Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Granica, ciągłość, pochodna

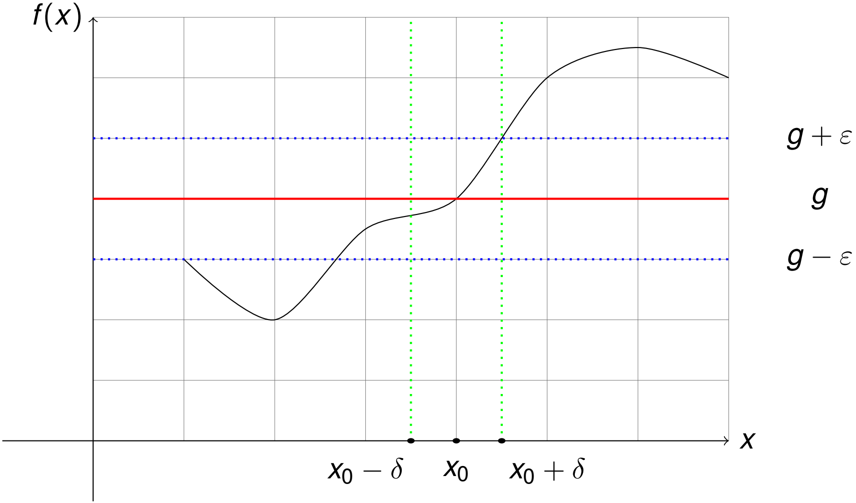
- Niniejsza prezentacja stanowi brutalny skrót prezentacji: *Granice i ciągłość* oraz *Struktury różniczkowe: pochodna funkcji*.
- Zachęcamy słuchaczy ich samodzielnej lektury, a także przypomnienia sobie wiadomości o przestrzeniach metrycznych z prezentacji *Struktury topologiczne*.
- Na stronie wykładu dostępne są też rozdziały podręcznika, omawiające te tematy.

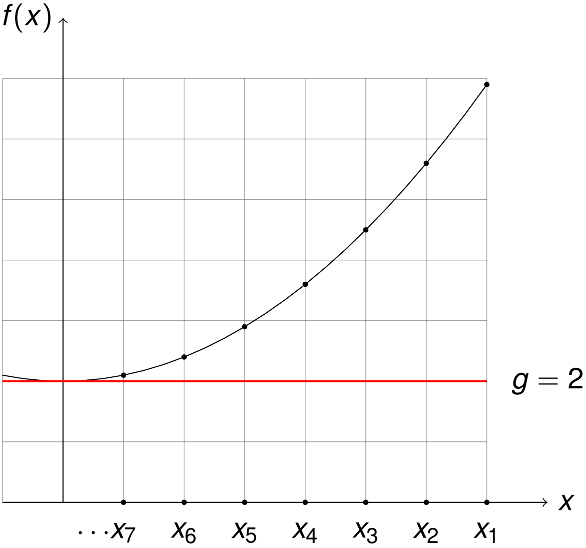
- Omawiane dziś pojęcia dotyczą *lokalnych* własności funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
- Ich charakterystyka wykorzystuje struktury: algebraiczną, porządkową i topologiczną, określone dla liczb rzeczywistych.

- **Definicja granicy funkcji w punkcie (Cauchy).** Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < a \text{ dla pewnej } a > 0\}$. Mówimy, że liczba g jest *granicą funkcji f w punkcie x_0*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że: jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. W takim przypadku piszemy: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$.

  Czasem używa się też zapisu: $f(x) \to g$ dla $x \to x_0$.
- **Definicja granicy funkcji w punkcie (Heine).** Liczbę g nazywamy *granicą funkcji f w punkcie x_0*, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \neq x_0$ dla wszystkich $n \geqslant 1$: jeśli $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, to $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$.

- **Twierdzenie.** *Załóżmy, że funkcja f jest określona dla wszystkich x takich, iż $0 < |x - x_0| < a$ dla pewnej liczby $a > 0$. Istnienie granicy funkcji f w punkcie x_0 w sensie definicji Cauchy'ego jest równoważne istnieniu granicy funkcji f w punkcie x_0 w sensie definicji Heinego.*


$f(x)$
$g + \varepsilon$
g
$g - \varepsilon$
x
$x_0 - \delta$
x_0
$x_0 + \delta$



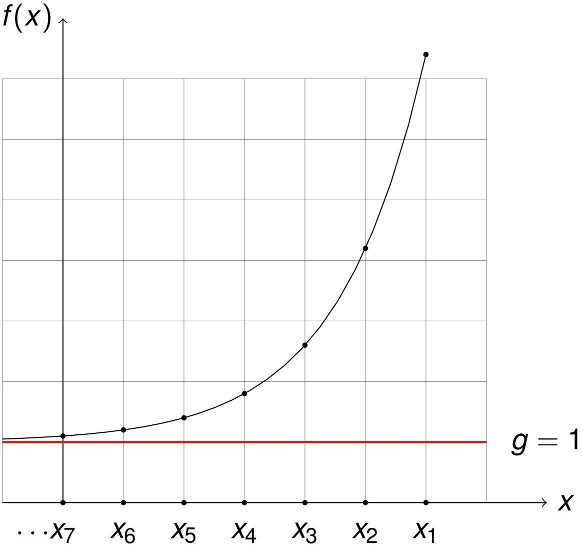
$$f(x) = 2 + \frac{1}{10} \cdot x^2, \lim_{x \to 0} f(x) = 2$$

Pokażemy, że funkcja $f(x) = x^2$ ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę równą 0. Weźmy bowiem dowolny ciąg liczb rzeczywistych (x_n) dążący do zera, czyli taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Mamy wtedy:
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^2 = 0^2 = 0.$

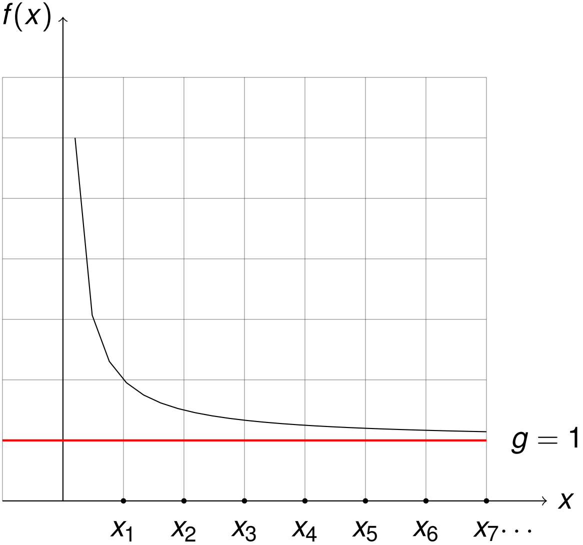
Pokażemy, że funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ (zdefiniowana dla $x \neq 0$) nie ma granicy w w punkcie $x_0 = 0$. Wystarczy w tym celu znaleźć dwa ciągi (x_n) oraz (y_n), oba zbieżne do 0 takie, że ciągi wartości $(f(x_n))$ oraz $(f(y_n))$ są zbieżne do różnych granic. Niech: $x_n = \frac{1}{n\cdot\pi}$ oraz $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\cdot n\cdot\pi}$. Wtedy oczywiście: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Mamy jednak:
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\cdot\pi) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\cdot n\cdot\pi) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$
Tak więc, nie istnieje granica funkcji $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ w w punkcie $x_0 = 0$.

- Niech f będzie określona dla $x \in [a, \infty)$ dla pewnego $a > 0$. Mówimy, że *liczba g jest granicą funkcji f przy x dążącym do* ∞, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $M > a$ taka, że: jeśli $x > M$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Piszemy wtedy: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$.
- Niech f będzie określona dla $x \in (-\infty, a]$ dla pewnego $a > 0$. Mówimy, że *liczba g jest granicą funkcji f przy x dążącym do* $-\infty$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $M > 0$ taka, że: jeśli $x < -M$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Piszemy wtedy: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$.

- Mówimy, że *funkcja f ma granicę* $+\infty$ *przy x dążącym do* $+\infty$, gdy f jest określona w pewnym przedziale $[a, +\infty)$ oraz gdy dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba $A > a$ taka, że: jeśli $x > A$, to $f(x) > M$. Podobnie dla pozostałych przypadków granic niewłaściwych funkcji przy x dążącym do $+\infty$ lub $-\infty$.



$$f(x) = 1 + \frac{1}{10} \cdot 2^x, \lim_{x \to -\infty} = 1$$



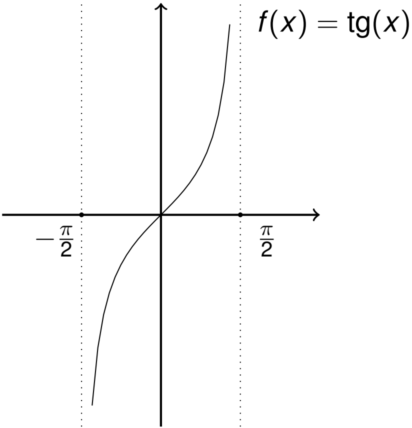
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

Przykłady

- Pokażemy, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę niewłaściwą $+\infty$.
- Pokażemy zatem, że dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $|x - 0| < \delta$, to $\frac{1}{x^2} > M$.
- Niech $M > 0$. Liczba $\delta > 0$ ma być taka, że $|x| < \delta$, czyli $\frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta}$, a w konsekwencji $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2}$.
- Jeśli przyjmiemy $\frac{1}{\delta^2} = M$, czyli $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, to $\delta > 0$ oraz zachodzi $\frac{1}{x^2} > M$.
- To oznacza, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Przykłady

- Pokażemy jeszcze raz, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę niewłaściwą $+\infty$, tym razem korzystając ze stylizacji Heinego.
- Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od 0 takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
- Ponieważ mamy wtedy $(x_n)^2 \neq 0$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$, więc: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2} = \infty$.
- Otrzymujemy ostatecznie, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.



Funkcja $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ rozważana w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ma granice niewłaściwe w $-\frac{\pi}{2}$ oraz $\frac{\pi}{2}$.

- Funkcja ma w danym punkcie co najwyżej jedną granicę.
- Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 granicę, to f jest ograniczona w zbiorze $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) - \{x_0\}$ dla pewnej liczby $\delta_0 > 0$.
- Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że $f(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich x spełniających nierówności $0 < |x - x_0| < a$, to $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
- Jeśli funkcje f i g mają tę samą granicę γ w punkcie x_0 oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich x spełniających nierówności $0 < |x - x_0| < a$, to również funkcja h ma w punkcie x_0 granicę γ.

- Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to funkcje $f+g$, $f-g$ oraz $f \cdot g$ także mają granice w tym punkcie i zachodzą równości:
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
- Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g, to dla dowolnej liczby rzeczywistej c, funkcja $c \cdot f$ ma w punkcie x_0 granicę $c \cdot g$.

- Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że funkcja g jest ograniczona w zbiorze wszystkich x spełniających nierówności $0 < |x - x_0| < a$, to $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.
- Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 granicę różną od zera, to funkcja $\frac{1}{f}$ również ma w punkcie x_0 granicę i zachodzi równość: $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} f(x)}$.
- Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 oraz $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ również ma w punkcie x_0 granicę i zachodzi równość: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$.

- Niech f będzie określona w pewnym przedziale $(x_0, x_0 + a)$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że *funkcja f ma w punkcie x_0 granicę prawostronną równą g*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że: jeśli $0 < x - x_0 < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Stosujemy wtedy zapis: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$.
- Niech f będzie określona w pewnym przedziale $(x_0 - a, x_0)$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że *funkcja f ma w punkcie x_0 granicę lewostronną równą g*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że: jeśli $0 < x_0 - x < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Stosujemy wtedy zapis: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$.

- Niech funkcja f będzie określona warunkami:
  1. $f(x) = x$ dla $x \leqslant 0$
  2. $f(x) = x^2 + 1$ dla $x > 0$.
- Zbadamy, czy funkcja ta ma granicę w punkcie $x_0 = 0$.

- *Granica lewostronna funkcji w* $x_0 = 0$. Dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że $x_n < 0$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = 0$ mamy: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Tak więc, mamy: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
- *Granica prawostronna funkcji w* $x_0 = 0$. Dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że $x_n > 0$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = 0$ mamy: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1$. Tak więc, mamy: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Widzimy, że granica lewostronna funkcji w punkcie $x_0 = 0$ jest różna od granicy prawostronnej funkcji w tym punkcie, a więc granica funkcji nie istnieje w punkcie $x_0 = 0$.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - a, x_0 + a)$ punktu x_0, gdzie $a > 0$. Mówimy, że *funkcja f jest ciągła w punkcie x_0*, gdy istnieje jej granica w tym punkcie i jest ona równa jej wartości w tym punkcie, czyli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Twierdzenie. *Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - a, x_0 + a)$ punktu x_0, gdzie $a > 0$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z wzajemnie równoważnych następujących warunków:*

1. **Ciągłość w sensie Cauchy'ego**. *Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że: jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*
2. **Ciągłość w sensie Heinego**. *Dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(x_0)$.*

Przykłady

- W każdym punkcie ciągłe są funkcje: potęgowa, wielomianowa, wykładnicza, sinus, cosinus.
- Ciągłe w tych punktach, w których są określone są funkcje: wymierna, logarytmiczna, tangens, cotangens.

- Funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie jest w nim określona. Jeśli jednak przyjmiemy, że $f(0) = 1$, to tak uzupełniona funkcja jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. Dowodzi się, że: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie ma w tym punkcie granicy.

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona i osiąga w tym przedziale swoje kresy.

Niech funkcja f będzie określona w niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$. Mówimy, że f *jest jednostajnie ciągła w zbiorze* X, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich $x, y \in X$: jeśli $|x - y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Zauważmy, że liczba δ jest *wspólnym* ograniczeniem rozważanych odległości między punktami, a więc nie jest wybierana dla każdego z tych punktów z osobna.

- Zauważmy, że np. funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału otwartego $(0, 1)$, ale nie jest w tym przedziale jednostajnie ciągła. Dla dowolnej $\delta > 0$ można bowiem wybrać w tym przedziale punkty x_1 oraz x_2 w taki sposób, że liczba $|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}|$ jest dowolnie duża.
- Funkcja jednostajnie ciągła w zbiorze X jest ciągła w tym zbiorze (ale niekoniecznie na odwrót).
- Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.

Warto pamiętać, że oczywistość (np. odwołanie się do rysunku) nie stanowi wystarczającego uzasadnienia twierdzeń na temat granicy i ciągłości funkcji.
Stwierdzenie, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona istotnie wymaga *dowodu*, nie wystarcza tu odwołanie się np. do *rysunku*. Podobnie rzecz ma się z następującą ważną własnością, charakteryzującą funkcje ciągłe:

Twierdzenie Darboux. *Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale I (niekoniecznie domkniętym) oraz że w punktach $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 < x_2$ przyjmuje różne wartości $y_1 = f(x_1)$ oraz $y_2 = f(x_2)$. Wtedy w przedziale domkniętym $[x_1, x_2]$ funkcja f przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między y_1 oraz y_2, czyli dla każdego y_0 zawartego między y_1 oraz y_2 istnieje $x_0 \in [x_1, x_2]$ taki, że $y_0 = f(x_0)$.*

Iloraz różnicowy

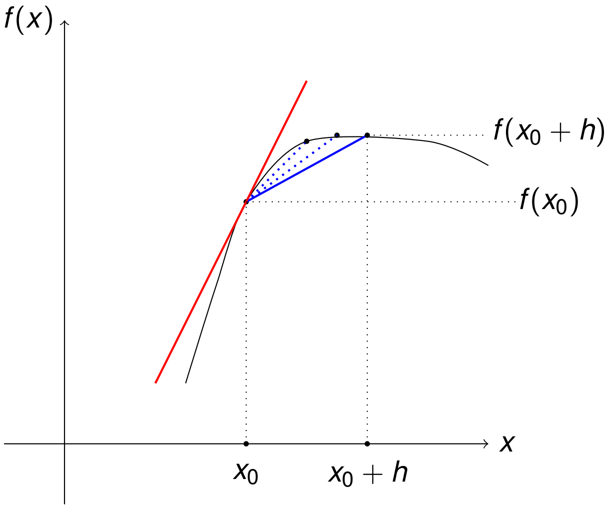
- Załóżmy, że funkcja f o wartościach rzeczywistych jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, czyli w pewnym przedziale otwartym $(x_0 - a, x_0 + a)$, gdzie $a > 0$. Niech $0 < |h| < a$.
- *Ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu h zmiennej niezależnej nazywamy liczbę: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Powszechnie używa się też następujących oznaczeń oraz terminologii dla funkcji $y = f(x)$:

1. Liczbę h, czyli przyrost zmiennej niezależnej oznacza się przez $\triangle x$.
2. Liczbę $f(x_0 + h) - f(x_0)$, czyli przyrost zmiennej zależnej oznacza się przez $\triangle y$.
3. Przy tych oznaczeniach: $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$.

Pochodna funkcji w punkcie

- Iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu h ma prostą interpretację geometryczną: jest równy tangensowi nachylenia siecznej do krzywej $y = f(x)$ w punktach $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.
- Jeśli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz istnieje granica ilorazu różnicowego: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, to tę granicę nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie* x_0 i oznaczamy przez $f'(x_0)$.
- Jeżeli istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0, to mówimy, że f jest *różniczkowalna* w punkcie x_0.
- Dla pochodnej funkcji $y = f(x)$ używa się także następujących oznaczeń: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, przy czym symbole te należy traktować jako całości, a nie jako iloraz (dwóch „nieskończenie małych” wielkości).



$f(x)$
$f(x_0 + h)$
$f(x_0)$
x
x_0
$x_0 + h$

Interpretacja geometryczna

- Iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu h jest równy tangensowi kąta nachylenia siecznej do krzywej $y = f(x)$ w punktach $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Gdy h dąży do 0, to punkt $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ przybliża się do punktu $(x_0, f(x_0))$. Tak więc, w tym przypadku „graniczna sieczna" jest styczną do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$.
- Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to *styczną do krzywej* $y = f(x)$ *w punkcie* $(x_0, f(x_0))$ jest prosta o współczynniku kierunkowym $f'(x_0)$, przechodząca przez punkt $(x_0, f(x_0))$.
- Równaniem stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ (różniczkowalnej w punkcie x_0) jest: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.
- Równaniem *normalnej do krzywej* $y = f(x)$ *w punkcie* $(x_0, f(x_0))$ jest (przy założeniu, że $0 \neq |f'(x_0)| < \infty$):
  $y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Interpretacja mechaniczna

- Wyobraźmy sobie punkt poruszający się po osi liczbowej $\mathbb{R}$ w ten sposób, że w chwili t jego położenie określa funkcja $x(t)$. Rozważymy dwa przypadki.
- *Położenie jest liniową funkcją czasu*: $x(t) = v \cdot t + w$.

- Wtedy przyrostowi czasu $h = \triangle t$ odpowiada przyrost drogi: $\triangle x = x(t + t_0) - x(t_0) = v \cdot (t + t_0) + w - v \cdot t_0 - w = v \cdot h$.
- Stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu jest wtedy równy: $\frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{x(t+t_0)-x(t_0)}{h} = \frac{v \cdot h}{h} = v$, czyli jest wielkością stałą.
- Wtedy stosunek ten nazywamy *prędkością ruchu punktu*.

Interpretacja mechaniczna

- *Położenie jest dowolną funkcją czasu*. Przypuśćmy z kolei, że $x(t)$ jest całkiem dowolną funkcją czasu. Nie ma wtedy żadnego powodu, aby iloraz różnicowy $\frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$ funkcji $x(t)$ w punkcie t_0 dla przyrostu h był wielkością stałą, albowiem może on istotnie zależeć od przyrostu $\triangle t = h$. Wartość tego ilorazu nazywamy *średnią prędkością* w punkcie (chwili) t_0 dla przyrostu $\triangle t$.
- Rozważenie możliwości przejścia do granicy średniej prędkości przy przyroście $\triangle t$ dążącym do zera (przy założeniu, że granica ta istnieje) było jednym z przełomowych momentów w fizyce. Granica ta (o ile istnieje) zależy tylko od t_0 i jest równa pochodnej funkcji x (zależnej od czasu t) w punkcie t_0.
- Nazywamy ją *prędkością chwilową* w chwili t_0 i zwykle oznaczamy przez $v(t_0)$. Mamy zatem: $v(t_0) = x'(t_0) = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t}$.

- *Funkcja* $f(x) = x^n$. Pokażemy, że $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$ dla wszystkich $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz $n \geqslant 1$.

  $(x_0 + h)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k} =$

  $\binom{n}{0} x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n$

  $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}h + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n}h^n - x_0^n}{h} =$

  $= \frac{1}{h} \cdot (\binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n) =$

  $= \binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}$

  $\lim\limits_{h \to 0} (\binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}) = \binom{n}{1} x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1}$.

- *Funkcja* $f(x) = \sqrt{x}$. Niech $x_0 > 0$. Pokażemy, że $f'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}$.
- $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \frac{(x_0+h)-x_0}{h \cdot (\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$
- $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}$.

- *Funkcja* $f(x) = \sin x$. Pokażemy, że $f'(x_0) = \cos x_0$. Zakładamy, że podczas ćwiczeń słuchacze ustalili, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{2 \cdot \sin \frac{x_0+h-x_0}{2} \cdot \cos \frac{x_0+h+x_0}{2}}{h} =$ $\frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \cdot \cos(x_0 + \frac{1}{2}h)$, a więc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \cdot \cos(x_0 + \frac{1}{2}h) = 1 \cdot \lim\limits_{h \to 0} \cos(x_0 + \frac{1}{2}h) = \cos x_0$.

- *Funkcja* $f(x) = \cos x$. Pokażemy, że $f'(x_0) = -\sin x_0$.
- $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} =$ $\frac{1}{h} \cdot (-2) \cdot \sin \frac{x_0+h+x_0}{2} \cdot \sin \frac{x_0+h-x_0}{2} =$ $= \frac{1}{h} \cdot (-2) \cdot \sin \frac{2x_0+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2} =$ $= -\sin(x_0 + \frac{h}{2}) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$, a zatem $\lim\limits_{h \to}(-\sin(x_0 + \frac{h}{2}) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}) = -\lim\limits_{h \to 0} \sin(x_0 + \frac{h}{2}) \cdot 1 = -\sin x_0$.

- Niech $f(x) = |x|$. Pokażemy, że nie istnieje $f'(0)$.
- Gdy $x_0 < 0$, to $f'(x_0) = -1$, ponieważ:
  $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-(x_0+h)+x_0}{h} = -1$
- Gdy $x_0 > 0$, to $f'(x_0) = 1$, ponieważ:
  $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x_0+h)-x_0}{h} = 1$

1. Dla $x_0 = 0$ mamy:
2. $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$
3. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$

Ponieważ granice: lewostronna i prawostronna ilorazu różnicowego w punkcie $x_0 = 0$ są różne, więc nie istnieje granica tego ilorazu przy $h \to 0$, czyli nie istnieje $f'(0)$.

- Załóżmy, że funkcje f i g są określone w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz że są różniczkowalne w tym punkcie. Wtedy różniczkowalne w tym punkcie są również funkcje: $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$ (dla $c \in \mathbb{R}$). Zachodzą wzory:
  $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$, $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.
- Ponadto, jeśli $g'(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ również jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz: $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$. W szczególności, przy tych założeniach: $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.
- Załóżmy, że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x_0, natomiast funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $u_0 = g(x_0)$. Wtedy funkcja złożona $f \circ g$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz zachodzi: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$. Jeśli $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, to f nazywamy funkcją *zewnętrzną* złożenia $f \circ g$, zaś g funkcją *wewnętrzną* tego złożenia. Jeśli stosujemy zapis: $y = f(u)$, $u = g(x)$, to w notacji Leibniza piszemy: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

- *Przykład: pochodna funkcji złożonej*. Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$ w punkcie $x_0 = 1$.
- Funkcja f jest złożeniem funkcji $g(x) = \sqrt{x}$ oraz $h(x) = x^4 + 1$: $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^4 + 1) = \sqrt{x^4 + 1}$. Mamy:
- $g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ oraz $h'(x) = 4 \cdot x^3$. Tak więc:
  $f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{h(x)}} \cdot 4 \cdot x^3 = \frac{2 \cdot x^3}{\sqrt{x^4+1}}$.
- Dla $x_0 = 1$ mamy: $f'(1) = \frac{2 \cdot 1^3}{\sqrt{1^4+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

- *Przykład: pochodna ilorazu*. Wiemy już, że $(\sin x)' = \cos x$ oraz $(\cos x)' = -\sin x$. Mamy ponadto:
  1. Dla $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$: $(\operatorname{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
  2. Dla $x \neq n \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$: $(\operatorname{ctg} x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

- *Przykład: pochodna funkcji wykładniczej*. Funkcja wykładnicza jest ciągła w każdym punkcie. Dowodzi się, że $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ oraz że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ dla $a > 0$.
- Niech $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$. Wtedy $f'(x_0) = a^{x_0} \cdot \ln a$, ponieważ: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = a^{x_0} \cdot \ln a$.

- Załóżmy, że f jest ciągła i monotoniczna w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz różniczkowalna w x_0. Niech ponadto $f'(x_0) \neq 0$. Wtedy funkcja f^{-1} odwrotna do funkcji f również jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ oraz zachodzi: $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
- *Przykład*. Niech $f(x) = \log_a x$, gdzie $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Ponieważ funkcja logarytmiczna $\log_a x$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej a^x, więc: $(\log_a x)' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$. W szczególności: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Zalecamy słuchaczom zapamiętanie poniższych wzorów:

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\frac{1}{x^n})' = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{ctg}\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Jeśli $f(x) = a$, to $f'(x) = 0$

Ze względu na usługowy jedynie charakter tego kursu, nie podajemy wyprowadzeń dalszych wzorów na pochodne często używanych funkcji. Zainteresowani słuchacze mogą poszukać ich w literaturze zalecanej w sylabusie lub mogą zmierzyć się z samodzielnym ich wyprowadzeniem.

- Załóżmy, że funkcja f jest określona i różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0. Jeżeli jej pochodna f' ma pochodną w punkcie x_0, to tę pochodną nazywa się *drugą pochodną* (*pochodną drugiego rzędu*) funkcji f w punkcie x_0 i oznacza przez $f''(x_0)$. Inne oznaczenie to: $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$.
- Przyjmując, że pochodna rzędu zerowego funkcji f to sama funkcja f, można – posługując się definiowaniem przez indukcję – określić pochodne n-tego rzędu w sposób następujący:
- Załóżmy, że funkcja f jest określona i ma pochodną $f^{(n-1)}$ rzędu $n-1$ (gdzie $n \geqslant 1$) w pewnym otoczeniu punktu x_0.
- Jeżeli funkcja $f^{(n-1)}$ ma pochodną w punkcie x_0, to nazywamy ją *n-tą pochodną* (*pochodną rzędu n*) funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy przez $f^{(n)}(x_0)$. Inne oznaczenie: $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$.

- *Pochodna wielomianu*. Niech np. $f(x) = 7 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 11$. Mamy wtedy kolejno:
  $f'(x) = 21 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 4$, $f''(x) = 42 \cdot x + 10$
  $f^{(3)}(x) = 42$, $f^{(4)}(x) = 0 = f^{(n)}(x)$ dla wszystkich $n \geqslant 4$.
- *Sinus i cosinus*. Wiemy już, że $(\sin x)' = \cos x$ oraz $(\cos x)' = -\sin x$. Mamy zatem:
  1. $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$
  2. $(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$

Spadek swobodny punktu materialnego pod wpływem przyspieszenia ziemskiego g. Droga przebyta przez ten punkt w czasie t wyraża się wzorem $f(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$. Prędkość spadania (czyli pochodna tej funkcji) wyznaczona jest zatem wzorem $v(t) = f'(t) = g \cdot t$. Zmiana tej prędkości w czasie, czyli *przyspieszenie* jest pochodną prędkości spadania, a więc drugą pochodną drogi przebytej w danym czasie: $a(t) = v'(t) = f''(t)$. Z rachunku wynika, że $a(t) = (g \cdot t)' = g$, czyli to przyspieszenie jest stałe.

Myśl przekornie!

- Czy własność ciągłości ma realność fizyczną?
- Czy istnieją funkcje, które nie mają pochodnej w żadnym punkcie?
- Jaki jest sens fizyczny wyższych pochodnych (np. dla funkcji opisującej zależność przebytej drogi od czasu)? Czy potrafimy zwerbalizować (po polsku, angielsku, japońsku, kaszubsku, itd.) jaki jest sens fizyczny np. siódmej pochodnej funkcji opisującej (jakąś wielce skomplikowaną) zależność przebytej drogi od czasu?
- W jaki sposób określić można pochodne dla funkcji wielu zmiennych?

Co musisz ZZZ

- Granica funkcji w punkcie, definicja Heinego i definicja Cauchy'ego.
- Ciągłość funkcji w punkcie, definicja Heinego i definicja Cauchy'ego.
- Pochodna funkcji w punkcie. Pochodna funkcji.
- Reguły obliczania pochodnych:
  - pochodna funkcji złożonej,
  - pochodna funkcji odwrotnej,
  - pochodna iloczynu i ilorazu funkcji.
- Pochodne wyższych rzędów.