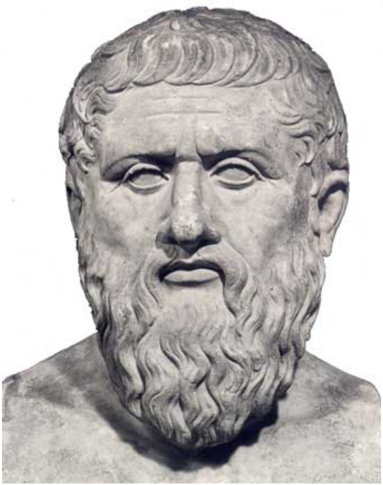
O tym, jak Herakles walczył z hydrą, czyli o potędze i słabościach matematyki

Roman Murawski
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Wydział Matematyki i Informatyki
Zakład Logiki Matematycznej



Platon

Euklides

Starożytny papirus z *Elementami* Euklidesa

EUKLIDESA
POCZĄTKÓW
JEOMETRYI
XIĄG OŚMIORO
TOIEST SZEŚĆ PIERWSZYCH, IEDENASTA i DWUNASTA
z DODANEMI PRZYPISAMI i TRYGONOMETRYĄ

DLA POŻYTKU MŁODZI AKADEMICKIEY TŁUMACZONE I WYDANE

PRZEZ

JÓZEFA CZECHA

FILOZOFII DOKTORA, W AKADEMII KRAKOWSKIEY PUBLICZNEGO PRZEDTEM MATEMATYKI POCZĄTKOWEY PROFESSORA: TERAZ DYREKTORA GIMNAZYUM WOŁYNSKIEGO, TOWARZYSTWA WARSZAWSKIEGO PRZYIACIÓŁ NAUK CZŁONKA.

z Figurami na miedzi rzniętemi Tablic 13.

w WILNIE
w DRUKARNI JOZEFA ZAWADZKIEGO
DRUKARZĄ AKADEMII WILENSKIEY.
1807.

JEOMETRYI EUKLIDESA.

XIĘGA PIERWSZA.

DEFINICYE, OPISANIA.

1. Punktém lub znakiém iest, co nié ma żadnych części, lub co nié ma żadnéy wielkości.

2. Liniia zaś iest długością bez szérokości.

3. Linii końce, czyli granicé, są punkta.

4. Liniia prostá iest, która między swoiémi punktami w równym i iednostaynym kierunku iest położoná.

5. Powiérzchniá iest to, co má tylko długość i szerokość.

6. Powiérzchni końcami czyli granicami są liniie.

7. Powiérzchnia płaská iest ta, na któréy

Baruch de Spinoza (1632-1677)

Etyka (1677)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Wzorzec dowodów politycznych (1659)

Isaak Newton (1643-1727)

Optyka (1704)

Giuseppe Peano (1858-1932)

Arithmetices principia nova methodo exposita (1889)

David Hilbert (1862-1943)

Grundlagen der Geometrie (1899)

Arytmetyka Peana PA

Arytmetyka Peana PA

Pojęcia pierwotne: $0, S, +, \cdot$

Arytmetyka Peana PA

Pojęcia pierwotne: $0, S, +, \cdot$

Aksjomaty pozalogiczne:

Arytmetyka Peana PA

Pojęcia pierwotne: $0, S, +, \cdot$

Aksjomaty pozalogiczne:

(A1) $\quad S(x) = S(y) \to x = y,$

Arytmetyka Peana PA

Pojęcia pierwotne: $0, S, +, \cdot$

Aksjomaty pozalogiczne:

$$\begin{array}{ll} \text{(A1)} & S(x) = S(y) \to x = y, \\ \text{(A2)} & \neg(0 = S(x)), \end{array}$$

Arytmetyka Peana PA

Pojęcia pierwotne: $0, S, +, \cdot$

Aksjomaty pozalogiczne:

(A1) $S(x) = S(y) \to x = y$,

(A2) $\neg(0 = S(x))$,

(A3) $x + 0 = x$,

Arytmetyka Peana PA

Pojęcia pierwotne: $0, S, +, \cdot$

Aksjomaty pozalogiczne:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(A1)} & S(x) = S(y) \to x = y, \\
\text{(A2)} & \neg(0 = S(x)), \\
\text{(A3)} & x + 0 = x, \\
\text{(A4)} & x + S(y) = S(x + y),
\end{array}
$$

Arytmetyka Peana PA

Pojęcia pierwotne: $0, S, +, \cdot$

Aksjomaty pozalogiczne:

(A1) $S(x) = S(y) \to x = y$,

(A2) $\neg(0 = S(x))$,

(A3) $x + 0 = x$,

(A4) $x + S(y) = S(x + y)$,

(A5) $x \cdot 0 = 0$,

Arytmetyka Peana PA

Pojęcia pierwotne: $0, S, +, \cdot$

Aksjomaty pozalogiczne:

(A1) $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$,

(A2) $\neg(0 = S(x))$,

(A3) $x + 0 = x$,

(A4) $x + S(y) = S(x + y)$,

(A5) $x \cdot 0 = 0$,

(A6) $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$,

Arytmetyka Peana PA

Pojęcia pierwotne: $0, S, +, \cdot$

Aksjomaty pozalogiczne:

(A1) $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$,

(A2) $\neg(0 = S(x))$,

(A3) $x + 0 = x$,

(A4) $x + S(y) = S(x + y)$,

(A5) $x \cdot 0 = 0$,

(A6) $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$,

(A7) $\varphi(0) \wedge \forall x[\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))] \longrightarrow \forall x \varphi(x)$.

Arytmetyka Peana PA

Model standardowy:

$$\mathfrak{N}_0 = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \cdot \rangle$$

Logika matematyczna XIX/XX wiek

Logika matematyczna XIX/XX wiek

George Boole

Logika matematyczna XIX/XX wiek

George Boole

Augustus De Morgan

Logika matematyczna XIX/XX wiek

George Boole

Augustus De Morgan

Gottlob Frege

Logika matematyczna XIX/XX wiek

George Boole

Augustus De Morgan

Gottlob Frege

Ernst Schröder

Logika matematyczna XIX/XX wiek

George Boole

Augustus De Morgan

Gottlob Frege

Ernst Schröder

Charles S. Peirce

Logika matematyczna XIX/XX wiek

George Boole

Augustus De Morgan

Gottlob Frege

Ernst Schröder

Charles S. Peirce

Bertrand Russell

Zakładano milcząco, że:

Zakładano milcząco, że:

- wszelka wiedza matematyczna może być oparta na adekwatnym zbiorze aksjomatów,

Zakładano milcząco, że:

- wszelka wiedza matematyczna może być oparta na adekwatnym zbiorze aksjomatów,
- można dobrać dla każdej dziedziny matematyki adekwatny zestaw aksjomatów, w oparciu o który można rozwiązać każdy dotyczący jej problem (zupełny układ aksjomatów).

Wiek XIX – wyniki jakościowo nowe

Wiek XIX – wyniki jakościowo nowe

trzy problemy starożytne:

Wiek XIX – wyniki jakościowo nowe

trzy problemy starożytne:

- podwojenie sześcianu

Wiek XIX – wyniki jakościowo nowe

trzy problemy starożytne:

- podwojenie sześcianu
- trysekcja kąta

Wiek XIX – wyniki jakościowo nowe

trzy problemy starożytne:

- podwojenie sześcianu
- trysekcja kąta
- kwadratura koła

Wiek XIX – wyniki jakościowo nowe

trzy problemy starożytne:

- podwojenie sześcianu
- trysekcja kąta
- kwadratura koła

NIEROZWIĄZALNE

Wiek XIX – wyniki jakościowo nowe

geometrie nieeuklidesowe (około 1830)

Wiek XIX – wyniki jakościowo nowe

geometrie nieeuklidesowe (około 1830)

Mikołaj I. Łobaczewski

Wiek XIX – wyniki jakościowo nowe

geometrie nieeuklidesowe (około 1830)

Mikołaj I. Łobaczewski

Janos Bolyai

Wiek XIX – wyniki jakościowo nowe

geometrie nieeuklidesowe (około 1830)

Mikołaj I. Łobaczewski

Janos Bolyai

Karl Friedrich Gauss

Istota matematyki czystej polega na wyprowadzaniu twierdzeń z postulowanych założeń (aksjomatów) a nie na rozstrzyganiu prawdziwości tych założeń.

Istota matematyki czystej polega na wyprowadzaniu twierdzeń z postulowanych założeń (aksjomatów) a nie na rozstrzyganiu prawdziwości tych założeń.

"Matematyka czysta jest dziedziną, w której nie wiadomo, o czym się mówi, nie wiadomo też, czy to, co się mówi, jest prawdziwe." (Russell, 1949)

Kurt Gödel (1906-1978)

Kurt Gödel i Albert Einstein

Kurt Gödel

Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme. I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931), 173–198.

PIERWSZE TWIERDZENIE GÖDLA

Jeżeli arytmetyka Peana PA jest niesprzeczna, to istnieje zdanie φ_G języka PA nierozstrzygalne w PA, tzn. takie, że PA $\nvdash \varphi_G$ oraz PA $\nvdash \neg\varphi_G$.

PIERWSZE TWIERDZENIE GÖDLA

Jeżeli arytmetyka Peana PA jest niesprzeczna, to istnieje zdanie φ_G języka PA nierozstrzygalne w PA, tzn. takie, że PA $\nvdash \varphi_G$ oraz PA $\nvdash \neg\varphi_G$.

Zatem arytmetyka Peana PA jest teorią niezupełną.

PIERWSZE TWIERDZENIE GÖDLA

Jeżeli arytmetyka Peana PA jest niesprzeczna, to istnieje zdanie φ_G języka PA nierozstrzygalne w PA, tzn. takie, że PA $\nvdash \varphi_G$ oraz PA $\nvdash \neg\varphi_G$.

Zatem arytmetyka Peana PA jest teorią niezupełną.

To samo zachodzi dla każdego niesprzecznego rozszerzenia PA opartego na rekurencyjnym (efektywnie danym) układzie aksjomatów.

DRUGIE TWIERDZENIE GÖDLA

Jeżeli arytmetyka Peana PA jest niesprzeczna, to zdanie „PA jest niesprzeczna” nie jest twierdzeniem PA, tzn. arytmetyka PA nie dowodzi swojej własnej niesprzeczności. Podobnie dla każdej teorii rozszerzającej arytmetykę PA.

arytmetyzacja (gödlizacja) składni

arytmetyzacja (gödlizacja) składni

$\varphi \mapsto \ulcorner\varphi\urcorner$ (= liczba naturalna, numer Gödla formuły φ).

arytmetyzacja (gödlizacja) składni

$\varphi \mapsto \ulcorner\varphi\urcorner$ (= liczba naturalna, numer Gödla formuły φ).

Paradoks kłamcy (paradoks Eubulidesa):

arytmetyzacja (gödlizacja) składni

$\varphi \mapsto \ulcorner\varphi\urcorner$ (= liczba naturalna, numer Gödla formuły φ).

Paradoks kłamcy (paradoks Eubulidesa):

„ja zawsze kłamię”

zdanie Gödla φ_G: „ja nie jestem twierdzeniem" zdanie Gödla φ_G: „ja nie jestem twierdzeniem”

φ_G prawdziwe, ale niedowodliwe w PA zdanie Gödla φ_G: „ja nie jestem twierdzeniem”

φ_G prawdziwe, ale niedowodliwe w PA

zatem: φ_G nierozstrzygalne w PA

zdanie φ_G ma treść metamatematyczną (a nie wprost matematyczną)

zdanie φ_G ma treść metamatematyczną (a nie wprost matematyczną)

lata 70-te i 80-te XX wieku – przykłady zdań nierozstrzygalnych o treści wprost matematycznej

zdanie φ_G ma treść metamatematyczną (a nie wprost matematyczną)

lata 70-te i 80-te XX wieku – przykłady zdań nierozstrzygalnych o treści wprost matematycznej

J. Paris

L. Harrington

L. Kirby

Zdanie Goodsteina-Kirby'ego–Parisa

Zdanie Goodsteina-Kirby'ego–Parisa

Reprezentacja liczby m przy zasadzie n:

Zdanie Goodsteina-Kirby'ego–Parisa

Reprezentacja liczby m przy zasadzie n:

przedstawić liczbę m jako sumę potęg liczby n, to samo zrobić
z wszystkimi wykładnikami
itd.

Zdanie Goodsteina-Kirby'ego–Parisa

Reprezentacja liczby m przy zasadzie n:

przedstawić liczbę m jako sumę potęg liczby n, to samo zrobić z wszystkimi wykładnikami
itd.

$m = 266, n = 2$

Zdanie Goodsteina-Kirby'ego–Parisa

Reprezentacja liczby m przy zasadzie n:

przedstawić liczbę m jako sumę potęg liczby n, to samo zrobić
z wszystkimi wykładnikami
itd.

$m = 266, n = 2$
$266 = 2^8 + 2^3 + 2^1$

Zdanie Goodsteina-Kirby'ego–Parisa

Reprezentacja liczby m przy zasadzie n:

przedstawić liczbę m jako sumę potęg liczby n, to samo zrobić
z wszystkimi wykładnikami
itd.

$m = 266, n = 2$
$266 = 2^8 + 2^3 + 2^1$
$266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$

Liczba $G_n(m)$:

Liczba $G_n(m)$:

jeżeli $m = 0$, to $G_n(m) = 0$

Liczba $G_n(m)$:

jeżeli $m = 0$, to $G_n(m) = 0$

jeżeli $m \neq 0$, to $G_n(m)$ jest liczbą otrzymaną przez zastąpienie w reprezentacji liczby m przy zasadzie n liczby n przez $n + 1$ i odjęcie 1

Liczba $G_n(m)$:

jeżeli $m = 0$, to $G_n(m) = 0$

jeżeli $m \neq 0$, to $G_n(m)$ jest liczbą otrzymaną przez zastąpienie w reprezentacji liczby m przy zasadzie n liczby n przez $n + 1$ i odjęcie 1

$$\begin{aligned} G_2(266) &= 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 - 1 = \\ &= 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \end{aligned}$$

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

$$m_0 = m, m_1 = G_2(m_0), m_2 = G_3(m_1), \ldots$$

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

$$m_0 = m, m_1 = G_2(m_0), m_2 = G_3(m_1), \ldots$$

$$m_0 = m, m_{k+1} = G_{k+2}(m_k)$$

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

$m_0 = m, m_1 = G_2(m_0), m_2 = G_3(m_1), \ldots$

$m_0 = m, m_{k+1} = G_{k+2}(m_k)$

$$m_0 \quad = \quad 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$$

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

$m_0 = m, m_1 = G_2(m_0), m_2 = G_3(m_1), \ldots$

$m_0 = m, m_{k+1} = G_{k+2}(m_k)$

$$\begin{aligned} m_0 &= 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 \\ m_1 &= G_2(m_0) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \end{aligned}$$

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

$m_0 = m, m_1 = G_2(m_0), m_2 = G_3(m_1), \dots$

$m_0 = m, m_{k+1} = G_{k+2}(m_k)$

$$\begin{aligned} m_0 &= 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 \\ m_1 &= G_2(m_0) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \approx 10^{38} \end{aligned}$$

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

$$m_0 = m, m_1 = G_2(m_0), m_2 = G_3(m_1), \ldots$$

$$m_0 = m, m_{k+1} = G_{k+2}(m_k)$$

$$\begin{aligned} m_0 &= 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 \\ m_1 &= G_2(m_0) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \approx 10^{38} \\ m_2 &= G_3(m_1) = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \end{aligned}$$

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

$m_0 = m, m_1 = G_2(m_0), m_2 = G_3(m_1), \ldots$

$m_0 = m, m_{k+1} = G_{k+2}(m_k)$

$$\begin{aligned} m_0 &= 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 \\ m_1 &= G_2(m_0) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \approx 10^{38} \\ m_2 &= G_3(m_1) = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx 10^{616} \end{aligned}$$

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

$m_0 = m, m_1 = G_2(m_0), m_2 = G_3(m_1), \ldots$

$m_0 = m, m_{k+1} = G_{k+2}(m_k)$

$$
\begin{aligned}
m_0 &= 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 \\
m_1 &= G_2(m_0) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \approx 10^{38} \\
m_2 &= G_3(m_1) = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx 10^{616} \\
m_3 &= G_4(m_2) = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}
\end{aligned}
$$

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

$m_0 = m, m_1 = G_2(m_0), m_2 = G_3(m_1), \ldots$

$m_0 = m, m_{k+1} = G_{k+2}(m_k)$

$$
\begin{aligned}
m_0 &= 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 \\
m_1 &= G_2(m_0) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \approx 10^{38} \\
m_2 &= G_3(m_1) = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx 10^{616} \\
m_3 &= G_4(m_2) = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \approx 10^{10000}
\end{aligned}
$$

Ciąg Goodsteina dla liczby m:

$m_0 = m, m_1 = G_2(m_0), m_2 = G_3(m_1), \ldots$

$m_0 = m, m_{k+1} = G_{k+2}(m_k)$

$$\begin{aligned}
m_0 &= 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 \\
m_1 &= G_2(m_0) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \approx 10^{38} \\
m_2 &= G_3(m_1) = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx 10^{616} \\
m_3 &= G_4(m_2) = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \approx 10^{10000}
\end{aligned}$$

itd.

$\varphi_1 :$ $\forall m \exists k (m_k = 0)$

$\varphi_1 : \qquad \forall m \exists k (m_k = 0)$

zdanie φ_1 jest prawdziwe, ale niedowodliwe w arytmetyce PA

$\varphi_1: \qquad \forall m \exists k (m_k = 0)$

zdanie φ_1 jest prawdziwe, ale niedowodliwe w arytmetyce PA

zatem: φ_1 jest nierozstrzygalne w PA

$\varphi_1 : \qquad \forall m \exists k (m_k = 0)$

zdanie φ_1 jest prawdziwe, ale niedowodliwe w arytmetyce PA

zatem: φ_1 jest nierozstrzygalne w PA

dla $m = 4$ mamy $m_k = 0$ dla $k \geq 3 \cdot 2^{402653211} - 3 \approx 10^{121000000}$

$\varphi_1 : \qquad \forall m \exists k (m_k = 0)$

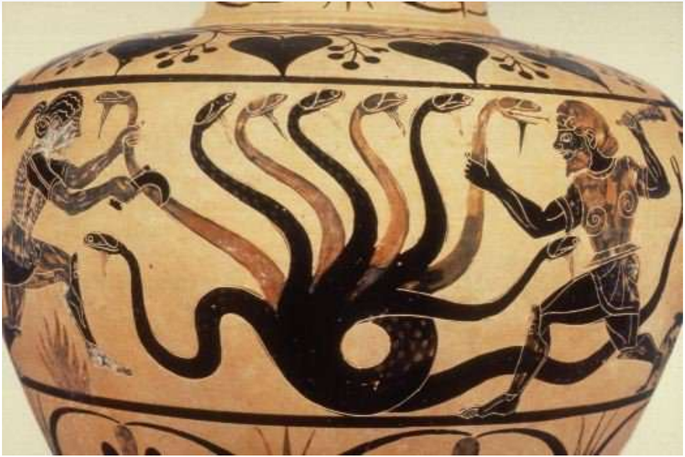
zdanie φ_1 jest prawdziwe, ale niedowodliwe w arytmetyce PA

zatem: φ_1 jest nierozstrzygalne w PA

dla $m = 4$ mamy $m_k = 0$ dla $k \geq 3 \cdot 2^{402653211} - 3 \approx 10^{121000000}$

liczba atomów we Wszechświecie $\approx 10^{80}$.

The Hydra.

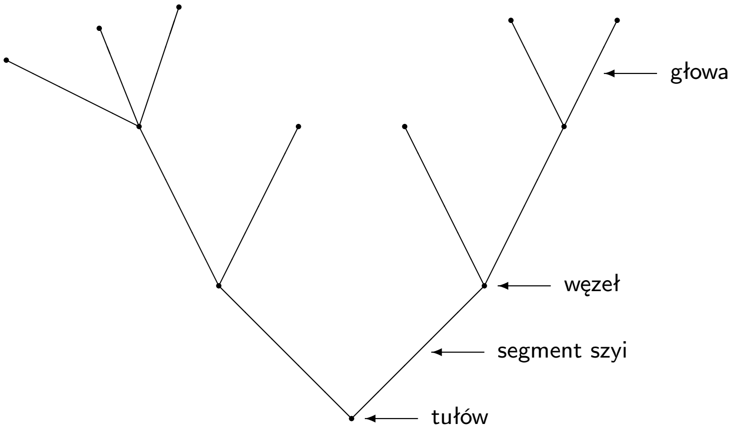


Herakles walczy z Hydrą

grecka waza z 525 p.n.e.

(kolekcja J. Paul Getty Museum, Malibu, California)

Walka Heraklesa z hydrą lernejską
grafika Antonio Pollaiuolo z końca XV wieku
(Galeria Uffizi we Florencji)


głowa
węzeł
segment szyi
tułów

W każdym kroku Herakles odcina jedną głowę.

W każdym kroku Herakles odcina jedną głowę.

Na miejscu odciętej głowy wyrasta nowa według następującej zasady:

W każdym kroku Herakles odcina jedną głowę.

Na miejscu odciętej głowy wyrasta nowa według następującej zasady:

jeśli w kroku n-tym (czyli n-tym cięciem miecza) Herakles odciął jakąś głowę, to z węzła odległego o 1 segment od głowy uciętej wyrasta n kopii tej części hydry, która po odcięciu głowy znajduje się powyżej węzła osiągniętego przez cofnięcie się o 1 segment

W każdym kroku Herakles odcina jedną głowę.

Na miejscu odciętej głowy wyrasta nowa według następującej zasady:

jeśli w kroku n-tym (czyli n-tym cięciem miecza) Herakles odciął jakąś głowę, to z węzła odległego o 1 segment od głowy uciętej wyrasta n kopii tej części hydry, która po odcięciu głowy znajduje się powyżej węzła osiągniętego przez cofnięcie się o 1 segment

jeśli ucięta głowa ma tułów jako jeden ze swoich węzłów, to nie wyrasta żadna nowa głowa

W każdym kroku Herakles odcina jedną głowę.

Na miejscu odciętej głowy wyrasta nowa według następującej zasady:

jeśli w kroku n-tym (czyli n-tym cięciem miecza) Herakles odciął jakąś głowę, to z węzła odległego o 1 segment od głowy uciętej wyrasta n kopii tej części hydry, która po odcięciu głowy znajduje się powyżej węzła osiągniętego przez cofnięcie się o 1 segment

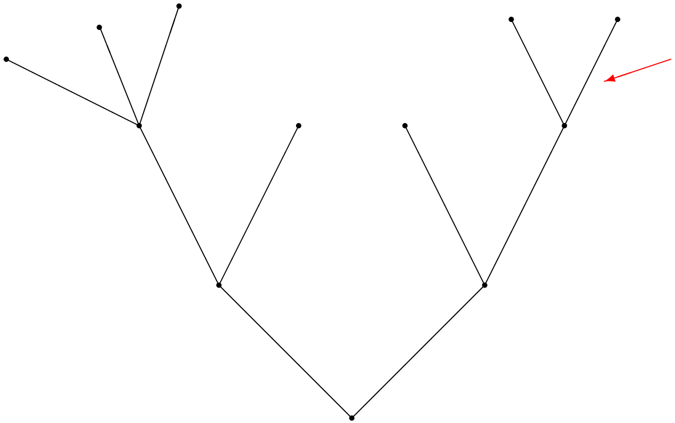
jeśli ucięta głowa ma tułów jako jeden ze swoich węzłów, to nie wyrasta żadna nowa głowa

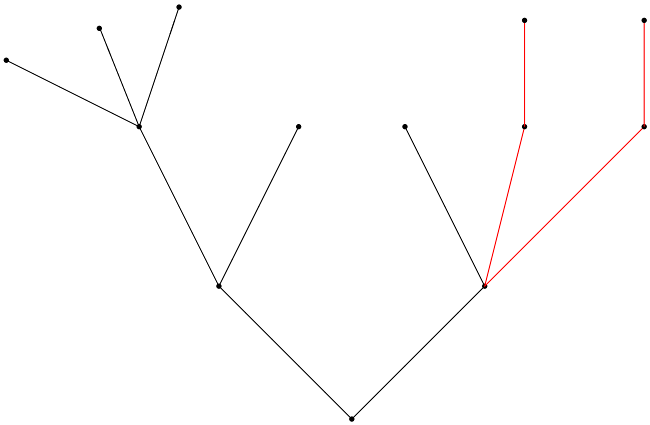
Herakles zwycięża, jeśli odetnie wszystkie głowy

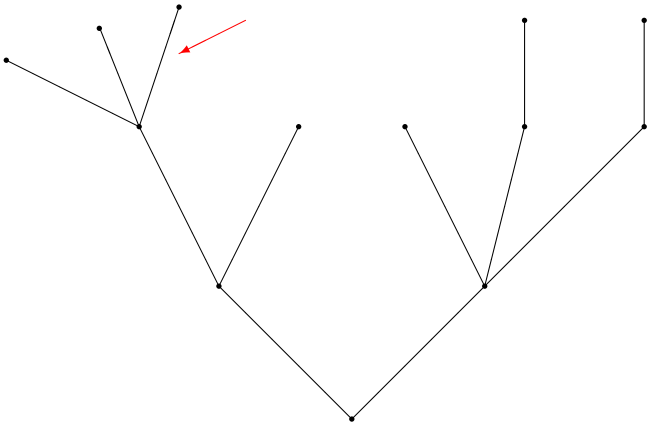
Posąg Heraklesa zabijającego Hydrę

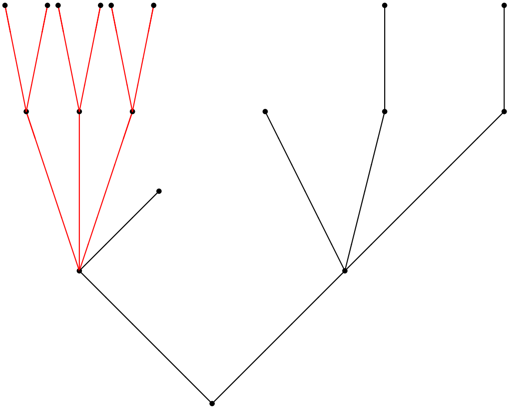
rzymska kopia greckiego oryginału z IV w.p.n.e.

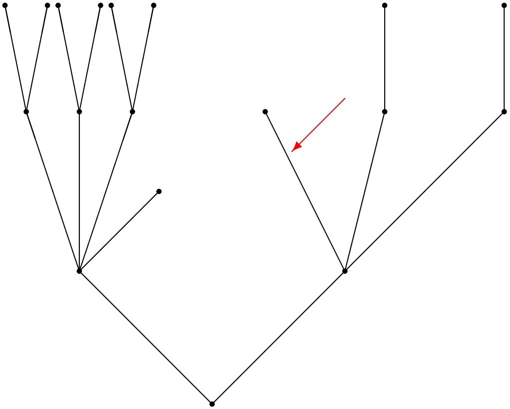
(Palazzo Nuovo, Rzym)

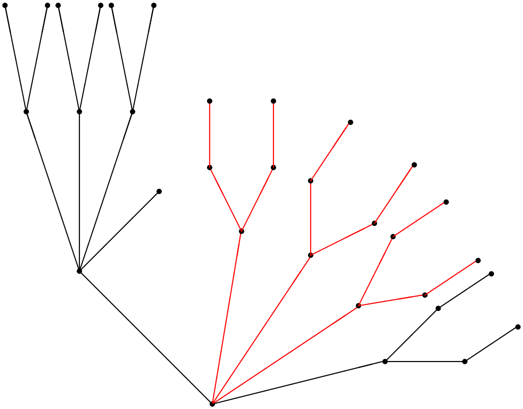












strategia = funkcja określająca, którą głowę należy odciąć na danym etapie walki

strategia = funkcja określająca, którą głowę należy odciąć na danym etapie walki

strategia zwycięska = strategia, która gwarantuje zwycięstwo

TWIERDZENIE Każda strategia jest dla Heraklesa zwycięska.

TWIERDZENIE Każda strategia jest dla Heraklesa zwycięska.

zdanie ψ: każda strategia efektywna (rekurencyjna) jest dla Heraklesa zwycięska

TWIERDZENIE Każda strategia jest dla Heraklesa zwycięska.

zdanie ψ: każda strategia efektywna (rekurencyjna) jest dla Heraklesa zwycięska

zdanie ψ jest prawdziwe

TWIERDZENIE Każda strategia jest dla Heraklesa zwycięska.

zdanie ψ: każda strategia efektywna (rekurencyjna) jest dla Heraklesa zwycięska

zdanie ψ jest prawdziwe

TWIERDZENIE Zdanie ψ jest prawdziwe, ale niedowodliwe w arytmetyce PA.

TWIERDZENIE Każda strategia jest dla Heraklesa zwycięska.

zdanie ψ: każda strategia efektywna (rekurencyjna) jest dla Heraklesa zwycięska

zdanie ψ jest prawdziwe

TWIERDZENIE Zdanie ψ jest prawdziwe, ale niedowodliwe w arytmetyce PA.

Zatem: zdanie ψ jest nierozstrzygalne w PA

Wnioski

Wnioski

- aksjomatyzacja – wygodne narzędzie ścisłego porządkowania i przekazywania wiedzy (matematycznej), najlepsze narzędzie, jakie ludzie wymyślili

Wnioski

- aksjomatyzacja – wygodne narzędzie ścisłego porządkowania i przekazywania wiedzy (matematycznej), najlepsze narzędzie, jakie ludzie wymyślili
- metoda aksjomatyczna nie daje pełnej wiedzy (nawet o liczbach naturalnych)

Wnioski

- aksjomatyzacja – wygodne narzędzie ścisłego porządkowania i przekazywania wiedzy (matematycznej), najlepsze narzędzie, jakie ludzie wymyślili
- metoda aksjomatyczna nie daje pełnej wiedzy (nawet o liczbach naturalnych)
- nie można całej matematyki zawrzeć w niesprzecznym systemie aksjomatycznym, w żadnym takim systemie nie można zawrzeć całości prawdy nawet o liczbach naturalnych

Wnioski

- aksjomatyzacja – wygodne narzędzie ścisłego porządkowania i przekazywania wiedzy (matematycznej), najlepsze narzędzie, jakie ludzie wymyślili
- metoda aksjomatyczna nie daje pełnej wiedzy (nawet o liczbach naturalnych)
- nie można całej matematyki zawrzeć w niesprzecznym systemie aksjomatycznym, w żadnym takim systemie nie można zawrzeć całości prawdy nawet o liczbach naturalnych
- niewyczerpywalność zasobu prawd matematycznych, nawet prawd arytmetycznych dotyczących liczb naturalnych

Wnioski

- konieczność stosowania metod nieskończonych nawet przy dowodzeniu twierdzeń o obiektach skończonych, jak liczby naturalne

Wnioski

- konieczność stosowania metod nieskończonych nawet przy dowodzeniu twierdzeń o obiektach skończonych, jak liczby naturalne
- dowodliwość $\neq$ prawdziwość

Wnioski

- konieczność stosowania metod nieskończonych nawet przy dowodzeniu twierdzeń o obiektach skończonych, jak liczby naturalne
- dowodliwość $\neq$ prawdziwość

$$\varphi \text{ dowodliwe} \longrightarrow \varphi \text{ prawdziwe}$$

Wnioski

- konieczność stosowania metod nieskończonych nawet przy dowodzeniu twierdzeń o obiektach skończonych, jak liczby naturalne
- dowodliwość $\neq$ prawdziwość

$$\varphi \text{ dowodliwe} \longrightarrow \varphi \text{ prawdziwe}$$

$$\textbf{ale nieprawda, że: } \varphi \text{ prawdziwe} \longrightarrow \varphi \text{ dowodliwe}$$

Wnioski

- konieczność stosowania metod nieskończonych nawet przy dowodzeniu twierdzeń o obiektach skończonych, jak liczby naturalne
- dowodliwość $\neq$ prawdziwość

$$\varphi \text{ dowodliwe} \longrightarrow \varphi \text{ prawdziwe}$$

$$\textbf{ale nieprawda, że: } \varphi \text{ prawdziwe} \longrightarrow \varphi \text{ dowodliwe}$$

- nie można *a priori* ograniczać metod stosowanych w matematyce, nie można ograniczać twórczej inwencji matematyków

Wnioski

- konieczność stosowania metod nieskończonych nawet przy dowodzeniu twierdzeń o obiektach skończonych, jak liczby naturalne
- dowodliwość $\neq$ prawdziwość

$$\varphi \text{ dowodliwe} \longrightarrow \varphi \text{ prawdziwe}$$

$$\textbf{ale nieprawda, że: } \varphi \text{ prawdziwe} \longrightarrow \varphi \text{ dowodliwe}$$

- nie można *a priori* ograniczać metod stosowanych w matematyce, nie można ograniczać twórczej inwencji matematyków
- nie ma (i nie będzie) absolutnych dowodów niesprzeczności w matematyce

Twierdzenia Gödla a sztuczna inteligencja

Twierdzenia Gödla a sztuczna inteligencja

Czy umysł ludzki działa tak, jak maszyna (komputer)?

Twierdzenia Gödla a sztuczna inteligencja

Czy umysł ludzki działa tak, jak maszyna (komputer)?

Czy pracę matematyka można zmechanizować i zautomatyzować?

Twierdzenia Gödla a sztuczna inteligencja

Czy umysł ludzki działa tak, jak maszyna (komputer)?

Czy pracę matematyka można zmechanizować i zautomatyzować?

NIE

Twierdzenia Gödla a sztuczna inteligencja

Czy umysł ludzki działa tak, jak maszyna (komputer)?

Czy pracę matematyka można zmechanizować i zautomatyzować?

NIE

Nie można twórczej pracy umysłu matematyka zastąpić w pełni pracą maszyny (komputera).

Twierdzenia Gödla a sztuczna inteligencja

Twierdzenia Gödla pokazują pewne granice możliwości poznawczych metody aksjomatycznej i granice możliwości maszyn (komputerów).

Twierdzenia Gödla a sztuczna inteligencja

Twierdzenia Gödla pokazują pewne granice możliwości poznawczych metody aksjomatycznej i granice możliwości maszyn (komputerów).

Czy pokazują też granice możliwości poznawczych człowieka?

Twierdzenia Gödla a sztuczna inteligencja

Twierdzenia Gödla pokazują pewne granice możliwości poznawczych metody aksjomatycznej i granice możliwości maszyn (komputerów).

Czy pokazują też granice możliwości poznawczych człowieka?

Umiemy rozstrzygać (przynajmniej niektóre) zdania nierozstrzygalne w danym systemie aksjomatycznym.

Twierdzenia Gödla a sztuczna inteligencja

Twierdzenia Gödla pokazują pewne granice możliwości poznawczych metody aksjomatycznej i granice możliwości maszyn (komputerów).

Czy pokazują też granice możliwości poznawczych człowieka?

Umiemy rozstrzygać (przynajmniej niektóre) zdania nierozstrzygalne w danym systemie aksjomatycznym.

Wydaje się więc, że odpowiedź jest negatywna.

Twierdzenia Gödla a sztuczna inteligencja

Twierdzenia Gödla pokazują pewne granice możliwości poznawczych metody aksjomatycznej i granice możliwości maszyn (komputerów).

Czy pokazują też granice możliwości poznawczych człowieka?

Umiemy rozstrzygać (przynajmniej niektóre) zdania nierozstrzygalne w danym systemie aksjomatycznym.

Wydaje się więc, że odpowiedź jest negatywna.

Ale czy jesteśmy w stanie odpowiedzieć na każde pytanie?