Kazimierz Trzęsicki

METODOLOGICZNE I TEORIOPOZNAWCZE PRZESŁANKI KLASYCZNEGO PROBLEMU ROZSTRZYGALNOŚCI

Zagadnienie rozstrzygalności swój początek ma w pracach Hilberta. Tu chcemy dać odpowiedź na pytanie o przesłanki metodologiczne i teoriopoznawcze postawienia zagadnienia rozstrzygalności logiki pierwszego rzędu, czyli – jak bywa ono określane – klasycznego problemu rozstrzygalności. Mówiąc najogólniej chodzi o poglądy filozoficzne Hilberta, które doprowadziły go do dostrzeżenia i określenia zagadnienia rozstrzygalności, czyli – jak dziś powszechnie się to nazywa – *Entscheidungsproblem.*

Szukając odpowiedzi na postawione pytanie trzeba sięgnąć do II kongresu matematyków w Paryżu w 1900 r. Hilbert wystąpienie, które miało miejsce 8-ego sierpnia, konsultował z przyjaciółmi a zarazem jednymi z najwybitniejszych matematyków Minkowskim i Hurwitzem. Radzili mu: *Najbardziej pociągająca byłaby próba spojrzenia w przyszłość, innymi słowy, charakterystyka problemów, z którymi matematycy będą mieli do czynienia w przyszłości. Przy tym, jak można sądzić, byliby ludzie mówiący o twoim wystąpieniu nawet dziesiątki lat później.*

Hilbert – jak na to wskazuje wstęp do paryskiego wykładu – charakterystyki problemów, którymi matematycy powinni zająć się w przyszłości dokonał przede wszystkim w oparciu o przesłanki natury metodologicznej i teoriopoznawczej.

Nauka zdaniem Hilberta rozwija się nieprzerwanie. Zaś każdy wiek ma swoje problemy, które w następnej epoce są bądź rozwiązywane, bądź odrzucone jako bezpłodne. Nauka, w tym matematyka, żyje nowymi problemami. Ich brak prowadzi do obumierania lub końca samodzielnego rozwoju[1]. Siła badacza polega na rozwią-

[1] W 1947 r. powtórzył to za Hilbertem burbakista André Weil.

zywaniu problemów, kiedy znajduje on nowe metody, nowe punkty widzenia, odsłania szersze i otwarte horyzonty.

Hilbert stawia pytanie o wyznaczniki dobrego problemu matematycznego. W odpowiedzi wpierw wymienia jasność i zrozumiałość. Ma to miejsce wówczas, gdy problem daje się wyłożyć – jak to obrazowo przedstawia, powołując się na francuskiego matematyka (bez wymienienia go z nazwiska) – pierwszej napotkanej osobie. Taki problem pociąga do rozważań. Drugą cechą dobrego matematycznego problemu jest jego trudność, która też pociąga a jednocześnie problem ten nie może być taki, aby trud nie został wynagrodzony radością znalezionego rozwiązania.

Kolejnym pytaniem stawianym przez Hilberta jest zagadnienie źródła problemów matematycznych. W odpowiedzi w pierwszej kolejności wymienia świat fizyczny i doświadczenie empiryczne a z nimi mechanikę, astronomię i fizykę[2]. Źródłem poznania jest też rozum ludzki, który dochodzi do problemu matematycznego często bez jakiegoś wpływu świata zewnętrznego, dokonując tylko logicznego zestawienia, uogólnienia, uszczegółowienia (specjalizacji), analizy i grupowania pojęć. To z kolei prowadzi do interakcji z poznaniem świata zewnętrznego. Ma miejsce stała, powtarzająca się gra między myśleniem a doświadczeniem. Na niej oparte są głębokie analogie i przedustawna harmonia, które matematyk tak często ukazuje w zadaniach, metodach i pojęciach różnych dziedzin poznania.

Na pytanie o uprawnione metody rozwiązywania problemów matematycznych Hilbert odpowiada, że są nimi dedukcja i ścisłość. Rozwiązanie problemu ma być oparte o skończoną liczbę przesłanek i skończoną liczbę wnioskowań. Przesłanki winny być sformu-

[2] Pod koniec wykładu, podejmując problem jedności matematyki pisze: *Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Erkennens. Damit sie diese hohe Bestimmung vollkommen erfülle, mögen ihr im neuen Jahrhundert geniale Meister erstehen und zahlreiche in edlem Eifer erglühende Jünger!* – Jednolity charakter matematyki znajduje ugruntowanie w wewnętrznej istocie tej nauki; przecież matematyka jest podstawą każdego ścisłego poznania przyrodniczego. Stąd, aby w pełni wypełnić to wielkie zadanie, w nowym stuleciu mogą pojawić się genialni mistrzowie i liczni pałający szlachetną pasją adepci.

łowane precyzyjnie. Jest to postulat ścisłości dowodzenia. To odpowiada ogólnemu filozoficznemu oczekiwaniu ludzkiego rozumu. Tylko realizacja tego postulatu ukazuje pełne znaczenie istoty problemu i jego owocność.

Byłoby wielkim błędem sądzenie, że ścisłość dowodu jest wrogiem prostoty. Wiele przykładów pokazuje, że jest odwrotnie. Dążenie do ścisłości prowadzi do prostoty dowodów i do owocnych metod. Postulat ten dotyczy nie tylko całości matematyki, lecz również przyrodoznawstwa.

Rozważania na temat związków myślenia arytmetycznego i geometrycznego rozpoczyna od postulatu, aby oznaczenia kojarzyły się z tym, do czego odnoszą. Więcej, wskazuje na nieodzowność przedstawień geometrycznych w dowodzeniu. Głosi, że znaki arytmetyczne to zapisane figury geometryczne, a figury geometryczne to narysowane formuły i żaden matematyk nie może się bez nich obejść tak, jak nie mógłby obejść się przy liczeniu bez brania w nawias. Wykorzystanie figur geometrycznych jako ścisłego środka dowodowego zakłada dokładną znajomość i pełne opanowanie aksjomatów, które leżą u podstaw teorii tych figur. Z tego powodu konieczna jest ścisła aksjomatyzacja ich treści naocznych[3].

Zbieżność między myśleniem geometrycznym a arytmetycznym przejawia się także w tym, że łańcuch dowodowy nie jest doprowadzany do samych aksjomatów. Przeciwnie, szczególnie przy pierwszym podejściu do zagadnienia zarówno w arytmetyce jak i w geometrii korzysta się z tego, co nazwalibyśmy intuicją.

Kończąc rozważania na temat trudności, jakie mogą stwarzać problemy matematyczne i sposobach ich przezwyciężania Hilbert wygłasza bardzo znamienny pogląd, który – jego zdaniem – podzielają wszyscy matematycy, a który nie został poparty dowodem, a miano-

[3] O znaczeniu aksjomatyzacji pisał w „Axiomatisches Denken". Wyrażał przekonanie, że każdy możliwy obiekt poznania naukowego, gdy tylko dojrzeje do poznania teoretycznego, podlega metodzie aksjomatycznej a tym samym pośrednio matematyce. Aksjomaty umożliwiają pogłębione rozumienie samej natury poznania naukowego i prowadzą do większej świadomości jedności poznania naukowego. To dlatego matematyka ma wiodącą rolę w nauce w ogóle. (Hilbert [1918], s. 415)

wicie, że każdy określony problem matematyczny na pewno powinien być dostępny ścisłemu rozwiązaniu[4].

Hilbert pyta, czy teza o rozwiązalności każdego problemu jest osobliwością matematyki, czy też ma miejsce ogólna zasada odnosząca się do rozumu ludzkiego, że każde zagadnienie, które on stawia może być przez rozum rozwiązane. Jako pozytywny przykład podaje problem *perpetuum mobile*[5].

Przekonanie o rozwiązywalności każdego problemu matematycznego jest – zdaniem Hilberta – znaczącym motywem pracy. Wewnętrzny głos mówi: jest problem, szukaj rozwiązania. Znaleźć możesz je za pomocą czystego myślenia; albowiem w matematyce nie istnieje *Ignorabimus!*[6] Hilbert pozostawał optymistą w sprawie poznania matematycznego[7]. W 1922 zaangażował się w dyskusję z Brouwerem, który uznał, że umysł ludzki ma ograniczone możliwości w kwestiach

[4] *. . . die Überzeugung, daß ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erleitung notwendig fähig sein müss.* Zob. wykład na II kongresie. Musimy tu zauważyć, że jest istotna różnica pomiędzy tezą o rozwiązywalności każdego problemu matematycznego a tezą o rozstrzygalności każdego problemu za pomocą jednego algorytmu. Można przyjąć, że dla samego Hilberta znaczenie tej różnicy nie było jasne.

[5] Myśl taką znajdujemy też u Wittgensteina w „Tractatus Logico-Philosophicus". Czytamy tam: *The riddle does not exist. If a question can be put at all, then it can also be answered.* [Jeżeli jakieś pytanie da się w ogóle postawić, to można też na nie odpowiedzieć.] – 6.5.

[6] Hilbert nawiązuje tu do słynnego *Ignoramus et ignorabimus*– Nie wiemy i nie będziemy wiedzieć – wypowiedzianego przez E. Dubois-Raymonda.

[7] Stanowisko to przenosi się na całość poznania naukowego. W wystąpieniu królewieckim z 1930 r., wskazuje na rolę matematyki w nauce. Matematyka jest narzędziem pośredniczącym między praktyka a myślą. Matematyka tworzy mosty stale zwiększając swoje możliwości. Stąd cała nasza kultura oparta na intelektualnym poszukiwaniu i wykorzystaniu przyrody, znajduje swoje podstawy w matematyce. Cytuje słowa Galileusza, że *tylko ci, którzy nauczyli się języka i znaków, którymi do nas przemawia przyroda mogą przyrodę zrozumieć.* Tym językiem – zdaniem Hilberta – jest matematyka. Za Kantem powtarza, że *w każdej szczegółowej nauce przyrodniczej, prawdziwa treść naukowa może być o tyle odnaleziona, o ile zawarta jest w niej matematyka.* Bez matematyki wręcz nie są możliwe takie nauki, jak astronomia i fizyka. Zastosowania matematyki są miarą jej wartości. Jednak poznanie matematyczne ma na celu, podobnie jak cała nauka – o czym mówił słynny matematyk Jacobi – godność ludzkiego ducha. Bez tego osiągnięcia przemysłowe nie ujrzałyby dziennego światła.

nieskończoności. Argumentacji Brouwera uległ nawet Hermann Weyl, najlepszy uczeń Hilberta. Hilbert definiując matematykę jako system znaków i odróżniając między matematyką a metamatematyką odrzucił argumenty Brouwera, który wycofał się z dyskusji. Weyl, w związku z badaniami nad grupami Lie również odwołał się do klasycznej analizy.

Do dzisiaj zachowało się nagranie wypowiedzi Hilberta w związku z otrzymaniem w 1930 r. honorowego obywatelstwa Królewca, które kończy, tak jak to czynił już na kongresie w Paryżu: *Wir müssen wissen. Wir werden wissen.*[8] To „Musimy wiedzieć. Będziemy wiedzieć." dotyczy nie tylko matematyki, lecz również nauk przyrodniczych. Czyni to mimo wyniku Gödla, który jak na ironię dzień wcześniej na II Konferencji Epistemologii i Nauk Ścisłych wykładał w Królewcu twierdzenie o niezupełności[9]; to właśnie twierdzenie, o którym można powiedzieć, że zniweczyło program Hilberta[10]. Chociaż – jak mówi o tym sam Gödel – twierdzenie to nie jest sprzeczne z Hilberta formalistycznym punktem widzenia.

Przekonaniu Hilberta o rozwiązywalności każdego problemu matematycznego towarzyszy pogląd, że niezmierzona jest wielość problemów matematycznych. W miejsce jednego rozwiązanego problemu pojawia się niezliczenie wiele nowych. Zauważmy, że ten pogląd jest koniecznym warunkiem przekonania o tym, że matematyka wciąż żyje nowymi problemami i nie grozi jej obumarcie.

---

[8] Tej treści inskrypcja znajduje się na grobie Hilberta na cmentarzu miejskim w Göttingen (zob. http://www.psych.uni-goettingen.de/home/ertel/ertel-dir/morehome/4gallerypast/4.04gravesofrenownscientists.html). Zwrócił mi na to uwagę profesor W. Marciszewski.

[9] Problem zupełności poznania matematycznego został postawiony przez Hilberta na kongresie matematyków w Bolonii w 1928 r. Filozof J. I. Austin informowany o wyniku Gödla, że nie każda prawda może być dowiedziona odpowiedział: *Who would have ever thought otherwise?*[Kto w ogóle mógł myśleć inaczej?]

[10] Wystąpienie Gödla było ostatnim w trzecim dniu konferencji. Chyba jednak nie zmęczenie zdecydowało o braku zainteresowania. W materiałach pokonferencyjnych też nie ma wzmianki ani o wystąpieniu ani o Gödlu. Jedynym uczestnikiem sympozjum, który od razu pojął znaczenie twierdzenia był John von Neumann. Geniusz rozpoznał geniusza.

Zagadnienie rozstrzygalności obecne jest w dziesiątym problemie z paryskiego kongresu, czyli problemie równań diofantycznych[11]. Hilbert pyta się o algorytm, sposób, za którego pomocą dla zadanego równania po wykonaniu skończonej liczby operacji znajdujemy odpowiedź, czy równanie to ma rozwiązanie w liczbach całkowitych. Jest to jedyny z 23 sformułowanych przez Hilberta problemów, który jest problemem rozstrzygalności. Nie możemy jednak tu mówić o sformułowaniu przez Hilberta problemu rozstrzygalności. Łączenie tego problemu z *Entscheidungsproblem* – jak to czyni np. Penrose – może być usprawiedliwiane przez fakt, że *it is a corollary of the methods used to give a negative solution to Hilbert's tenth problem that the question of whether any given Turing machine will eventually halt, and hence the Enscheidungsproblem can be encoded as a Diophantine problem.* (Martin, Matijasevic, Robinson [1976]) [Jest to wniosek z metod zastosowanych dla wskazania negatywnego rozwiązania 10-tego problemu Hilberta, że pytanie, czy dana maszyna Turinga ostatecznie zatrzyma się, a stąd *Entscheidungsproblem* może być zakodowany jako problem diofantyczny.] Chodzi bowiem o to, że każdej maszynie Turinga odpowiada pewne równanie diofantyczne, zaś rozwiązaniom tego równania własności maszyny, czyli istnieje między nimi równoważność[12]. W 1900 r. Hilbert nie miał o tym nawet wyobrażenia.

Problem rozstrzygalności dotyczy nieskończenie przeliczalnie wielu szczegółowych problemów, subproblemów, dla każdego z nich powinna być dana odpowiedź TAK lub NIE. Każdy taki subproblem określony jest przez skończoną ilość informacji.

Istota zagadnienia rozstrzygalności polega na żądaniu znalezienia dokładnie jednej metody, która mogłaby być użyta do uzyskania w skończonej liczbie kroków odpowiedzi na każdy z subproblemów. W wypadku równań diofantycznych od czasów Diofantesa znaleziono rozwiązania wielu z równań oraz wykazano nierozwiązywalność wielu

[11] Nierozstrzygalność tego problemu została wykazana przez Matijasevica na początku lat 70-tych. Skorzystał z wcześniejszych wyników Martina Davisa, Hilarego Putnama i Julii Robinson. Julia Robinson sama była bliska rozwiązania. Ściśle współpracowała z Matijasevicem.

[12] Rozwiązanie Matijasevica, że istnieje równanie diofantyczne, które nie ma rozwiązań i nie można tego udowodnić jest równoważne twierdzeniu Gödla.

innych. Dla wielu klas tych równań a nawet poszczególnych równań trzeba było znaleźć specyficzne metody. W 10-tym problemie Hilbert stawia pytanie o metodę uniwersalną znajdowania odpowiedzi na pytanie, czy takie równania ma w ogóle rozwiązanie. Niech chodzi więc o algorytm znajdowania rozwiązań, bo taki algorytm istnieje.

Zagadnienie rozstrzygalności systemu formalnego jest pytaniem o metodę, która w wypadku dowolnego zdania tego systemu umożliwia znalezienie odpowiedzi na pytanie, czy zdanie to jest, czy też nie jest twierdzeniem tego systemu. Takie zagadnienie pojawia się w pracach Schrödera [1895], Löweheima [1915] oraz Hilberta [1918].

Zagadnienie rozstrzygalności rachunku pierwszego rzędu, czyli to, co określamy jako klasyczny problem rozstrzygalności lub *Entscheidungsproblem*, formułuje Hilbert w „Grundzüge der theoretischen Logik"[13]. W rozdziale „Das Entscheidungsproblem im Funktionenkalkül und seine Bedeutung" czytamy: *Das Entscheidungsproblem ist gelöst, wenn man ein Verfahren kennt, das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit*[14] *bzw. Erfüllbarkeit*[15] *erlaubt.* (Hilbert D., Acker-

---

[13] W 1928 r. – roku publikacji tego dzieła – odbywa się kongres matematyków w Bolonii. W referacie Hilbert stawia problem zupełności. Nie stawia problemu rozstrzygalności.

[14] Bei dem Problem der Allgemeingültigkeit handelt es sich um die folgende Frage: *Wie kann man beim einem beliebigen vorgelegten logischen Ausdruck, der keine individuellen Zeichen enthält, feststellen, ob der Ausdruck bei beliebigen Einsetzungen für die vorkommendem Variablen eine richtige Behauptung darstellt oder nicht?*, s. 72. – W wypadku problemu (logicznej) prawdziwości chodzi o następujące pytanie: *Jak można dla dowolnego danego logicznego wyrażenia, które nie zwiera symboli indywiduowych, stwierdzić czy wyrażenie to dla dowolnego rozumienia występujących w nim zmiennych (liter predykatowych) jest, czy nie jest prawdziwym sądem?* – To podejście preferują teoretycy dowodu.

[15] Bei dem Problem der Erfüllbarkeit handelt es sich um die Frage, *ob es überhaupt eine Einsetzung für die Variablen gibt, so daß durch den betreffenden Ausdruck eine richtige Behauptung dargestellt wird.*, s. 73. – W wypadku problemu spełnienia (w modelu) chodzi o pytanie, *czy w ogóle jest takie rozumienie zmiennych (liter predykatowych), że dane wyrażenie jest prawdziwym sądem.* – To podejście preferowane jest w podejściu teoriomodelowym. Zauważmy, że problemy (logicznej) prawdziwości i istnienia modelu (spełnialności) są dualne. Zdanie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jego negacja nie ma modelu, lub – równoważnie – zdanie nie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jego negacja

man W. [1928], s. 73) [Problem rozstrzygalności jest rozwiązany, gdy znana jest metoda, która dla każdego danego logicznego wyrażenia umożliwia rozstrzygnięcie za pomocą skończenie wielu operacji, czy jest ono prawdziwe (logicznie) wzgl. spełnione (w modelu).]

Idea mechanicznego rozstrzygania problemów nie tylko matematycznych ma długą historię. Jej początki wiązane są z Lullusem, który za pomocą specjalnych kół zamierzał dowodzić prawd wiary chrześcijańskiej. Dał tym początek ruchowi lullystycznemu. Gottfried Leibniz, który w XVII w. zbudował maszynę liczącą, marzył o czasach – wypowiadając słynne *Calculemus* – w których wszelkie spory będzie można rozwiązywać tak, jak to czynimy wykonując rachunki arytmetyczne. W 1869 r. William Stanley Jevons zbudował pierwszą maszynę logiczną, czyli maszynę, która odpowiada na postawione pytania TAK lub NIE (a nie, jak to jest w wypadku maszyny liczącej, gdzie wynik jest liczbą). Idee rachunku i języka formalnego znajdują nowe inspiracje w koncepcjach Hilberta. Za sprawą Fregego współczesna logika uczyniła z nich swój fundament.

Zdaniem Hilberta: *Die Lösung des Entscheidungsproblems ist für die Theorie aller Gebiete, deren Sätze überhaupt einer logischen Entwickelbarkeit aus endlich vielen Axiomen fähig sind, von grundsätzlicher Wichtigkeit.* (Hilbert, Ackermann [1928] s. 73-74.) [Rozwiązanie problemu rozstrzygalności ma podstawowe znaczenie dla teorii wszystkich tych dziedzin, których twierdzenia w ogóle są wyprowadzalne ze skończenie wielu aksjomatów.] Dlaczego rozstrzygalność rachunku pierwszego rzędu ma tak doniosłe znaczenie? Otóż, jeśli zgodzimy się, że cała matematyka daje się zapisać w języku pierwszego rzędu[16], to – co Hilbert pokazuje na przykładzie geometrycznego twierdzenia Pascala – wszystkie problemy matematyczne będą mogły być rozwiązane za pomocą takiej metody.

Pierwszą kwestią w *Entscheidungsproblem* było znalezienie precyzyjnego matematycznego sformułowania metody, o której mówi Hilbert. Metoda ta musiała być zgodna choćby ze sposobem wykonywania rachunków arytmetycznych, gdy liczby zapisane są w systemie

ma model.

[16] Tezę, że tak jest określa się mianem tezy Hilberta.

arabskim, czyli z tym, co tradycyjnie określano jako algorytm. Chodziło zatem o taki matematyczny zapis intuicyjnej treści pojęcia algorytmu, który byłby zgodny z metodologią postulowaną m.in. przez Hilberta. Pojawiły się różne propozycje. Church pisze o nich w recenzji pracy Turinga „On computability ...": *As a matter of fact, there is involved here the equivalence of three different notions: computability by a Turing machine, general recursiveness in the sense of Herbrand-Gödel-Kleene, and the λ-definability in the sense of Kleene and the present reviewer. Of these, the first has the advantage of making the identification with effectiveness in the ordinary (not explicitly defined) sense evident immediately - i.e. without the necessity of proving preliminary theorems. The second and third have the advantage of suitability for embodiment in a system of symbolic logic.* (A. Church [1937] s. 42-43) [Faktycznie ma tu miejsce równoważność trzech różnych pojęć: obliczalności za pomocą maszyny Turinga, ogólnej rekurencji w sensie Herbranda-Gödla-Kleene oraz λ-definiowalności w sensie Kleene i recenzenta. Z tych pierwsze ma przewagę, czyniąc bezpośrednio oczywistą zgodność z efektywnością w zwykłym (nie zdefiniowanym explicite) sensie, t.j. bez potrzeby dowodzenia wstępnych twierdzeń. Drugie i trzecie ma przewagę w odpowiedniości dla inkorporacji w system logiki symbolicznej.]

Zauważmy, że Church pomija Posta propozycję binormalności. Kierował się przesłankami natury metodologicznej. Świadomy jest równoważności propozycji Posta z propozycją Turinga, chodzi mu jednak o to, że sam Post nie identyfikuje swojego sformułowania z efektywnością w zwykłym sensie, lecz raczej rozważa je jako „hipotezę roboczą", która wymaga stałej weryfikacji. W takim razie – Church [1936a] konkluduje – efektywności w zwykłym sensie nie zostało nadane ścisłe znaczenie.

We współczesnej literaturze tezę, że podane definicje, w szczególności Turinga i Churcha wyczerpują intuicyjną treść efektywnej metody określa się jako tezę Churcha-Turinga.

Propozycja Turinga ma i tę przewagę nad pozostałymi, że jest znakomicie uzasadniona. Zauważał to już Gödel, gdy stwierdzał, że Turing pokazał równoważność pojęcia mechanicznej procedury ze swoją maszyną. Bernays w liście do Churcha z 22 kwietnia 1937 r.

dzieli się uwagami w związku z listem od Turinga, w którym szczegółowo omówione są pewne kwestie dotyczące Turinga dowodu nierozstrzygalności *Entscheidungsproblem*. Bernays pisze: *He [Turing] seems to be very talented. His concept of computability is very suggestive and his proof of equivalence of this notion with your* λ*-definability gives a stronger conviction of the adequacy of these concepts for expressing the popular meaning of „effective calculability".* [Turing zdaje się być bardzo utalentowany. Jego rozumienie obliczalności jest bardzo sugestywne a jego dowód równoważności tego pojęcia z twoją λ-definiowalnością daje mocniejsze przeświadczenie o równoważności tych pojęć dla wyrażenia zwykłego znaczenia „efektywnej obliczalności".]

Kiedy dzisiaj podejmuje się kwestię pojęcia efektywnej metody, to z zasady jako argument decydujący przyjmowany jest fakt, że wszystkie dotychczas zaakceptowane jej ścisłe sformułowania są sobie równoważne mimo, że są różne. To, że są to istotnie różne definicje poddał w wątpliwość Dana Scot. Również fakt, że definicje te wytrzymały próbę czasu ma być argumentem na rzecz tezy Turinga-Churcha. Pomijana jest argumentacja Turinga. A ta, choćby zdaniem Gurevicha, zasługuje na uwagę, jako wspaniały przykład spekulatywnej filozofii. Słowa Turinga z „On computable ...": *We may compare a man in the process of computing a real number to a machine ...* [Możemy porównać człowieka, który rachuje na liczbach rzeczywistych do maszyny...] współbrzmią z komentarzem Wittgensteina [1980], 1096: *These (Turing's) machines are humans who calculate.* [Te maszyny to ludzie, którzy rachują.]

Nie sposób pominąć innego jeszcze faktu w ocenie propozycji Turinga. Z perspektywy czasu dostrzec można w jego pracach zaczątki wielu idei istotnych dla współczesnej informatyki. Turing doszedł do idei zapisu zarówno instrukcji jak i danych w jednym miejscu, antycypując tym samym klasyczny komputer von Neumanna z 1945 r. Już w jego pracach pojawiają się pojęcia „input-output", „pamięć", „kodowany program", „algorytm", „kompiler/interpreter", „maszyna skończenie stanowa".

Mając ścisłe pojęcie efektywnej metody można było przystąpić do *Entscheidungsproblem*. Turing dowiódł, że za pomocą maszyny

[Turinga] nie jest możliwe znalezienie odpowiedzi TAK lub NIE na pytanie, czy dane zdanie języka pierwszego rzędu jest prawdziwe. Wobec równoważności innych pojęć, które miały wyrażać intuicyjną treść efektywnej metody uznano, że klasyczny problem rozstrzygalności został rozwiązany (negatywnie). Tym samym, w związku z twierdzeniami Gödla uznano, że program Hilberta legł w gruzach.

W wyniku twierdzenia Churcha i Turinga klasyczny problem rozstrzygalności przekształcił się w pewnego rodzaju metaproblem: które fragmenty logiki pierwszego rzędu (dokładniej: które klasy zdań) są rozstrzygalne? Upadł ambitny plan mechanizacji matematyki przez algorytm rozstrzygający dla logiki pierwszego rzędu. Nie oznaczało to jednak odrzucenia dziedziny rozważań. Należało przecież zapytać, co da się zrobić. Naturalne jest wskazanie szczególnych wypadków, w których mechanizacja jest możliwa.

Niewątpliwie, negatywne rozwiązanie *Entscheidungsproblem* wyznacza granicę dla Leibniza *Calculemus*. Samej idei jednak nie przekreśla. Dobitnie świadczą o tym chociażby współczesne badania i osiągnięcia w zakresie automatycznego dowodzenia i sprawdzania poprawności dowodu.

W związku z postawieniem przez Hilberta *Entscheidungsproblem* pojawia się pytanie o to, jak Hilbert rozumiał poznanie matematyczne. Pozytywne rozwiązanie *Entscheidungsproblem*, czyniło znajdowanie odpowiedzi na pytanie, czy zdanie (języka pierwszego rzędu) jest twierdzeniem zajęciem czysto mechanicznym, które – jak to uważał Leibniz – nie jest zajęciem godnym dla człowieka wolnego. Takie czynności tym bardziej nie mogą ani pociągać, ani dawać radości z ich wykonania, co – zdaniem Hilberta – ma cechować poznanie matematyczne. Czymże jest więc poznanie matematyczne, skoro matematyka ma pozostać żywą dziedziną dociekań z wciąż nowymi problemami i dawać satysfakcję poznawczą z jej uprawiania? Odpowiedź na postawione pytanie możemy znaleźć choćby w wykładach Hilberta z 1919 r. „Natur und mathematisches Erkennen" (s. 8): *…vielmehr zeigt sich, daß die Begriffsbildungen in der Mathematik beständig durch Ansachauung und Erfahrung geleitet werden, so daß im großen und ganzen die Mathematik ein willkürfreies, geschlossenes Gebilde darstellt.* […przeciwnie okazuje się, że tworzenie pojęć w matematyce kierowane jest przez intuicję i doświadczenie tak, że w całości matematyka tworzy niearbitralną, jednolitą strukturę.] Nieco dalej zaś (s. 19) mówi: *Es bilden also die verschiedenen vorliegenden mathematschen Disziplinen notwendige Glieder im Aufbau einer systematischen Gednakenentwicklung, welche von einfachen, naturgemäßsich bietenden Fragen anhebend, auf einem durch den Zwang innerer Gründe im wesentlichen vorgezeichneten Wege fortschreitet. Von Willkür ist hier keine Rede. Die Mathematik ist nicht wie ein Spiel, bei dem die Aufgaben durch willkürlich erdachte Regeln bestimmt werden, sondern ein begriffliches System von innerer Notwendigkeit, das nur so und nicht anders sein kann.* [Różne istniejące dyscypliny matematyczne tworzą konieczne człony w konstrukcji systematycznego rozwoju myśli, która wychodzi od prostych, naturalnie narzucających się pytań i postępuje w sposób co do istoty wyznaczony przez przymus wewnętrznych racji. Nie można tu mówić o dowolności. Matematyka nie jest grą, której zadania są określone przez dowolnie pomyślane reguły, lecz systemem pojęciowym o wewnętrznej konieczności, który może być tylko taki a nie inny.] Poznanie matematyczne jest więc przede wszystkim poznaniem, które realizuje się poprzez tworzenie pojęć, których źródłem jest intuicja i doświadczenie. Mechanizacji tych procesów poznawczych jednak Hilbert nie przewidywał. Można zauważyć, że wszystkie twierdzenia zarówno Gödla jak i Church-Turinga wzmocniły tezę Hilberta o żywym charakterze poznania matematycznego.

Czy twierdzenia Gödla i Churcha-Turinga ostatecznie przekreśliły optymizm poznawczy Hilberta? Czy w matematyce jest miejsce dla *Ignoramus et ignorabimus*? Z całą pewnością twierdzenia te są ważnymi argumentami, że umysł ludzki nie jest w stanie poznać (potencjalnie) każdej prawdy matematycznej.

Zauważmy jednak, że twierdzenie Churcha-Turinga mówi o tym, że nie ma jednej metody rozstrzygania zdań języka pierwszego rzędu. Nie wykluczone jest więc, że dla każdego zdania języka pierwszego rzędu można znaleźć odpowiedź na pytanie, czy zdanie to jest, czy też nie jest prawdziwe. Sam Gödel wierzył w naszą możliwość „absolutnego” dowodu lub kontrdowodu każdej matematycznej hipotezy. Być może, że w niektórych wypadkach trzeba będzie wielkiej wiedzy, umiejętności i pomysłowości dla znalezienia odpowiedzi, ale przecież odpowiedź taka będzie. Przykładem tego może być Wielkie Twierdzenie Fermata. Oczywiście, gdyby ziściło się zamierzenie Hilberta i *Entscheidungsproblem* znalazłby pozytywne rozstrzygnięcie, to dowód tego twierdzenia byłby mechaniczny. Tak nie jest, a znaleziony dowód jest tak skomplikowany, że w zasadzie wymaga wspomagania komputerowego (maszynowego).

Kwestią, która wciąż jest żywa jest pytanie o to, czy analiza Turinga i innych metody efektywnej wyczerpuje w pełni jej treść. Takie próby były zwykle podejmowane bezskutecznie (np. Kalmar [1959]; Mendelson [1963]). W 1982 r. Richard Feynman [1982] (fizyk, noblista) zauważył, że współczesna technologia komputerowa nie jest zdolna do efektywnego symulowania systemów kwantowych. Zasugerował, że komputer zbudowany w oparciu o mechanikę kwantową byłby zdolny do realizacji takiego zadania. W 1985 r. David Deutsch [1985] rozważał teoretyczny model takiego komputera i sugerował, że taki model może efektywnie obliczać problemy, które nie są obliczalne przez tradycyjny komputer. Pojęciowo możliwe jest, że przynajmniej dla pewnych problemów, komputer kwantowy wykracza poza maszynę Turinga. Idea ta spotkała się z szerszym zainteresowaniem, gdy w 1994 r. Peter Shor [1994] odkrył nowy kwantowy algorytm faktoryzacji dużych liczb[17], działający w czasie wielomianowym[18].

Postawienie przez Hilberta problemu rozstrzygalności okazało się najbardziej owocne z wszystkich zadań, jakie stawiał matematykom XX w. Pytanie to doprowadziło do maszyny Turinga i teorii języków formalnych, które stanowią podstawę współczesnej informatyki i technik komputerowych. Zagadnienie to jest również wciąż żywe. Nauka żyje dzięki swoim problemom. Myśl Hilberta pozostaje więc żywa.

---

[17] Na założeniu, że liczba operacji faktoryzacji rośnie wykładniczo oparty jest dziś powszechnie stosowany system kodowania RSA.

[18] Tłumaczy to zainteresowanie, szczególnie służb specjalnych komputerem kwantowym. Zob. również Hughes R. J. [1998].

BIBLIOGRAFIA

Hilbert D.

[1918] Axiomatisches Denken, *Math. Ann.,* 78, 405-415.

[1900] *Mathematical Problems*, lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, translated by Mary Winton Newson for Bulletin of the American Mathematical Society 8 (1902) 437-479.

Hilbert D., Ackerman W.

[1928] *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin.

Church A.

[1936] An unsolvable problem of elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, 58, s. 345 - 363

[1936] A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936), s. 40 - 41. Errata ukazała sie [w:] Series 2, 43 (1937), s. 544-546.

[1936a] Review of Emil Post, Finite combinatory processes. Formulation I, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1 (1936), s. 103-5; *Journal of Symbolic Logic*, vol. 2 (1937), no. 1, s. 43.

[1937] Review of A. Turing [On computable ...], *Journal of Symbolic Logic*, vol. 2 no 1., s. 42-3.

Deutsch D.

[1985] Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computers, *Proceedings of the Royal Society of London* A, 400:97.

Feynman R.

[1982] Simulating physics with computers, *International Journal of Theoretical Physics*, 21: 467.

Hughes R. J.

[1998] Cryptography, quantum computation and trapped ions, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 356 s.1713 (1998)

Kalmar L.

[1936] Die Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären Funktionsvariablen. *Compositio Math.*, Vol.4, s.137-144

[1959] An Argument Against the Plausibility of Church's Thesis. In Heyting, A. (ed.) 1959. *Constructivity in Mathematics.* Amsterdam: North-Holland, s.72-80.

Löwenheim L.

[1915] Über Möglichkeiten im Relativkalkul. *Math. Ann.*, 76, 447--470.

Martin D., Matijasevic Y., Robinson J.

[1976] Hilbert's Thenth Problem: Diophatnine Equations; Positive Aspects of Negative Solution, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 18, 323-78.

Mendelson E.

[1963] On Some Recent Criticism of Church's Thesis. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 4, 201-205.

Schröder E.

[1895] *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (Exakte Logik), v. 3, *Algebra und Logik der Relative*, part I, Leipzig

Shor P.W.

[1994] Algorithms for quantum computation: discrete logarithm and factoring, in S. Goldwasser (Ed.): *Proc. 35th A. Symp. on the Foundations of Computer Science*, p.124, (IEEE, Los Alamitos, CA, 1994).

Turing A. M.

[1936] On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 42, s. 230-265.

Wittgenstein L.
[1970] *Tractatus logico-philosophicus*, Warszawa.
[1980] *Culture and Value*, Oxford.