MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

ZALICZENIE POPRAWKOWE WYKŁADU: 7.II.2019

KOGNITYWISTYKA UAM, 2018–2019

Imię i nazwisko: .... ŁOWCY BYKA KRETEŃSKIEGO

1. [2 punkty] Relacja równoważności. Definicja i przykład.

2. [2 punkty] Relacja częściowego porządku. Definicja i przykład.

3. [3 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów (tutaj $X - Y$ to różnica zbiorów X oraz Y, $X \cap Y$ to iloczyn zbiorów X oraz Y, zaś X' to dopełnienie zbioru X):

$$(A - B) - (B - A) = C \cap C'$$

4. [3 punkty] Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

5. [5 punktów] Udowodnij przez indukcję matematyczną NIERÓWNOŚĆ BERNOULLIEGO: jeśli $d > -1$, to dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$

$$(1 + d)^n \geqslant 1 + n \cdot d$$

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

ROZWIĄZANIA

ŁOWCY BYKA KRETEŃSKIEGO

1. Mówimy, że relacja R w zbiorze X jest relacją równoważności w X, gdy jest ona w tym zbiorze:

1. zwrotna: dla wszystkich $x \in X$ zachodzi xRx
2. symetryczna: dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$, jeśli xRy, to yRx
3. przechodnia: dla wszystkich $x \in X$, $y \in X$ oraz $z \in X$, jeśli xRy oraz yRz, to xRz.

Przykłady: relacja identyczności, relacja kongruencji modulo ustalona liczba pierwsza, relacja równoległości prostych na płaszczyźnie, relacja przystawania figur geometrycznych, relacje kongruencji w algebrach, relacja izomorfizmu struktur relacyjnych.

2. Mówimy, że relacja R w zbiorze X jest relacją częściowego porządku w X, gdy jest ona w tym zbiorze:

1. zwrotna: dla wszystkich $x \in X$ zachodzi xRx
2. przechodnia: dla wszystkich $x \in X$, $y \in X$ oraz $z \in X$, jeśli xRy oraz yRz, to xRz
3. antysymetryczna: dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$, jeśli xRy oraz yRx, to $x = y$.

Przykłady: relacja inkluzji $\subseteq$, relacja $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$, relacja podzielności w zbiorze $\mathbb{Z}$. Każdy porządek liniowy (czyli spójny porządek częściowy) jest oczywiście porządkiem częściowym. Uniwersum każdej kraty (a więc także każdej algebry Boole'a) jest zbiorem częściowo uporządkowanym. Dodajmy, że przez *ostry* porządek częściowy rozumiemy relację, która jest przeciwzwrotna i przechodnia (a w konsekwencji także asymetryczna, jak pokazano na wykładzie).

3. Prawa strona rozważanej równości jest zbiorem pustym, ponieważ $C \cap C' = \emptyset$ dla dowolnego zbioru C. Aby pokazać, że równość ta nie jest prawem rachunku zbiorów wystarczy zatem znaleźć takie zbiory A i B, że lewa strona równości jest niepusta. Na mocy definicji rozważanych operacji oraz praw rachunku zbiorów (podanych na wykładzie) mamy:

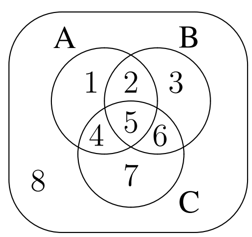
$$(A-B)-(B-A) = (A\cap B')\cap(B\cap A)' = (A\cap B')\cap(B'\cup(A')') =$$

$$(A\cap B')\cap(B'\cup A) = (A\cap B'\cap B')\cup(A\cap B'\cap A) = (A\cap B')\cup(A\cap B') =$$

$$A\cap B' = A-B.$$

Tak więc, szukanego kontrprzykładu dostarczają dowolne zbiory A, B oraz C takie, iż $A-B\neq\emptyset$, zaś C może być jakimkolwiek zbiorem.

Można też narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości.



W oznaczeniach tego rysunku mamy:
$C=\{4,5,6,7\}$
$C'=\{1,2,3,8\}$
$C\cap C'=\emptyset$
$A=\{1,2,4,5\}$
$B=\{2,3,5,6\}$
$A-B=\{1,4\}$
$B-A=\{3,6\}$
$(A-B)-(B-A)=\{1,4\}=A-B.$

Widać zatem, że $(A-B)-(B-A)\neq C\cap C'$, czyli rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.

4. Pochodną funkcji $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ obliczamy stosując wzór na pochodną ilorazu. Należy przy tym pamiętać, że w liczniku mamy funkcję złożoną (pierwiastek z wielomianu) i zastosować w stosownym miejscu wzór na pochodną funkcji złożonej. Mamy:

$$f(x)' = (\frac{\sqrt{x^2-1}}{x})' = \frac{(\sqrt{x^2-1})' \cdot x - (\sqrt{x^2-1}) \cdot x'}{x^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}} \cdot (x^2-1)' \cdot x - \sqrt{x^2-1} \cdot 1}{x^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}} \cdot 2 \cdot x \cdot x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}}{x^2} =$$

$$\frac{\frac{x^2-(\sqrt{x^2-1})^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2} = \frac{x^2-x^2+1}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}$$

5. DOWÓD. Widać, że nierówność ta zachodzi dla pierwszej liczby z rozważanego zakresu, czyli dla 1:

$$(1+d)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot d.$$

Przypuśćmy, że nierówność zachodzi dla liczby k (założenie indukcyjne):

$$(1+d)^k \geqslant 1 + k \cdot d.$$

Trzeba pokazać, że nierówność zachodzi też dla liczby $k+1$, czyli że zachodzi:

$$(1+d)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1) \cdot d.$$

Mamy:

$$(1+d)^{k+1} = (1+d)^k \cdot (1+d).$$

Na mocy założenia indukcyjnego, $(1+d)^k \geqslant 1 + k \cdot d$, a zatem

$$(1+d)^{k+1} \geqslant (1 + k \cdot d) \cdot (1+d).$$

Ponieważ $(1+k\cdot d)\cdot(1+d) = 1 + d + k \cdot d + k \cdot d^2 = 1 + (k+1)\cdot d + k \cdot d^2$, a $k \cdot d^2 \geqslant 0$, więc

$$(1+d)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1) \cdot d.$$

Wykazaliśmy zatem, że jeśli rozważana nierówność zachodzi dla k, to zachodzi także dla $k+1$. Na mocy zasady indukcji matematycznej, rozważana nierówność zachodzi dla każdej dodatniej liczby naturalnej.