Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Całkowanie

- Jak widzieliśmy w poprzednim wykładzie, pochodna funkcji ma prostą interpretację geometryczną, związaną ze styczną do krzywej. Całka (oznaczona, w przedziale $[a, b]$) funkcji $f(x)$ także ma prostą interpretację geometryczną: jej wartość liczbowa równa jest polu powierzchni ograniczonej osią odciętych, krzywą $f(x)$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$.
- Aby w poprawny i precyzyjny sposób mówić o *polach* figur ograniczonych dowolnymi krzywymi, trzeba dysponować pojęciem *miary*. Podobnie dla takich pojęć, jak: *długość* (dowolnej krzywej), *pole* (dowolnej powierzchni) oraz *objętość* (dowolnej bryły).
- W przypadku zbiorów skończonych *miara* związana może być bezpośrednio z *liczbą elementów* takich zbiorów.
- Inaczej rzecz ma się jednak z dowolnymi zbiorami, w tym ze zbiorami nieskończonymi. Wprowadzone zostaje nowe pojęcie: zbioru *mierzalnego* (w określonym sensie, np. w mierze borelowskiej lub w mierze Lebesgue'a).

Rodzina $\mathbb{B}$ podzbiorów zbioru X jest *σ-ciałem zbiorów* w X (lub: *σ-algebrą* w X), gdy:

- $\emptyset \in \mathbb{B}$.
- $\mathbb{B}$ jest zamknięta na operację dopełnienia (w X): jeśli $A \in \mathbb{B}$, to $X - A \in \mathbb{B}$.
- $\mathbb{B}$ jest zamknięta na przeliczalne sumy: jeśli $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{B}$, to $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathbb{B}$.

- Dla dowolnej rodziny $\mathbb{B}$ podzbiorów zbioru X istnieje najmniejsza (względem inkluzji) σ-algebra w X, do której należą wszystkie zbiory z rodziny $\mathbb{B}$: nazywamy ją *σ-algebrą podzbiorów X generowaną przez rodzinę $\mathbb{B}$*.
- Parę $(X, \mathbb{B})$ złożoną ze zbioru X oraz σ-algebry jego podzbiorów $\mathbb{B}$ nazywamy *przestrzenią mierzalną*.

Niech $(X, \mathbb{B})$ będzie przestrzenią mierzalną. Mówimy, że funkcja μ jest *miarą* w tej przestrzeni, gdy:

- Dziedziną funkcji μ jest rodzina $\mathbb{B}$.
- Zbiorem wartości funkcji μ jest $\mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.
- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Dla dowolnej rodziny $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{B}$ zbiorów parami rozłącznych (czyli takich, że $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) zachodzi:

  $$\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

- *Przestrzenią z miarą* nazywamy dowolną trójkę uporządkowaną $(X, \mathbb{B}, \mu)$, gdzie $(X, \mathbb{B})$ jest przestrzenią mierzalną, a μ jest miarą w tej przestrzeni.
- *Zbiory borelowskie*. σ-algebra generowana przez rodzinę wszystkich przedziałów otwartych o końcach wymiernych zawartych w $\mathbb{R}$ jest rodziną wszystkich tzw. *borelowskich* podzbiorów $\mathbb{R}$.

- W przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ (gdzie $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ jest rodziną zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$) można określić miarę μ na różne sposoby.
- Wyróżnionym sposobem jest przyjęcie, że $\mu((a, b]) = b - a$ (wtedy również $\mu((a, b)) = \mu([a, b]) = \mu([a, b)) = b - a$).
- Nazwijmy tę miarę *miarą borelowską*. Można tego typu miarę określić oczywiście również w dowolnej przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n))$.

- Przykładem miary jest *funkcja prawdopodobieństwa*, określona na σ-algebrze *zdarzeń* danej przestrzeni zdarzeń elementarnych.
- Różne pojęcia całki (np. całka Riemanna, całka Lebesgue'a) także związane są z pojęciem miary.

- Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a,b). *Funkcją pierwotną* funkcji f nazywamy każdą funkcję F określoną w przedziale (a,b) i różniczkowalną w każdym punkcie przedziału (a,b), która dla wszystkich $x \in (a,b)$ spełnia warunek: $F'(x) = f(x)$.
- Jeśli dla funkcji f istnieje jej funkcja pierwotna w (a,b), to mówimy, że f jest *całkowalna* w (a,b).
- Wprost z definicji wynika, że funkcja pierwotna funkcji f całkowalnej w (a,b) jest określona z dokładnością do stałej.

- *Całką nieoznaczoną* funkcji f nazywamy rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f. Powszechnie przyjętym oznaczeniem dla całki nieoznaczonej funkcji f jest $\int f(x)dx$. Tak więc, jeśli $F'(x) = f(x)$, to $\int F'(x)dx = F(x) + C$.
- Symbol dx jest swoistym znakiem interpunkcyjnym, wskazującym względem jakiej zmiennej odbywa się całkowanie.

Przykłady

Wprost ze znanych już wzorów na pochodne funkcji otrzymujemy wzory dotyczące niektórych całek nieoznaczonych (zwykle pomijamy, z lenistwa, stałą C):

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, dla $\alpha \neq -1$, $x > 0$ (jeśli $\alpha \in \mathbb{N}$, to wzór zachodzi dla $x \neq 0$)
- $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$, dla $x \neq 0$
- $\int e^x dx = e^x$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$
- $\int \sin x dx = -\cos x$
- $\int \cos x dx = \sin x$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$, dla $x \neq n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$, dla $x \neq n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Działania arytmetyczne. Jeśli funkcje f i g są całkowalne w przedziale I (otwartym lub domkniętym), a $c \in \mathbb{R}$, to całkowalne w I są również funkcje $f + g$, $f - g$, $c \cdot f$ oraz zachodzą wzory:

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$.

- *Całkowanie przez części*. Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne f' i g' w przedziale I (otwartym lub domkniętym), to: $\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$
- *Całkowanie przez podstawienie*. Załóżmy, że f jest ciągła w przedziale (a, b), a g ma ciągłą pochodną w przedziale (c, d), przy czym $a < g(t) < b$ dla $t \in (c, d)$. Wtedy dla $t \in (c, d)$: $\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

- Załóżmy, że g ma ciągłą pochodną w przedziale (a, b) oraz $g(t) \neq 0$ dla $t \in (a, b)$. Wtedy dla $t \in (a, b)$: $\int \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \ln |g(t)|$.
- Zauważmy, że ten (użyteczny w zastosowaniach) wzór wynika z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie (wystarczy przyjąć $f(x) = \frac{1}{x}$ w założeniach metody całkowania przez podstawienie).
- Opracowano wiele dalszych metod obliczania całek nieoznaczonych, m.in.: wzory rekurencyjne, rozkład (funkcji wymiernych) na ułamki proste, wzory na obliczanie całek złożonych funkcji niewymiernych oraz trygonometrycznych, itd.

- Rozważmy całkę $\int x \cdot e^x dx$. Skorzystamy z metody całkowania przez części, przyjmując: $f(x) = x$ oraz $g(x) = e^x$. Ponieważ $(e^x)' = e^x$, więc:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int (x)' \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x = (x-1) \cdot e^x.$$

- Rozważmy całkę $\int 3^{4 \cdot x - 1} dx$. Dokonujemy podstawienia: $t = 4 \cdot x - 1$. Wtedy $x = \frac{t+1}{4} = g(t)$, czyli $g'(t) = \frac{1}{4}$. Korzystamy z wzoru na obliczanie całki przez podstawienie:

$$\int 3^{4 \cdot x - 1} dx = \int 3^t \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \cdot \int 3^t dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^{4 \cdot x - 1}}{\ln 3}.$$

Rozważmy całkę $\int \frac{1}{\sin x} dx$ dla $x \neq n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Wykorzystajmy najpierw znane fakty trygonometryczne:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

Pamiętamy, że:

$$(\operatorname{tg} \frac{x}{2})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Otrzymujemy zatem:

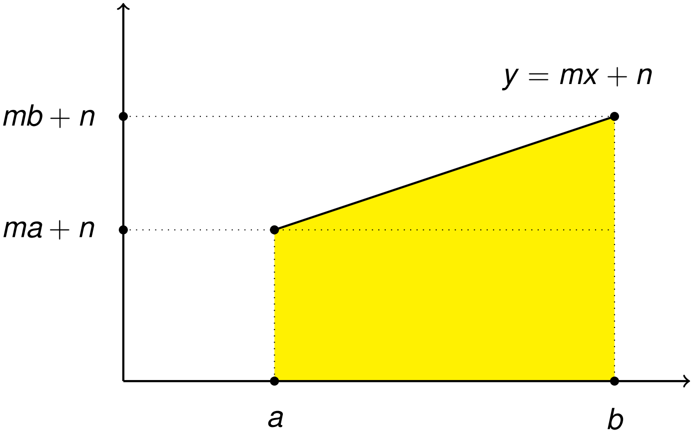
$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{(\operatorname{tg} \frac{x}{2})'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|,$$

w każdym z przedziałów $(n \cdot \pi, (n+1) \cdot \pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

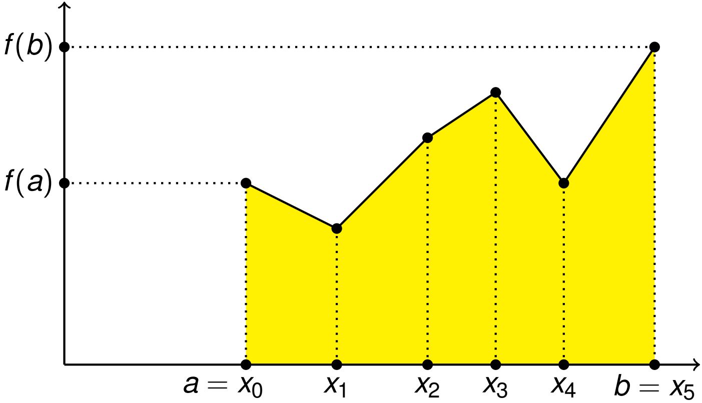
Niech wykresem funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ będzie prosta o równaniu $y = m \cdot x + n$. Wtedy obszar ograniczony odcinkiem $[a, b]$, krzywą $y = m \cdot x + n$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ jest trapezem. Pole tego obszaru dane jest zatem wzorem:
$\frac{1}{2} \cdot (m \cdot (a + b) + 2 \cdot n) \cdot (b - a)$.
Jaki jest związek tego pola z całką nieoznaczoną $F(x) = \int (m \cdot x + n) dx$? Po pierwsze: $F(x) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot x^2 + n \cdot x + C$, gdzie C jest stałą całkowania. Po drugie:

1. $F(a) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a^2 + n \cdot a + C$
2. $F(b) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot b^2 + n \cdot b + C$

Wreszcie, po trzecie: $F(b) - F(a) = \frac{1}{2} \cdot (m \cdot (a + b) + 2 \cdot n) \cdot (b - a)$, co wykazujemy prostym rachunkiem. Tak więc, rozważane pole jest równe różnicy wartości funkcji pierwotnej dla funkcji $f(x) = m \cdot x + n$, branych na końcach przedziału $[a, b]$.



Jeśli $f(x) = m \cdot x + n$, to $F(x) = \int (m \cdot x + n)dx = \frac{1}{2} \cdot m \cdot x^2 + n \cdot x + C$. Wtedy $F(b) - F(a) = \frac{1}{2} \cdot (m \cdot (a + b) + 2 \cdot n) \cdot (b - a)$, czyli $F(b) - F(a)$ to pole zaznaczonego na żółto trapezu.



Jeśli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ i $f(x)$ jest funkcją liniową w każdym przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, to dla dowolnej funkcji $F(x)$ pierwotnej dla $f(x)$:
$\sum\limits_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$, co jest polem obszaru ograniczonego osią odciętych, prostymi $x = a$ i $x = b$ oraz łamaną $f(x)$.

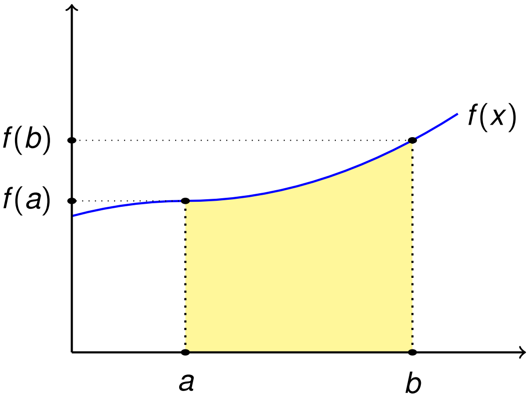
Niech $f(x)$ będzie funkcją łamaną w przedziale $[a, b]$. Wtedy obszar ograniczony krzywą $f(x)$, odcinkiem $[a, b]$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ jest sumą trapezów. Jeśli bowiem punkty $x_i \in [a, b]$ są takie, że $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ oraz że funkcja $f(x)$ jest liniowa w każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$, dla $0 < i \leqslant n$, to – na mocy obliczeń wykonanych w poprzednim punkcie – dla dowolnej funkcji $F(x)$ pierwotnej dla $f(x)$ pole tego obszaru jest równe:

$$\sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

A zatem również w tym przypadku rozważane pole jest równe różnicy wartości funkcji pierwotnej dla funkcji $f(x)$, branych na końcach przedziału $[a, b]$.

Te przykłady mogą służyć za punkt wyjścia do następującej definicji.

- Niech F będzie funkcją pierwotną dla funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$. *Całką oznaczoną* z funkcji f w przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
- Liczby a oraz b nazywamy wtedy, odpowiednio, *dolną* oraz górną granicą całkowania.
- Powszechnie używa się również skrótu: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- Czy w przypadku *dowolnej* funkcji $f(x)$ określonej w przedziale $[a, b]$ pole obszaru ograniczonego odcinkiem $[a, b]$, krzywą $f(x)$ oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ równe jest $F(b) - F(a)$, gdzie F jest funkcją pierwotną dla funkcji f?
- Odpowiedzi na to pytanie dostarczają różne propozycje zdefiniowania wielkości $\int\limits_a^b f(x)dx$ tak, aby była ona równa $F(b) - F(a)$ oraz istotnie odpowiadała ona mierze rozważanego obszaru.



Jeśli miara obszaru ograniczonego osią odciętych, prostymi $x = a$, $x = b$ oraz krzywą $f(x)$ miałaby być równa $\int\limits_a^b f(x)dx$, to musimy zaproponować jakiś sposób przybliżania tego obszaru sumami obszarów dotąd rozważanych (czyli jakoś określonych pasków).

Zauważmy, że obszar pod dowolną krzywą $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ może być przybliżany sumami obszarów prostokątnych na dwa sposoby:

- Możemy dzielić przedział $[a, b]$ (czyli dziedzinę funkcji), otrzymując prostokątne pionowe paski, których suma przybliża rozważany obszar. Ten pomysł prowadzi do *całki Riemanna*.
- Możemy dzielić przedział $[f(a), f(b)]$ (czyli przeciwdziedzinę funkcji), otrzymując inne prostokątne paski, których suma przybliża rozważany obszar. Ten pomysł prowadzi do *całki Lebesgue'a*.
- Miarę rozważanego obszaru chcemy obliczać (przybliżać) jako sumę miar jakichś prostszych jego obszarów składowych. Owe obszary składowe powinny być przy tym stosownie małe, aby suma ich miar była dowolnie bliska mierze całego rozważanego obszaru. Domyślamy się zatem, że za chwilę pojawi się jakieś przejście graniczne: miara całego obszaru będzie określana jako granica sum obszarów składowych.

Własności arytmetyczne. Załóżmy, że f i g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$. Wtedy:

$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$

$\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx.$ $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx.$

Jeśli $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a, b]$, to $\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$

Jeśli $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in [a, b]$, to $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0.$

Jeśli $0 < h \leqslant b - a$, to istnieje $t \in (0, 1)$ taka, że:

$\int\limits_a^{a+h} f(x)dx = h \cdot f(a + t \cdot h)$. Zatem: $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leqslant (b - a) \cdot \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$

Jeśli $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ dla $x \in [a, b]$, to $F'(x) = f(x)$ w $[a, b]$. Zatem: jeśli F ma ciągłą pochodną F' w $[a, b]$, to $\int\limits_a^x F'(x)dx = F(x) - F(a).$

- *Całkowanie przez części*. Załóżmy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne f' i g' w przedziale $[a, b]$. Wtedy:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx,$$

gdzie $[f(x) \cdot g(x)]_a^b = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$.

- *Całkowanie przez podstawienie*. Załóżmy, że f jest ciągła w $[a, b]$ oraz że g ma ciągłą pochodną g' w $[c, d]$, przy czym $a \leqslant g(t) \leqslant b$ dla $t \in [c, d]$ oraz $g(c) = a$, $g(d) = b$. Wtedy:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

- *Pierwsze twierdzenie o wartości średniej*. Załóżmy, że f i g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$ oraz że g ma stały znak w $[a, b]$. Istnieje wtedy liczba $t \in [a, b]$ taka, że:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(t) \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

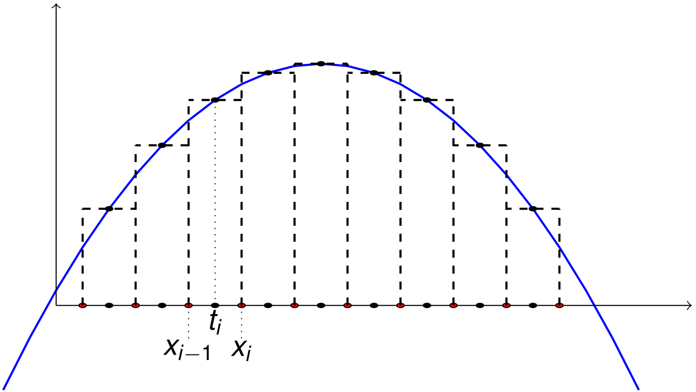
- *Drugie twierdzenie o wartości średniej*.Załóżmy, że f i g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$ oraz że g jest monotoniczna i ma ciągłą pochodną w $[a, b]$. Istnieje wtedy liczba $t \in [a, b]$ taka, że:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = g(a) \cdot \int_a^t f(x) dx + g(b) \cdot \int_t^b f(x) dx.$$

Niech $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Każdy taki ciąg nazywamy *podziałem* odcinka $[a, b]$. Poszczególne przedziały $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leqslant i < n)$ nazywamy wtedy *podprzedziałami* tego podziału. *Średnicą* takiego podziału nazywamy liczbę $\max\limits_{0 \leqslant i < n}(x_{i+1} - x_i)$. Średnicę podziału Π oznaczamy przez $\delta(\Pi)$. *Normalnym ciągiem podziałów* (odcinka $[a, b]$) nazywamy każdy taki ciąg Π_m podziałów tego odcinka, których średnica dąży do zera, czyli taki, iż: $\lim\limits_{m \to \infty} \delta(\Pi_m) = 0$.

Niech f będzie funkcją ograniczoną w przedziale $[a, b]$ i niech Π będzie podziałem tego przedziału, wyznaczonym przez punkty: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Ponadto, niech $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$. Niech T będzie zbiorem wszystkich tych *punktów pośrednich* t_i. *Sumą Riemanna* funkcji f dla podziału Π przy wyborze punktów pośrednich w zbiorze T nazywamy liczbę:

$$R(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$



Podział Π wyznaczony przez punkty $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.
T to zbiór wybranych punktów $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.
Suma Riemanna funkcji f dla podziału Π przy wyborze punktów pośrednich w zbiorze T: $R(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$.

Twierdzenie. *Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$. Wtedy*:

- *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego podziału Π odcinka $[a, b]$: jeśli $\delta(\Pi) < \delta$, to $|R(\Pi) - \int\limits_a^b f(x)dx| < \varepsilon$.*
- *Dla każdego normalnego ciągu (Π_m) podziałów odcinka $[a, b]$ zachodzi równość*: $\lim\limits_{m\to\infty} R(\Pi_m) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Uwaga: tutaj $\int\limits_a^b f(x)dx$ jest całką oznaczoną, zdefiniowaną w podany wcześniej sposób.

Załóżmy, że f jest funkcją ograniczoną w przedziale $[a, b]$. Mówimy, że f jest funkcją *całkowalną w sensie Riemanna* w $[a, b]$, gdy dla każdego normalnego ciągu podziałów (Π_m) przedziału $[a, b]$ oraz przy dowolnym wyborze punktów pośrednich z podprzedziałów tego przedziału ciąg sum Riemanna $(R(\Pi_m))$ jest zbieżny. Granicę $\lim\limits_{m\to\infty} R(\Pi_m)$ nazywamy wtedy *całką Riemanna* z funkcji f w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy przez $\int\limits_a^b f(x)dx$.

To, że całkę Riemanna oznaczamy tak samo, jak (zdefiniowaną wcześniej) całkę oznaczoną, nie powinno prowadzić do nieporozumień.

- Dla funkcji ciągłych całka Riemanna jest równa całce oznaczonej.
- Istnieją funkcje ograniczone nieciągłe (a nawet nie posiadające funkcji pierwotnej), które są całkowalne w sensie Riemanna. Taka jest np. funkcja f określona w przedziale $[0, 1]$ następująco: $f(x) = 1$ dla $x \in [0, \frac{1}{2})$, $f(x) = 0$ dla $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Można wykazać, że dla każdego normalnego ciągu podziałów odcinka $[0, 1]$ ciąg jego sum Riemanna jest zbieżny do $\frac{1}{2}$.
- Istnieją jednak także funkcje ograniczone, które nie są całkowalne w sensie Riemanna – taka jest np. funkcja Dirichleta (funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych).

- Całka Riemanna jest przyjaznym obiektem matematycznym, jeśli chodzi np. o jej walory dydaktyczne.
- Pewnych jej mankamentów teoretycznych (np. dotyczących przejść granicznych) można pozbyć się, przechodząc do ogólniejszego pojęcia całki.

Długość łuku krzywej. Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$, to długość łuku krzywej L o równaniu $y = f(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, wynosi: $|L| = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

Pole powierzchni figury płaskiej. Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i spełniają w nim warunek $g(x) \leqslant f(x)$, to pole obszaru P, ograniczonego krzywymi $y = f(x)$, $y = g(x)$ oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, jest równe: $|P| = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Pole powierzchni bryły obrotowej. Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$, to pole powierzchni bryły obrotowej S, powstałej przez obrót wokół osi odciętych wykresu funkcji $y = f(x)$, dla $x \in [a, b]$, wynosi: $|S| = 2 \cdot \pi \cdot \int\limits_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Objętość bryły obrotowej. Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to objętość bryły obrotowej V powstałej przez obrót wokół osi odciętych wykresu funkcji $y = f(x)$, dla $x \in [a, b]$, wynosi:

$|V| = \pi \cdot \int\limits_a^b f^2(x) dx$.

- *Droga w ruchu o zmiennej prędkości*. Jeśli punkt materialny porusza się ruchem prostoliniowym ze zmienną w czasie prędkością $v(t)$, to droga s przebyta przez ten punkt w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem: $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.
- *Praca*. Jeżeli równolegle do osi odciętych działa zmienna siła F, to praca wykonana przez tę siłę na drodze od punktu a do punktu b wyraża się wzorem: $W = \int\limits_a^b F(x)dx$.
- *Energia*. Jeżeli u oraz i oznaczają odpowiednio wartości chwilowe napięcia i natężenia prądu zmiennego, to całkowita energia pobrana w czasie t ze źródła tego prądu wynosi: $E = \int\limits_0^t u(t) \cdot i(t)dt$.
- W tekście wykładu *Całkowanie* znajdą słuchacze dalsze przykłady zastosowań: obliczanie środka masy oraz momentu bezwładności.

Zapas towaru. Załóżmy, że funkcja całkowalna $f(t)$ określa intensywność napływu towaru do magazynu w zależności od czasu $t \in [0, T]$.

Wtedy wielkość zgromadzonego po upływie czasu T w magazynie towaru jest równa $\int\limits_0^T f(t)dt$.

Wielkość zapasów zgromadzonych od chwili t_1 do chwili t_2 (gdzie $0 < t_1 < t_2 < T$) równa jest $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Wreszcie, średnia wielkość zapasów zgromadzonych w okresie od t_1 do t_2 jest równa: $\frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Realny zysk. Zysk $z(t)$ otrzymany z eksploatacji jakiegoś urządzenia (np. gilotyny) obliczamy odejmując od dochodu $D(t)$ z eksploatacji koszty $K(t)$ utrzymania tego urządzenia: $z(t) = D(t) - K(t)$.
Przedziałem opłacalności urządzenia nazywamy przedział czasowy $[0, T]$, gdzie T jest największą liczbą t, dla której $z(t) \geqslant 0$.
Realny zysk uzyskany z eksploatacji urządzenia w czasie od t_1 do t_2 (gdzie $0 < t_1 < t_2 < T$) jest równy: $Z = \int\limits_{t_1}^{t_2} z(t)dt$.

Kapitał. Niech $K(t)$ oznacza zasób kapitału w chwili t.
Wtedy $K'(t)$ oznacza prędkość wzrostu kapitału.
Przyrost kapitału w chwili t jest równy wartości strumienia inwestycji netto $I(t)$ w chwili t.
Tak więc: $K'(t) = I(t)$.
Otrzymujemy zatem: $K(t) = \int I(t)dt$.
Wielkość kapitału w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ równa jest:

$$\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt = K(t_2) - K(t_1).$$

Modele wzrostu. W makroekonomii proponuje się modele matematyczne, opisujące zależności między takimi czynnikami, jak np. dochód narodowy, konsumpcja, kapitał, produkcja, stan technologii, itd. To, na ile modele te trafnie oddają zależności ekonomiczne zależy m.in. od przyjmowanych założeń na temat gospodarowania. Jest dość oczywiste, że matematyczne aspekty takich rozważań uwzględniać muszą pojęcia związane z rachunkiem różniczkowym i całkowym (a także z, m.in.: rachunkiem wariacyjnym, teorią równań różniczkowych, algebrą liniową, programowaniem, itd.).
Jeśli ktoś ze słuchaczy miałby ambicję zostania Ministrem Finansów (Premierem?), to musiałby to wszystko umieć.

Myśl przekornie!

- Czy całkowanie jest procesem algorytmicznym?
- Jak obliczamy pole powierzchni „zakrzywionej”?
- Jak obliczamy objętość bryły ograniczonej takim „zakrzywionymi” powierzchniami?
- Jak obliczamy długość krzywej na takiej „zakrzywionej” powierzchni?

- Rozważaliśmy całki oznaczone funkcji określonych w pewnym przedziale. Jak zdefiniować całkę oznaczoną funkcji w przedziale $[a, \infty)$ lub $(-\infty, \infty)$?
- Jak zdefiniować całkowanie funkcji wielu zmiennych?
- Jak zdefiniować całkowanie funkcji zmiennej zespolonej?

Co musisz ZZZ

- Całka nieoznaczona: definicja, całkowanie przez części i przez podstawienie.
- Całka oznaczona: definicja i interpretacja geometryczna.
- Całka Riemanna: definicja i interpretacja geometryczna.

Słuchacze będą mieli wielokrotnie do czynienia z pojęciami rachunku różniczkowego i całkowego w trakcie dalszych studiów kognitywnych.

Przypuśćmy, że naszym celem jest określenie zbiorów mierzalnych w $\mathbb{R}$ (lub w $\mathbb{R}^n$) w taki sposób, aby klasa ta była możliwie jak najobszerniejsza oraz żeby zdefiniowana dla tych zbiorów miara pokrywała się z wartościami, które charakteryzują długość, pole powierzchni oraz objętość w znanych ze szkoły, dobrze oswojonych przypadkach. Dobrym rozwiązaniem tego problemu jest tzw. *miara Lebesgue'a*. Nie przedstawimy jej konstrukcji w sposób dokładny, ograniczając się jedynie do przekazania słuchaczom pewnych intuicji.

W przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ (gdzie $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ jest rodziną zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$) można określić miarę μ na różne sposoby. Wyróżnionym sposobem jest przyjęcie, że $\mu((a, b]) = b - a$ (wtedy również $\mu((a, b)) = \mu([a, b]) = \mu([a, b)) = b - a$). Nazwijmy tę miarę *miarą borelowską*. Można tego typu miarę określić oczywiście również w dowolnej przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n))$.

- Dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ jego *zewnętrzna miara Lebesgue'a* $\lambda^*(A)$ zdefiniowana jest następująco: $\lambda^*(A) = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) :$ $(I_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ jest ciągiem przedziałów takim, że $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k\}$.
- Zewnętrzna miara Lebesgue'a zbioru A to kres dolny sum miar borelowskich rodzin przedziałów takich, że suma (teoriomnogościowa) każdej takiej rodziny pokrywa całkowicie (zawiera) zbiór A. Tak więc, „przybliżamy" wielkość zbioru A przez pokrycia tego zbioru przedziałami (dla których mamy już dobrze określoną miarę borelowską).
- Suma takiej rodziny przedziałów może nie pokrywać się ze zbiorem A, chcemy więc zagwarantować jeszcze, że sumaryczna miara takiej rodziny różni się dowolnie mało od wielkości, którą chcemy przypisać zbiorowi A jako jego miarę.

- Określamy rodzinę $\mathcal{L}$ *zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a* następująco. $A \in \mathcal{L}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$: $\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(A \cap X) + \lambda^*(A \cap (\mathbb{R} - X))$.
- A zatem $A \in \mathcal{L}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jakkolwiek podzielimy zbiór A na dwa rozłączne podzbiory, to suma ich zewnętrznych miar Lebesque'a nie przekroczy zewnętrznej miary Lebesgue'a całego zbioru A.
- Można udowodnić, że warunek ten gwarantuje to właśnie, czego pożądaliśmy: zewnętrzna miara Lebesgue'a zbioru $A \in \mathcal{L}$ wystarczająco dobrze charakteryzuje „wielkość" zbioru A, intuicyjnie mówiąc.

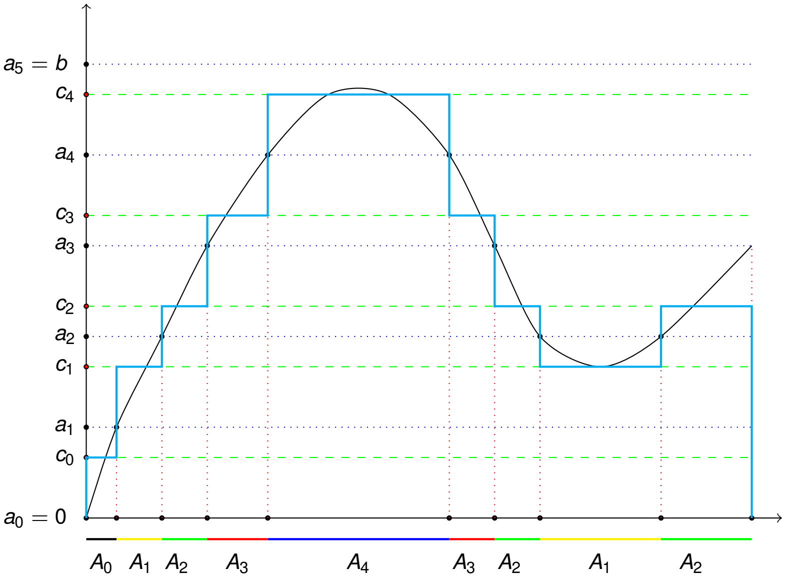
- Dowodzi się, że $\mathcal{L}$ jest σ-algebrą, a zatem $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ jest przestrzenią mierzalną. Dla zbiorów $A \in \mathcal{L}$ określamy ich *miarę Lebesgue'a* $\lambda(A)$ w sposób następujący: $\lambda(A) = \lambda^*(A)$.
- Łatwo sprawdzić, że λ istotnie jest miarą w przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

- Wszystkie zbiory borelowskie są mierzalne w sensie Lebesgue'a. Dla $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ zachodzi równość: $\mu(A) = \lambda(A)$. Oznacza to, między innymi, że wartości miary Lebesgue'a pokrywają się z wartościami, które charakteryzują długość, pole powierzchni oraz objętość w znanych ze szkoły, dobrze oswojonych przypadkach.
- Każdy zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a jest sumą zbioru borelowskiego i zbioru miary 0 Lebesgue'a. Inaczej mówiąc: zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a różnią się „zaniedbywalnie mało” od zbiorów borelowskich.

- Każdy skończony lub przeliczalny podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ ma miarę Lebesgue'a równą 0. W szczególności, $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, czyli zbiór wszystkich liczb wymiernych ma miarę Lebesgue'a równą 0.
- Przy założeniu aksjomatu wyboru w teorii mnogości można udowodnić, że istnieją zbiory liczb rzeczywistych, które nie są mierzalne w sensie Lebesgue'a. W teorii mnogości Zermelo-Fraenkla bez aksjomatu wyboru nie można udowodnić istnienia zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a.

- Całka Riemanna funkcji f rozumiana była jako granica sum miar prostokątnych *pionowych* pasków pokrywających obszar pod wykresem funkcji f w przedziale $[a, b]$.
- Obecnie postąpimy w inny sposób. Intuicyjnie mówiąc, będziemy przybliżać miarę omawianego obszaru przez innego rodzaju prostokątne paski powstające przez podział przeciwdziedziny funkcji f.

Załóżmy, że przeciwdziedzina rozważanej funkcji zawarta jest w przedziale $[0, b]$. Dzielimy ten przedział na rozłączne podprzedziały o końcach: $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$. Wybieramy punkty pośrednie $c_i \in (a_i, a_{i+1}]$ dla $0 \leqslant i < n$.
Rozważmy teraz przeciwobrazy przedziałów $(a_i, a_{i+1}]$, czyli zbiory: $A_i = f^{-1}[(a_i, a_{i+1}]]$. Obszary $A_i \times [0, c_i]$ są parami rozłączne. Ich suma teoriomnogościowa przybliża obszar pod wykresem funkcji f.
Miara każdego takiego obszaru jest równa iloczynowi c_i przez miarę zbioru A_i, zależy ona zatem od tego, jaką funkcję miary weźmiemy pod uwagę. W konstrukcji całki Lebesgue'a bierzemy pod uwagę, jak domyślają się słuchacze, miarę Lebesgue'a.



$A_i = f^{-1}[(a_i, a_{i+1}]]$, $c_i \in (a_i, a_{i+1}]$ dla $0 \leqslant i < 5$

Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją *mierzalną* (w sensie Lebesgue'a), gdy przeciwobraz każdego przedziału niewłaściwego (c, ∞) jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, czyli gdy $f^{-1}[(c, \infty)] \in \mathcal{L}$. Można udowodnić, że ten warunek jest równoważny żądaniu, aby przeciwobraz każdego zbioru borelowskiego był mierzalny w sensie Lebesgue'a. Dowodzi się również, że zbiór funkcji mierzalnych jest zamknięty na podstawowe operacje algebraiczne oraz różnego rodzaju granice punktowe ciągów funkcyjnych.

Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją prostą*, gdy:

- jej przeciwdziedzina jest zbiorem skończonym (czyli gdy f przyjmuje tylko skończenie wiele wartości) oraz
- dla każdej liczby c_i będącej wartością funkcji f przeciwobraz $A_i = f^{-1}(c_i)$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, czyli gdy $f^{-1}(c_i) \in \mathcal{L}$.

Jeśli f jest funkcją określoną na zbiorze mierzalnym w sensie Lebesgue'a (o wartościach w $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) to możemy zapisać tę funkcję w postaci $f = f^+ - f^-$, gdzie:

- $f^+(x) = f(x)$ gdy $f(x) > 0$, zaś $f^+(x) = 0$ w przeciwnym przypadku;
- $f^-(x) = -f(x)$ gdy $f(x) < 0$, zaś $f^-(x) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Wtedy f^+ oraz f^- są obie funkcjami nieujemnymi oraz $|f| = f^+ + f^-$.

Całkę Lebesgue'a $\int\limits_D f(x)d\lambda$ z dowolnej funkcji mierzalnej, gdzie $D \in \mathcal{L}$ jest obszarem całkowania (dziedziną funkcji f) definiujemy zwykle w kilku krokach (przypominamy, że χ_X oznacza funkcję charakterystyczną zbioru X):

$\int \chi_D(x) d\lambda = \lambda(D)$.
Jeżeli f jest nieujemną funkcją prostą $f(x) = \sum c_i \cdot \chi_{A_i}(x)$, to:
$\int f(x) d\lambda = \int (c_i \cdot \chi_{A_i}(x)) d\lambda = \sum\limits_k c_i \cdot \int \chi_{A_i}(x) d\lambda = \sum\limits_k c_i \cdot \lambda(A_i)$.
Jeśli $A \subseteq D$ gdzie $A \in \mathcal{L}$ oraz $g(x) = \sum c_i \cdot \chi_{A_i}(x)$ jest funkcją prostą, to:
$\int\limits_A g(x) d\lambda = \int (\chi_A(x) \cdot g(x)) d\lambda = \sum\limits_k \lambda(A \cap A_i)$.
Jeśli f jest nieujemną funkcją mierzalną określoną na zbiorze D i wartościach w $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, to: $\int\limits_D f(x) d\lambda =$
$= \sup\{\int\limits_D g(x) d\lambda : 0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ gdzie $g(x)$ jest funkcją prostą$\}$.

Mówimy, że całka Lebesgue'a z dowolnej funkcji mierzalnej f *istnieje*, gdy co najmniej jedna z wielkości $\int\limits_D f^+(x)d\lambda$ oraz $\int\limits_D f^-(x)d\lambda$ jest skończona. Wtedy definiujemy:

$\int\limits_D f(x)d\lambda = \int\limits_D f^+(x)d\lambda - \int\limits_D f^-(x)d\lambda$.

Jeśli $\int\limits_D |f(x)|d\lambda$ ma wartość skończoną, to mówimy, że f jest *całkowalna w sensie Lebesgue'a*.

- Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną, całkowalną w sensie Riemanna, to f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a w przedziale $[a, b]$. Całki Riemanna i Lebesgue'a z funkcji f są wtedy równe: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda$.
- Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w $[a, b]$, to $\int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda = F(b) - F(a)$, gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną dla funkcji f.

- Funkcja ograniczona jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości jest zbiorem o mierze Lebesgue'a równej 0.
- Jeśli $\lambda(D) = 0$, to $\int\limits_D f(x)d\lambda = 0$ dla każdej funkcji f mierzalnej w sensie Lebesgue'a.

- Funkcja całkowalna w sensie Lebesgue'a w obszarze D jest skończona *prawie wszędzie* w D (czyli wszędzie w D, poza ewentualnie zbiorem miary 0 Lebesgue'a).
- Jeśli $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz zbiory A_n są parami rozłączne, to: $\int\limits_A f(x)d\lambda = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f(x)d\lambda$.

Symbol $d\lambda$ występujący w oznaczeniu całki Lebesgue'a $\int\limits_D f(x)d\lambda$ słuchacze zechcą traktować jako znak interpunkcyjny, wskazujący, iż całkowanie wykonujemy biorąc pod uwagę miarę Lebesgue'a.