MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

ZALICZENIE WYKŁADU: 10.II.2021

KOGNITYWISTYKA UAM, 2020–2021

Imię i nazwisko:................ MRÓWECZKA KRESECZKA

1. [3 punkty] Wyznacz elementy minimalne, maksymalne, największy i najmniejszy w zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ o nieparzystej liczbie elementów uporządkowanym częściowo przez relację inkluzji zwykłej.

2. [4 punkty] (a) Co to znaczy, że relacja R na zbiorze X jest spójna? (b) Podaj przykład relacji, która ma tę własność i relacji, która jej nie ma. (c) Rozstrzygnij czy relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \llcorner y \lrcorner$ ma tę własność ($\llcorner\ \lrcorner$ jest funkcją podłogi).

3. [4 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów: $C - (A' \cup B') = (C - A') \cup (C - B')$. Tu X' oznacza dopełnienie X.

4. [4 punkty] Wyznacz pochodną funkcji: $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{2x}}$.

5. [5 punktów] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i przeprowadź dowód:

1. Udowodnij, że zbiór wszystkich jednoelementowych podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych jest nieskończony w sensie Dedekinda.

2. Udowodnij przez indukcję matematyczną, że:
   $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$.

Liczba punktów	Ocena
< 11	2
11–12	3
13–14	3+
15–16	4
17–18	4+
19–20	5

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

ROZWIĄZANIA

MRÓWECZKA KRESECZKA

1. Zbiór $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ ma pięć elementów. Pytamy o jego podzbiory o nieparzystej liczbie elementów. Takimi zbiorami są: cały zbiór $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$, podzbiory trójelementowe oraz podzbiory jednoelementowe. Ponieważ wszystkie brane tu pod uwagę podzbiory zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ są w nim zawarte, więc cały zbiór $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ jest elementem największym względem inkluzji wśród wszystkich podzbiorów o nieparzystej liczbie elementów. W konsekwencji, jest on też jedynym elementem maksymalnym. Jednoelementowe podzbiory zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ są w tym przypadku elementami minimalnymi względem inkluzji w rozważanym zbiorze podzbiorów o nieparzystej liczbie elementów. Są to zbiory: $\{\clubsuit\}$, $\{\diamondsuit\}$, $\{\heartsuit\}$, $\{\spadesuit\}$, $\{\maltese\}$.

Ponieważ w rozważanym przypadku mamy więcej niż jeden element minimalny względem inkluzji, więc wśród podzbiorów zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ o nieparzystej liczbie elementów nie ma elementu najmniejszego względem inkluzji.

Trójelementowe podzbiory rozważanego zbioru nie są ani elementami maksymalnymi (bo każdy z nich jest zawarty w całym zbiorze $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$), nie są też elementami minimalnymi (ponieważ każdy zbiór trójelementowy zawiera któryś z wyżej wymienionych zbiorów jednoelementowych). Zbiorów trójelementowych jest tutaj $\binom{5}{3} = 10$. Wszystkich podzbiorów zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \maltese\}$ o nieparzystej liczbie elementów jest razem $1 + 5 + 10 = 16$, natomiast wszystkich podzbiorów tego zbioru jest $2^5 = 32$.

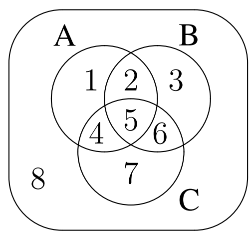
2. (a) Relacja R na zbiorze X jest spójna, gdy dla wszystkich $x \in X$ i $y \in X$: jeśli $x \neq y$, to xRy lub yRx.

(b) Relacje $<$ i $\leqslant$ są spójne w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ zachodzi prawo trychotomii: dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y: $x = y$ lub $x < y$ lub $y < x$. Nie jest spójna np. relacja inkluzji w rodzinie wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru o co najmniej dwóch elementach, bo dla zbiorów jednoelementowych $\{a\}$ i $\{b\}$ nie zachodzi ani $\{a\} \subseteq \{b\}$ ani $\{b\} \subseteq \{a\}$, o ile $a \neq b$.

(c) Relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \llcorner y \lrcorner$ nie jest spójna, ponieważ istnieją $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$ takie, że $x \neq y$, ale nie zachodzi ani $x = \llcorner y \lrcorner$ ani $y = \llcorner x \lrcorner$. Dla przykładu, $1 \neq 2$, nieprawda, że $1 = \llcorner 2 \lrcorner$ i nieprawda, że $2 = \llcorner 1 \lrcorner$.

3. Znalezienie kontrprzykładu dla równości $C - (A' \cup B') = (C - A') \cup (C - B')$ polega na podaniu takich zbiorów A, B i C, że wynik operacji po lewej stronie tej równości nie będzie tożsamy z wynikiem operacji po prawej stronie.

Można narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości. Jeśli wynik wykonanych operacji po lewej stronie nie będzie tożsamy z wynikiem operacji wykonanych po prawej stronie, to podane zbiory stanowią kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po lewej stronie równości:
$A' = \{3, 6, 7, 8\}$
$B' = \{1, 4, 7, 8\}$
$A' \cup B' = \{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$
$C - (A' \cup B') = \{5\}$
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po prawej stronie równości:
$A' = \{3, 6, 7, 8\}$
$B' = \{1, 4, 7, 8\}$
$C - A' = \{4, 5\}$
$C - B' = \{5, 6\}$
$(C - A') \cup (C - B') = \{4, 5, 6\}$
Widzimy zatem, że:
$C - (A' \cup B') = \{5\} \neq \{4, 5, 6\} = (C - A') \cup (C - B')$.

Podane zbiory A, B i C stanowią zatem kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.

4. Obliczając pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{2x}}$ korzystamy ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji oraz wzoru na pochodną funkcji złożonej (ponieważ $e^{\sqrt{2x}}$ jest funkcją złożoną):

$$(\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{2x}})' = (\sqrt{x})' \cdot e^{\sqrt{2x}} + \sqrt{x} \cdot (e^{\sqrt{2x}})' =$$
$$\tfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{2x}} + \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{2x}} \cdot \tfrac{1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{2x}} =$$
$$e^{\sqrt{2x}} \cdot (\tfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}} + \tfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}) =$$
$$e^{\sqrt{2x}} \cdot (\tfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}) =$$
$$e^{\sqrt{2x}} \cdot \tfrac{\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}} =$$
$$e^{\sqrt{2x}} \cdot \tfrac{1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}} =$$
$$e^{\sqrt{2x}} \cdot \tfrac{1+\sqrt{2x}}{2\cdot\sqrt{x}}.$$

5.1. Zbiór wszystkich jednoelementowych podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych to zbiór: $\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Określamy funkcję f o dziedzinie będącej tym właśnie zbiorem przez warunek: $f(\{n\}) = \{2 \cdot n\}$. Wtedy wszystkie wartości tej funkcji tworzą właściwy podzbiór jej dziedziny, ponieważ np. $\{3\}$ nie jest wartością funkcji f. Ponadto, funkcja f jest bijekcją, ponieważ każdemu zbiorowi $\{n\}$ odpowiada dokładnie jeden zbiór $\{2 \cdot n\}$. Pokazaliśmy więc, że zbiór $\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$ jest równoliczny ze zbiorem $\{\{2 \cdot n\} : n \in \mathbb{N}\}$, który jest właściwym podzbiorem zbioru $\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Zbiór $\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$ jest zatem zbiorem nieskończonym w sensie Dedekinda.

5.2. Dowód indukcyjny tego, że: $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n = 2+(n-1)\cdot 2^{n+1}$ przebiega następująco.

Krok początkowy. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest 1. Dla $k = 1$ lewa strona rozważanej równości ma wartość $1 \cdot 2^1 = 2$, a prawa jest równa: $2 + (1 - 1) \cdot 2^{1+1} = 2 + 0 \cdot 4 = 2$, a zatem równość zachodzi dla $k = 1$.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne dla $k \geqslant 1$: $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + k \cdot 2^k = 2 + (k-1) \cdot 2^{k+1}$. Mamy udowodnić, że przy tym założeniu zachodzi: $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+k\cdot 2^k+(k+1)\cdot 2^{k+1} = 2+k\cdot 2^{k+2}$. Rozważmy lewą stronę tej równości. Na mocy założenia indukcyjnego: $(1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+k\cdot 2^k)+(k+1)\cdot 2^{k+1} = 2+(k-1)\cdot 2^{k+1}+(k+1)\cdot 2^{k+1}$. Obliczamy: $2+(k-1)\cdot 2^{k+1}+(k+1)\cdot 2^{k+1} = 2+2^{k+1}\cdot(k-1+k+1) = 2+2\cdot k\cdot 2^{k+1} = 2+k\cdot 2^{k+2}$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + k \cdot 2^k = 2 + (k-1) \cdot 2^{k+1}$, to $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + k \cdot 2^k + (k+1) \cdot 2^{k+1} = 2 + k \cdot 2^{k+2}$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważana nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.