

ZAGADKI

WYKŁAD 8: PRAWDOPODOBIENSTWO

KOGNITYWISTYKA UAM (III, IV, V)

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

Pojęcia: *regularności* oraz *przypadkowości* (*losowości*) są niezwykle trudne do ogólnego zdefiniowania. Czy istnieją procesy, zdarzenia, itp., które są *czysto losowe*, w których nie ma *żadnych* regularności? W szkole obchodzono się z tobą bardzo łagodnie, oswajając cię z najprostszymi sytuacjami, w których szacować trzeba prawdopodobieństwa (jakieś kulki w urnach, rzuty kostką, itp.). Stąd jeszcze bardzo daleko to naprawdę trudnych zagadnień probabilistycznych. Warto w tym miejscu wspomnieć, że obecnie pewne aspekty świata opisywane być *muszą* właśnie w terminach prawdopodobieństwa (mechanika kwantowa).

1 Monty Hall problem

Mam trzy pudełka, dokładnie w jednym z nich jest nagroda, pozostałe są puste. Ja wiem, w którym jest nagroda, ty nie. Chcesz dostać tę nagrodę. Gra odbywa się w dwóch ruchach. W pierwszym masz wybrać pudełko. Gdy to uczynisz, pokazuję ci, że jedno z pozostałych pudełek jest puste. W drugim ruchu masz podjąć decyzję co jest bardziej korzystne w celu uzyskania nagrody:

1. Pozostać przy pierwotnym wyborze.
2. Zmienić swój pierwszy wybór.

Którą z możliwości wybierasz? A może obie gwarantują takie same szanse uzyskania nagrody?

2 Pojedynek w trójkącie

Trzech dżentelmenów: Jones, Brown i Smith umówiło się na pojedynek na pistolety, który miałby odbyć się wedle następujących zasad. Najpierw losuje się kolejność oddawania strzałów, która pozostaje niezmienna do końca pojedynku. Koniec pojedynku to sytuacja, w której żywy pozostaje tylko jeden z uczestników. Uczestnicy zajmują miejsca w wierzchołkach trójkąta równobocznego. W każdej rundzie pojedynku osoba, która ma właśnie strzelać, może wybrać, do kogo będzie strzelała, może też oddać strzał „w powietrze”. Każdy z uczestników wybiera najlepszą dla siebie strategię. Wszyscy z nich wiedzą, że:

1. Smith strzela z całkowitą precyzją
2. Brown strzela z precyzją $\frac{4}{5}$
3. Jones strzela z precyzją $\frac{1}{2}$.

Jakie są szanse wygrania pojedynku dla każdego z nich?

3 Grubość monety

Jak gruba powinna być moneta w kształcie koła o promieniu r , aby prawdopodobieństwo, że upadnie ona po rzucie nią „na sztorc” (czyli nie wypadnie ani orzeł ani reszka) było równe $\frac{1}{3}$?

4 Paradoks nieprzechodnich kostek

Wyobraźmy sobie trzy sześciennie kostki ponumerowane następująco:

1. A : 2, 4, 9 (a na antypodalnej stronie ta sama liczba)
2. B : 1, 6, 8 (a na antypodalnej stronie ta sama liczba)
3. C : 3, 5, 7 (a na antypodalnej stronie ta sama liczba).

Możemy teraz wykorzystać te kostki do gry trzech osób. Każda wybiera jedną z kostek i rzuca nią. Wygrywa osoba, która wyrzuciła największą liczbę oczek. Oblicz prawdopodobieństwa wygranej każdej z osób.

5 Igła Buffona

Upuszczamy igłę o długości l na papier poliniowany prostymi równoległymi odległymi od siebie o d , przy czym $l < d$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła upadnie tak, iż pod nią będzie co najmniej jeden punkt którejś z tych linii?

6 Problem miary

Wybieramy losowo cięciwę okręgu o promieniu długości 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

7 Wybór najlepszej kandydatki

W konkursie na objęcie jakiegoś atrakcyjnego stanowiska bierze udział tysiąc kandydatek. Można oczywiście przepytac je wszystkie i wybrać najlepszą. Czy jednak można znaleźć jakąś w miarę optymalną strategię wyboru – taką, która nie zmuszając do przepytывania *wszystkich* kandydatek pozwoli, z określonym prawdopodobieństwem wybrać najlepszą z nich?

8 Testowanie materiałów

Chcemy zbadać wytrzymałość prętów z dostarczonej partii ich tysiąca. Całkowitą pewność, jaka jest minimalna siła potrzebna do złamania pręta z tej partii możemy uzyskać, jeśli poddamy je wszystkie próbie złamania. Wtedy jednak będziemy mieli tysiąc złamanych prętów, a to nie jest naszym marzeniem. Czy istnieje jakaś optymalna strategia ustalenia (z odpowiednim prawdopodobieństwem) minimalnej siły potrzebnej do złamania pręta z tej partii, przy której zniszczeniu ulega jak najmniejsza liczba prętów?

9 Rosyjska ruletka

Ty i twój przeciwnik zgodzacie się zagrać w rosyjską ruletkę. W rewolwerze jest jedna kula, pięć pozostałych komór jest pustych. Rewolwer jest ustawiany losowo za każdym razem – nie wiadomo, czy oddany z niego strzał jest śmiertelny czy ślepy. Każdy z was strzela do siebie samego, robicie to na przemian, wygrywa ten, który przeżyje. Czy lepiej strzelać jako pierwszy czy jako drugi?

10 Trzy monety

Masz trzy monety: jedna ma po obu stronach orła, druga po obu stronach reszkę, a trzecia jest „normalna” – po jednej stronie ma orła, po drugiej reszkę. Wybierasz losowo jedną z tych monet i rzucasz: wypada orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na drugiej stronie tej monety także jest orzeł?

Rozwiązania zagadek podane zostaną na wykładzie.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl