzy w  $Bp$ , a jednak dla każdego  $n$  wierzy on (kiedyś) w  $\neg B_n p$ .

Myśłaka nazywamy  *$\omega$ -niesprzecznym*, jeśli nie jest on  $\omega$ -spreczny.

# I Twierdzenie Gödla

Rozważmy teraz myślaka, który spełnia następujące trzy warunki.

- **Warunek  $C_1$ .** Jest on typu prostaczkim logicznym.
- **Warunek  $C_2$ .** Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  i dowolnego zdania  $p$ :  
 (a) jeśli myślak wierzy w  $p$   $n$ -tego dnia, to (prędzej czy później) uwierzy w  $B_n p$ ; (b) jeśli nie wierzy on w  $p$   $n$ -tego dnia, to (prędzej czy później) uwierzy w  $\neg B_n p$ . (Oddajemy w ten sposób, że myślak śledzi to, w jakie zdania wierzył, a w jakie nie wierzył we wszystkich dniach poprzednich.)
- **Warunek  $C_3$ .** Dla dowolnych  $n$  oraz  $p$  myślak wierzy w zdanie  $B_n p \rightarrow B p$  (które, oczywiście, jest zdaniem prawdziwym).

Następujący problem jest bardzo zbliżony do oryginalnego sformułowania Gödla jego Pierwszego Twierdzenia o Niezupełności.



# I Twierdzenie Gödla

Myślak spełniający powyższe trzy warunki przybywa na Wyspę Rycerzy i Łotrów i wierzy w reguły wyspy. Spotyka tubylca, który mówi mu:

„Nigdy nie uwierzysz, że jestem rycerzem.”

Udowodnimy, że zachodzi wtedy:

## Twierdzenie 5.

- (a) Jeśli myślak jest (prosto) niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy, że tubylec jest rycerzem.
- (b) Jeśli myślak jest  $\omega$ -niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy, że tubylec jest łotrem.

Zatem jeśli myślak jest  $\omega$ -niesprzeczny (a stąd także prosto niesprzeczny), to pozostanie na zawsze niezdecydowany co do tego, czy tubylec jest rycerzem, czy też łotrem.

## I Twierdzenie Gödla

Najłatwiejszym sposobem rozwiązania obecnego problemu będzie pokazanie, że dowolny myślak spełniający warunki  $C_1$ ,  $C_2$  oraz  $C_3$  musi być normalny, a jeśli jest  $\omega$ -niesprzeczny, to musi być też stabilny.

(a) Pokazujemy, że jest on normalny.

Przypuśćmy, że wierzy on w  $p$ .

Wtedy dla pewnego  $n$ , wierzy on  $n$ -tego dnia w  $p$ .

Wtedy, na mocy punktu (a) z warunku 2, uwierzy w  $B_n p$ .

Wierzy także w  $B_n p \rightarrow B p$  (na mocy warunku 3), a więc będąc typu 1 (warunek 1) uwierzy w  $B p$ .

Zatem jest normalny.

## I Twierdzenie Gödla

(b) Przypuśćmy teraz, że jest on  $\omega$ -niesprzeczny.

Pokażemy, że jest stabilny.

Przypuśćmy, że wierzy on w  $Bp$ .

Jeśli nigdy nie uwierzy w  $p$ , to dla każdej liczby  $n$ , nie wierzy on w  $p$   $n$ -tego dnia, a stąd na mocy punktu (b) z warunku 2, dla każdego  $n$  wierzy on w  $\neg B_n p$ .

Ale ponieważ wierzy on w  $Bp$ , więc stanie się wtedy  $\omega$ -sprzeczny.

Zatem, jeśli jest on  $\omega$ -niesprzeczny i wierzy w  $Bp$ , to musi wierzyć w  $p$  tego lub innego dnia.

Dowodzi to, że jeśli jest on  $\omega$ -niesprzeczny, to musi być stabilny (zakładając, że spełnia on warunki  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  — lub nawet tylko (b) z warunku  $C_2$ ).

Zatem, na mocy Twierdzenia 4, pozostanie on na zawsze niezdecydowany.

# Chcemy iść wyżej?



Stąd już niedaleko na Połoniny Rosserowskie.

# Twierdzenie Rossera

Dla dowolnych zdań  $p$  oraz  $q$ , powiemy, że myślak *uwierzył w  $p$  wcześniej niż (zanim) uwierzył w  $q$* , jeśli jest taki dzień, w którym wierzy on w  $p$ , a jeszcze nie uwierzył w  $q$ . Jeśli myślak *nigdy* nie uwierzy w  $q$ , ale uwierzył w  $p$  (tego lub innego dnia), to uznajemy, iż *prawdziwe* jest, że uwierzył w  $p$  wcześniej, niż uwierzył w  $q$ . (Innymi słowy, nie musi on wcale kiedykolwiek uwierzyć w  $q$ , aby uwierzyć w  $p$  wcześniej niż uwierzyć w  $q$ .) Niech  $Bp < Bq$  będzie zdaniem stwierdzającym, że myślak uwierzył w  $p$  wcześniej niż uwierzył w  $q$ . Jeśli  $Bp < Bq$  jest prawdziwe, to oczywiście  $Bq < Bp$  jest fałszywe.

Zdefiniujemy myślaka *Rosserowskiego* jako prostaczka logicznego, dla którego zachodzi następujący warunek:

**Warunek R.** Dla dowolnych zdań  $p$  oraz  $q$ , jeśli myślak uwierzył w  $p$  pewnego dnia, w którym jeszcze nie uwierzył w  $q$ , to (wcześniej czy później) uwierzy on w  $Bp < Bq$  oraz w  $\neg(Bq < Bp)$ .

# Twierdzenie Rossera

Myślak Rosserowski przybywa na Wyspę Rycerzy i Łotrów i wierzy w reguły wyspy. Spotyka tubylca, który mówi mu:

„Nigdy nie uwierzysz wcześniej, że jestem rycerzem, niż uwierzysz, że jestem łotrem.”

(Oddając to symbolicznie, tubylec wygłasza zdanie  $\neg(Bk < B\neg k)$ .)  
Udowodnimy:

## Twierdzenie 6.

Jeśli myślak jest *po prostu* niesprzeczny, to musi na zawsze pozostać niezdecydowany, czy tubylec jest rycerzem, czy łotrem.

# Twierdzenie Rossera

Ponieważ tubylec stwierdził  $\neg(\mathbf{B}k < \mathbf{B}\neg k)$ , więc myślak uwierzy w  $k \equiv \neg(\mathbf{B}k < \mathbf{B}\neg k)$ . Przypuśćmy, że myślak jest (prosto) niesprzeczny. Mamy pokazać, że nigdy nie uwierzy w  $k$  i nigdy nie uwierzy w  $\neg k$ .

(a) Przypuśćmy, że kiedyś uwierzył w  $k$ . Ponieważ jest niesprzeczny, więc nigdy nie uwierzy w  $\neg k$ , a stąd uwierzy w  $k$  wcześniej niż uwierzy w  $\neg k$ . Stąd, uwierzy w  $\mathbf{B}k < \mathbf{B}\neg k$  (na mocy warunku R). Ale wierzy też w  $k \equiv \neg(\mathbf{B}k < \mathbf{B}\neg k)$ , a więc uwierzy w  $\neg k$ , a wierząc już w  $k$  stanie się sprzeczny! Tak więc, jeśli jest niesprzeczny, to nigdy nie uwierzy w  $k$ .

(b) Przypuśćmy, że kiedyś uwierzył w  $\neg k$ . Będąc niesprzeczny, nigdy nie uwierzy w  $k$ , a stąd uwierzy w  $\neg k$  wcześniej niż uwierzy w  $k$ , a stąd na mocy warunku R uwierzy w  $\neg(\mathbf{B}k < \mathbf{B}\neg k)$ . Ale wierzy on w  $k \equiv \neg(\mathbf{B}k < \mathbf{B}\neg k)$ , a więc uwierzy wtedy w  $k$  i stanie się sprzeczny. A zatem, jeśli jest niesprzeczny, to nie może także uwierzyć w  $\neg k$ .

# Twierdzenie Rossera

Dowodliwe zdania systemów matematycznych są dowodliwe na różnych etapach.

Moglibyśmy myśleć o systemie matematycznym jako o komputerze zaprogramowanym tak, aby dowodzić różnorodnych zdań *kolejno*.

Powiemy, że  $p$  jest **dowodliwe wcześniej (zanim) niż  $q$**  (w danym systemie matematycznym), jeśli  $p$  zostało udowodnione na pewnym etapie, na którym  $q$  jeszcze nie zostało udowodnione ( $q$  może być lub też nie być udowodnione na jakimś późniejszym etapie).



## Twierdzenie Rossera

Dla dowolnych zdań  $p$  oraz  $q$  wyrażalnych w systemie, zdanie  $Bp < Bq$  ( $p$  jest dowodliwe wcześniej niż  $q$ ) również jest wyrażalne w systemach typu tych rozpatrywanych przez Gödla, a Rosser pokazał, że jeśli  $p$  jest dowodliwe wcześniej niż  $q$ , to zdania  $Bp < Bq$  oraz  $\neg(Bq < Bp)$  są oba dowodliwe w systemie.

Rosser znalazł także zdanie  $p$  takie, że  $p \equiv \neg(Bp < B\neg p)$  jest dowodliwe w systemie. (Takie zdanie  $p$  odpowiada tubylcowi z pierwszego rozważanego w tej części problemu, który mówi: „Nigdy nie uwierzysz wcześniej, że jestem rycerzem, niż uwierzysz, że jestem łotrem.”) Wtedy, na mocy rozumowania z rozwiązania wspomnianego problemu, jeśli  $p$  jest dowodliwe, to system jest sprzeczny, a jeśli  $\neg p$  jest dowodliwe, to system także jest sprzeczny. A zatem, jeśli system jest niesprzeczny, to zdanie  $p$  jest nierozstrzygalne w systemie.

# Twierdzenie Rossera

Zdanie Gödrowskie może zostać sparafrazowane jako:

„Nie jestem dowodliwe na żadnym etapie.”

Bardziej wyszukane zdanie Rossera może zostać sparafrazowane jako:

„Nie mogę być dowiedzione na żadnym etapie, chyba że moja negacja została już wcześniej udowodniona.”

Zdanie Gödla, chociaż prostsze, wymaga założenia  $\omega$ -niesprzeczności dla przeprowadzenia rozumowania. Zdanie Rossera, chociaż bardziej skomplikowane, dostarcza szukanego rezultatu przy słabszym założeniu prostej niesprzeczności.

# Wędrujemy, dopóki czynny jest horyzont



A na horyzoncie Masyw Tarskiego.

# Twierdzenie Tarskiego

Przypuśćmy, że mamy myślaka — nazwijmy go Paul — który jest zawsze *ściśły* w swoich przekonaniach (nigdy nie wierzy w zdania fałszywe). Nie musi on być prostaczkim logicznym, ani normalnym, nie jest też konieczne, aby rzeczywiście odwiedzał Wyspę Rycerzy i Łotrów. Wszystko, co musimy o nim wiedzieć to to, że jest ściśły.

Pewnego dnia tubylec mówi o nim:

„Paul nigdy nie uwierzy, że jestem rycerzem.”

Wtedy logicznie wynika stąd:

Twierdzenie 7.

System przekonań Paula jest niezupełny.

## Twierdzenie Tarskiego

Jeśli Paul kiedykolwiek uwierzy, że tubylec jest rycerzem, to sfalsyfikuje to tym samym to, co powiedział tubylec, czyniąc tubylca łotrem, a tym samym czyniąc Paula nieścisłym z powodu jego wiary, że tubylec jest rycerzem.

Ale powiedziano nam, że Paul jest ścisły, a więc nigdy nie uwierzy on, że tubylec jest rycerzem.

Stąd, to co powiedział tubylec jest prawdziwe, a więc tubylec rzeczywiście jest rycerzem.

Wtedy, ponieważ Paul jest ścisły, nigdy nie będzie żywił fałszywego przekonania, że tubylec jest łotrem.

A zatem Paul nigdy nie dowie się, czy tubylec jest rycerzem, czy łotrem.

# Twierdzenie Tarskiego

**Komentarz.** Treść matematyczna powyższej zagadki jest następująca. W systemach rozważanych przez Gödla mamy nie tylko pewne zdania nazywane zdaniami *dowodliwymi*, lecz również obszerniejszą klasę zdań nazywanych zdaniami *prawdziwymi* systemu.

W klasie zdań prawdziwych systemu obowiązują reguły tabliczek prawdziwościowych dla spójników logicznych.

Nadto, dla każdego zdania  $p$  systemu, zdanie  $Bp$  jest *prawdziwym* zdaniem systemu wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$  jest zdaniem *dowodliwym* systemu.

Gödel znalazł godne uwagi zdanie  $g$  takie, że zdanie  $g \equiv \neg Bg$  było zdaniem *prawdziwym* systemu (było ono nawet faktycznie dowodliwe w systemie, ale ten mocniejszy fakt nie jest potrzebny dla obecnego rozumowania).

# Twierdzenie Tarskiego

Gdyby  $g$  było fałszywe, to  $Bg$  byłoby prawdziwe, a stąd  $g$  byłoby dowodliwe, a stąd prawdziwe, i mielibyśmy sprzeczność.

Zatem  $g$  jest prawdziwe, a stąd  $\neg Bg$  jest prawdziwe, czyli  $g$  nie jest dowodliwe w systemie.

Tak więc,  $g$  jest prawdziwe, ale niedowodliwe w systemie.

Ponieważ  $g$  jest prawdziwe, więc  $\neg g$  jest fałszywe, a stąd także niedowodliwe w systemie (ponieważ wszystkie dowodliwe zdania są prawdziwe).

A zatem  $g$  jest nierozstrzygalne w systemie.

# Czas pożegnać się ze Szczytami Metalogiki



Byliśmy tylko na kilku. A jest ich nieskończenie wiele.



Dawniejsza opozycja filozoficzna wobec logiki modalnej była osadzona w przybliżeniu w trzech różnych (i nieporównywalnych) przekonaniach. Po pierwsze, są tacy, którzy są przekonani, że wszystko, co jest prawdziwe jest koniecznie prawdziwe, a stąd nie ma żadnej różnicy między prawdą a prawdą konieczną. Po drugie, są tacy, którzy wierzą, że nic nie jest koniecznie prawdziwe, a stąd dla dowolnego zdania  $p$ , zdanie  $Np$  ( $p$  jest koniecznie prawdziwe) jest po prostu fałszywe! A po trzecie, są i tacy, którzy twierdzą, że słowa „koniecznie prawdziwe” nie niosą jakiegokolwiek sensu. Tak więc, każde z tych nastawień filozoficznych odrzuca logikę modalną ze swoich własnych powodów. W istocie, pewien bardzo znany filozof wstawił się sugestią, że nowoczesna logika modalna została poczęta w grzechu. Na co Boolos bardzo stosownie odpowiedział: „**Jeśli nowoczesna logika modalna została poczęta w grzechu, to została wybawiona przez Gödłowskość**”. [W oryginale: *If modern modal logic was conceived in sin, then it has been redeemed through Gödliness.*]

Trzeba już schodzić. . .



„Góry i Matematyka uczą pokory.” — Kazimierz Głazek.

# Koniec

Prezentacja nie rości sobie pretensji do kompletności:

- ani jako przedstawienie wszystkich treści *Forever Undecided*,
- ani jako wprowadzenie do logiki dowodliwości.

Staraliśmy się jedynie pokazać próbkę możliwości popularyzacji wiedzy o logice modalnej i jej zastosowaniach.

Zachęcamy do lektury książki!

Czy wiesz, jak wysoko byłeś?



Dziękuję za uwagę.