Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Funkcje

Ilościowe opisy zjawisk

- Pojęcie *funkcji* to jedno z najważniejszych pojęć matematycznych. W opisach *ilościowych*, które są charakterystyczne dla współczesnej nauki, używa się powszechnie tego pojęcia.
- Funkcje są formalnymi reprezentacjami sytuacji, gdy jakaś wielkość jest w sposób jednoznaczny zależna od innych wielkości.
- Rozważa się jednak całkiem ogólne sytuacje, a więc również te, w których zależność funkcyjna nie wiąże wielkości liczbowych, lecz elementy jednego zbioru z elementami innego zbioru.
- Z funkcjami spotykamy się bardzo wcześnie w procesie edukacji – tabliczki dodawania i mnożenia charakteryzują bowiem pewne funkcje, określone dla liczb i mające wartości liczbowe.

Uwaga na intuicyjne skojarzenia!

- W zależności od kontekstu, używa się określeń: funkcja, przyporządkowanie, odwzorowanie, przekształcenie, operacja, działanie, i in.
- Należy jednak wyraźnie podkreślić, że funkcje w matematyce są pewnymi zbiorami, a dokładniej: relacjami, spełniającymi stosowne warunki jednoznaczności.
- Czasami trudno uwolnić się od różnych intuicyjnych skojarzeń, motywowanych uzusem językowym i skłaniających np. do żywienia przekonań, że funkcje są jakimiś procesami, że za ich przyczyną coś „dzieje się” z rozważanymi obiektami.
- Pewna praktyka posługiwania się funkcjami pozwala na wyzwolenie się z tego typu złudnych przeświadczeń.

Pojęcie funkcji

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazwiemy każdą taką relację między elementami zbiorów X oraz Y, która nie zawiera żadnych dwóch par uporządkowanych mających te same poprzedniki oraz różne następniki.

- Innymi słowy, f jest *funkcją* ze zbioru X w zbiór Y, jeżeli:
  1. $f \subseteq X \times Y$
  2. dla dowolnych $x \in X$ oraz $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$: jeśli $(x, y_1) \in f$ i $(x, y_2) \in f$, to $y_1 = y_2$.
- Jeśli $(x, y) \in f$, to x nazywamy *argumentem* funkcji f, zaś y nazywamy *wartością* funkcji f (dla argumentu x). Zamiast pisać $(x, y) \in f$ zwykle piszemy $f(x) = y$.

Dziedzina i przeciwdziedzina

- *Dziedziną* funkcji $f \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór $dom(f)$ wszystkich jej argumentów, czyli zbiór tych wszystkich $x \in X$, dla których istnieje $y \in Y$ taki, że $y = f(x)$.
- *Przeciwdziedziną* (lub *zbiorem wartości*) funkcji $f \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór $rng(f)$ tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje $x \in X$ taki, że $y = f(x)$.

- Jeśli $f \subseteq X \times Y$ jest funkcją oraz jej dziedzina jest równa całemu zbiorowi X (czyli gdy $dom(f) = X$), to mówimy, że f jest określona w zbiorze X (lub: określona na zbiorze X). W takim przypadku używamy (znanego ze szkoły) zapisu $f : X \to Y$. Używa się wtedy określeń:
  1. funkcja f odwzorowuje X w Y
  2. funkcja f przekształca X w Y.

Przykłady

- Zbiór $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$ jest funkcją. Zapisujemy ją: $y = \frac{1}{x}$ lub $f(x) = \frac{1}{x}$. Mamy w tym przypadku: $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rng(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Relacja mniejszości $<$ liczb rzeczywistych nie jest funkcją.
- Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$, niech $\llcorner x \lrcorner$ będzie największą liczbą całkowitą, która nie przekracza x (czyli jest mniejsza lub równa x). Wtedy $\llcorner\ \lrcorner : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Tę funkcję nazywamy funkcją *podłogi*. Dualna do niej jest funkcja *sufitu* $\ulcorner\ \urcorner : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, która każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje najmniejszą liczbę całkowitą $\ulcorner x \urcorner$, która jest większa lub równa liczbie x. Dla przykładu: $\llcorner \pi \lrcorner = 3$, $\ulcorner \pi \urcorner = 4$.
- Dla dowolnego ustalonego uniwersum U, funkcjami są: $\{(X, \wp(X)) : X \subseteq U\}$ oraz $\{(X, X') : X \subseteq U\}$.

- Jeśli $f : X \times Y \to Z$, to argumentami funkcji f są pary uporządkowane $(x, y) \in X \times Y$, zaś jej wartościami są elementy zbioru Z. W takich przypadkach wartość funkcji f dla argumentu (x, y) oznaczamy przez $f(x, y)$. Mówimy też, że jest to funkcja *dwuargumentowa*. Należy przy tym pamiętać, że kolejność argumentów funkcji dwuargumentowej jest istotna.
- W całkiem podobny sposób określamy funkcje trójargumentowe, czteroargumentowe, itd. Ogólnie, mówimy, że f jest *funkcją n-argumentową* (*funkcją n zmiennych*), gdy $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to Y$, dla pewnych zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oraz Y.
- Dla dowolnego ustalonego uniwersum U, funkcjami dwuargumentowymi są: $\{((X, Y), X \cup Y) : X \subseteq U \text{ oraz } Y \subseteq Y\}$ oraz $\{((X, Y), X \cap Y) : X \subseteq U \text{ oraz } Y \subseteq Y\}$.
- Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ określona wzorem: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ jest trójargumentowa.

Będziemy wielokrotnie korzystać w dalszych wykładach niektórych funkcji, znanych są słuchaczom ze szkoły:

- Podstawowe działania arytmetyczne: dodawanie, mnożenie, odejmowanie, dzielenie.
- Dalsze operacje: potęgowanie, pierwiastkowanie, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna.
- Funkcje wielomianowe jednej zmiennej. W szczególności: funkcja liniowa oraz funkcja kwadratowa.
- Funkcje wymierne. Funkcja homograficzna.
- Funkcje trygonometryczne: sinus, cosinus, tangens, cotangens.
- Wartość bezwzględna.

Zachęcamy słuchaczy do przypomnienia sobie definicji wymienionych rodzajów funkcji.

Wygodnie będzie przyjąć oznaczenia:

1. $\mathbb{N}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych (czyli $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$)
2. $\mathbb{Z}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych (co jest tym samym co zbiór $\mathbb{N}_+$)
3. $\mathbb{Q}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych
4. $\mathbb{R}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych.

Iniekcje. Funkcja $f : X \to Y$ jest *iniekcją* ze zbioru X w zbiór Y, gdy różnym argumentom funkcji f przyporządkowane są różne jej wartości. Tak więc, $f : X \to Y$ jest *iniekcją* ze zbioru X w zbiór Y, gdy dla dowolnych $x_1 \in X$ oraz $x_2 \in X$, jeśli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jeśli f jest iniekcją, to mówimy, że f jest funkcją *różnowartościową*. Jeśli $f : X \to Y$ jest różnowartościowa, to stosujemy zapisy:

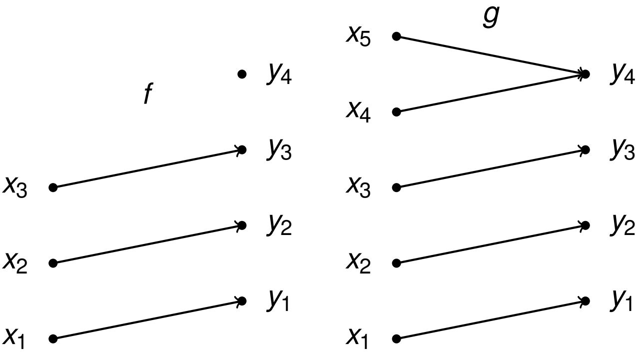
$f : X \xrightarrow[1-1]{} Y$ lub $f : X \xrightarrow{1-1} Y$

- *Surjekcje*. Funkcja $f : X \to Y$ jest *surjekcją* ze zbioru X na zbiór Y, gdy przeciwdziedziną funkcji f jest cały zbiór Y. Tak więc, $f : X \to Y$ jest *surjekcją* ze zbioru X na zbiór Y, gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$. Jeśli $f : X \to Y$ jest surjekcją, to stosujemy zapisy:

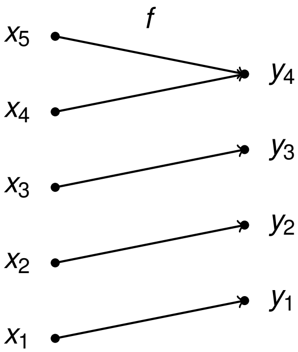
$$f : X \underset{na}{\longrightarrow} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow{na} Y$$

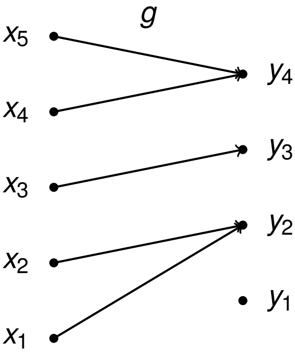
- *Bijekcje*. Funkcja $f : X \to Y$ jest *bijekcją* ze zbioru X na zbiór Y (albo: *bijekcją* między zbiorami X i Y), gdy f jest jednocześnie iniekcją z X w Y oraz surjekcją z X na Y. Bijekcje nazywamy funkcjami *wzajemnie jednoznacznymi* (także: $1-1$ funkcjami). Jeśli $f : X \to Y$ jest bijekcją, to stosujemy zapisy:

$$f : X \xrightarrow[1-1]{na} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$$

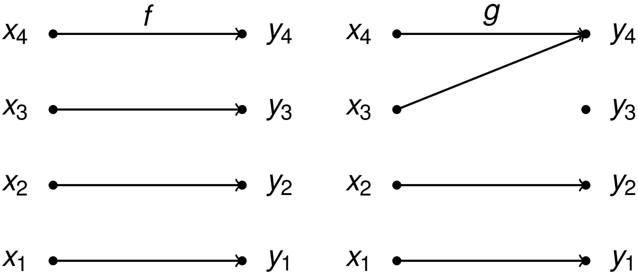


- Funkcja $f : \{x_1, x_2, x_3\} \to \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ jest iniekcją.
- Funkcja $g : \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \to \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ nie jest iniekcją.





- Funkcja $f : \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \to \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ jest surjekcją.
- Funkcja $g : \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \to \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ nie jest surjekcją.



- Funkcja $f : \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \to \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ jest bijekcją.
- Funkcja $g : \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \to \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ nie jest bijekcją.

- Funkcja $f(x) = 2x + 3$ jest bijekcją z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$.
- Funkcja $f(x) = x^2$ jest surjekcją z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}_+$. Nie jest ona surjekcją z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.

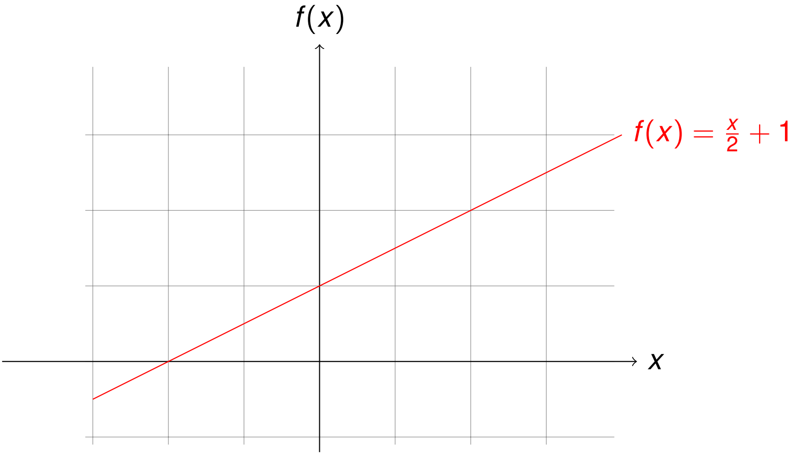
- Funkcje sufitu i podłogi są surjekcjami z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Z}$. Nie są surjekcjami z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Nie są bijekcjami z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Z}$.
- Bijekcje $f : X \to X$ nazywamy również (zwłaszcza w przypadku, gdy zbiór X jest skończony) *permutacjami* zbioru X.

- Dowolną funkcję, której dziedziną jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dla pewnej $n \in \mathbb{N}_+$ nazywamy *ciągiem skończonym* (o długości n). Wartości takiej funkcji nazywamy wtedy *wyrazami* tego ciągu: jej wartość dla k-tego argumentu nazywamy k-tym wyrazem ciągu. Zwykle ciągi skończone o długości n zapisujemy tak samo jak n-tki uporządkowane: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Jeśli żadne dwa wyrazy ciągu nie są identyczne, to ciąg nazywamy *różnowartościowym*.
- *Ciągiem nieskończonym* nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}_+$. Ciąg nieskończony o n-tym wyrazie równym a_n oznaczamy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ (czasem przez: $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_+}$). Często pomijamy indeks $n \in \mathbb{N}_+$, gdy kontekst na to pozwala. Czasem wyrazy ciągu indeksujemy elementami zbioru $\mathbb{N}$.

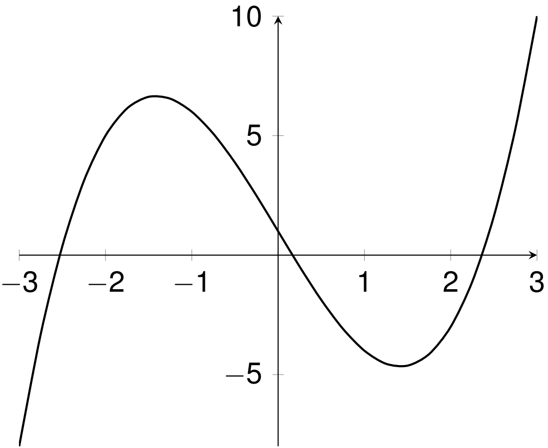
- Ciągi, których wyrazami są liczby, nazywamy ciągami *liczbowymi*.
- Podobnie, ciągi, których wyrazami są funkcje, nazywamy ciągami *funkcyjnymi*.

- Ciąg $(\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\})$ jest skończonym (różnowartościowym) ciągiem zbiorów, a ciąg $(1,2,3,4,3,2,1)$ jest skończonym ciągiem liczbowym, który nie jest różnowartościowy.
- Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, którego n-tym wyrazem jest $a_n = \frac{1}{n}$ jest nieskończonym ciągiem liczbowym, nazywanym *ciągiem harmonicznym*.
- Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, którego n-tym wyrazem jest funkcja, zdefiniowana wzorem $f_n(x) = \frac{1}{n}x$ jest przykładem ciągu funkcyjnego (dla $x \in \mathbb{R}$, powiedzmy).
- Ciąg $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, którego n-tym wyrazem jest n-ta liczba pierwsza p_n jest nieskończonym ciągiem liczbowym.
- Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych traktujemy jako ciągi: zerowym elementem jest część całkowita liczby rzeczywistej, a kolejne dalsze elementy rozwinięcia mają postać $\frac{c_n}{10^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, zaś c_n jest liczbą naturalną mniejszą od 10.

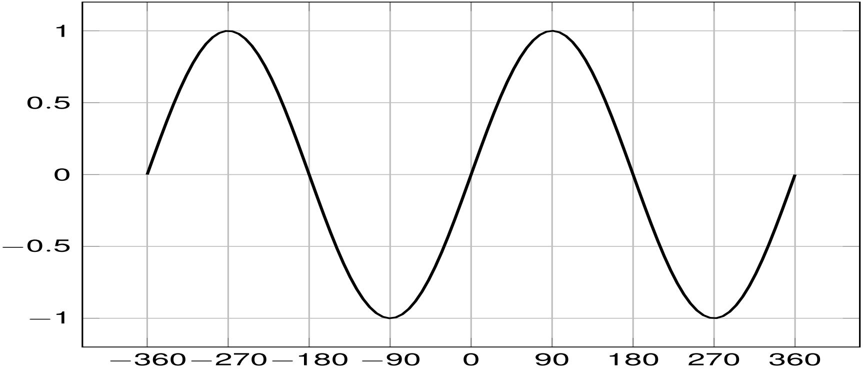
Pamiętamy, że relacje reprezentować można przez grafy. Ponieważ każda funkcja jest relacją, więc również funkcje mogą być reprezentowane przez grafy. Można również, w przypadku funkcji o dziedzinie skończonej, podawać jej reprezentację w postaci tabeli: wertykalnie – kolumna argumentów, kolumna odpowiadających im wartości (albo horyzontalnie – wiersz argumentów, wiersz odpowiadających im wartości). Bardziej rozpowszechniona jest jednak – dobrze znana słuchaczom ze szkoły – reprezentacja graficzna funkcji poprzez ich *wykresy*. Słuchacze pamiętają ze szkoły układ współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie. Gdy rysujemy wykres funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, to argumenty x tej funkcji tworzą *oś odciętych*, jej wartości $f(x)$ znajdują się na takim wykresie pionowo nad x na takiej wysokości, która odpowiada wartości $f(x)$. Rysujemy więc graf relacji $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$. Należy przy tym pamiętać, że na osi odciętych oraz osi rzędnych możemy używać różnej *skali*, co często znakomicie ułatwia zarówno rysowanie wykresów, jak też ich rozpoznawanie. Rozważmy kilka przykładów.



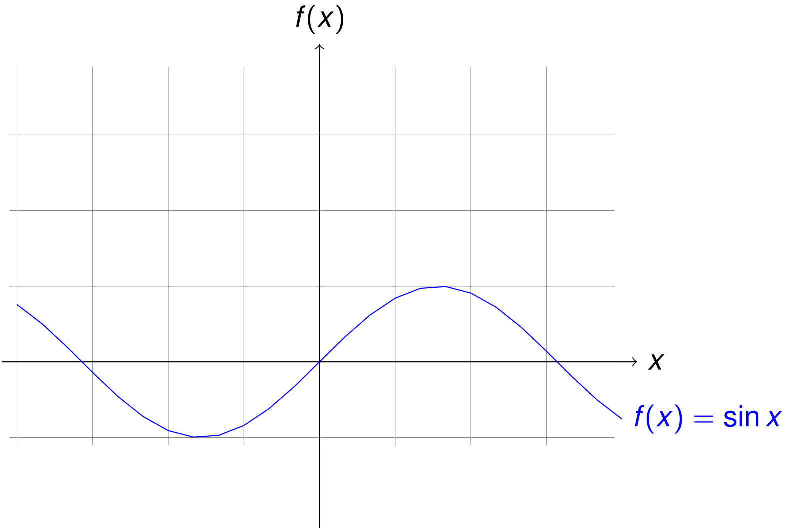
Funkcja $f(x) = \frac{x}{2} + 1$. Dziedziną i przeciwdziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Skala na osi odciętych jest taka sama jak na osi rzędnych (proste pionowe i poziome przechodzą przez punkty kratowe).



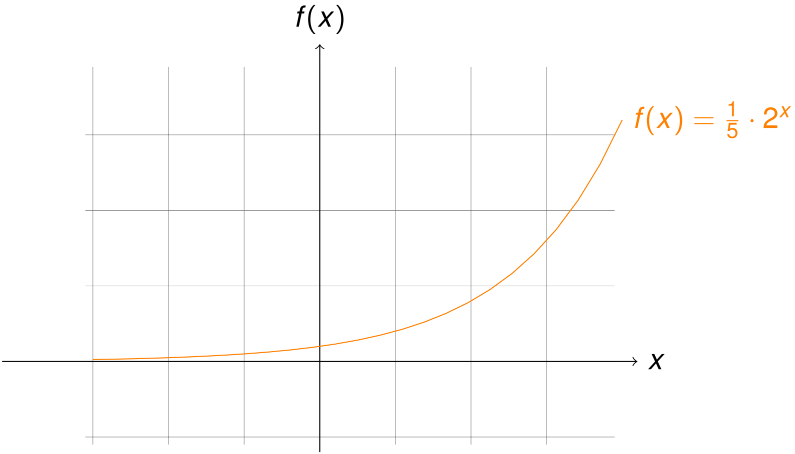
Funkcja $f(x) = x^3 - 6 \cdot x + 1$. Dziedziną i przeciwdziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Zauważmy, że skala na osi odciętych jest inna niż na osi rzędnych.



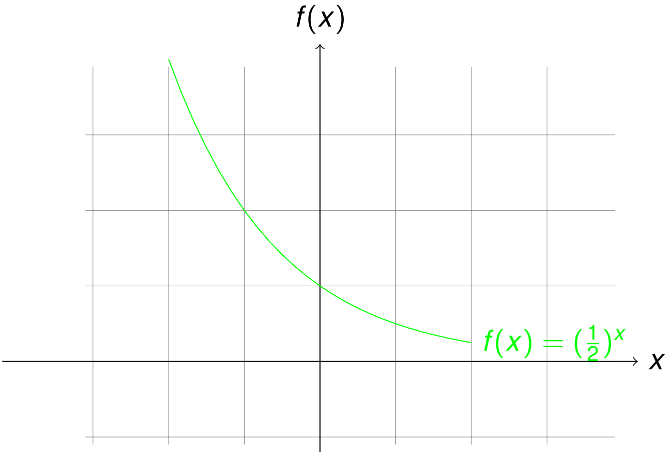
Funkcja $f(x) = \sin(x)$. Argumentami funkcji są wielkości kątowe mierzone w stopniach (tutaj w zakresie od -360 do 360 stopni), a jej wartościami liczby rzeczywiste w przedziale domkniętym $[-1, 1]$.



Funkcja $f(x) = \sin(x)$. Argumentami tej funkcji są liczby rzeczywiste, a jej wartościami liczby rzeczywiste w przedziale domkniętym $[-1, 1]$.

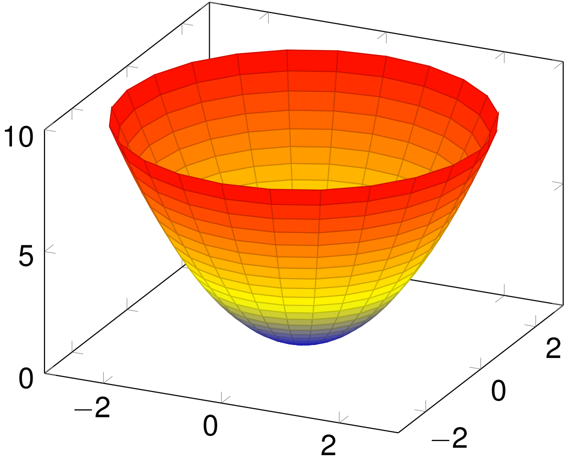


Funkcja $f(x) = \frac{1}{5} \cdot 2^x$. Dziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$, a jej przeciwdziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$ wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych. Skala na osi odciętych jest taka sama jak na osi rzędnych.



Funkcja $f(x) = (\frac{1}{2})^x$. Dziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$, a jej przeciwdziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$ wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych. Skala na osi odciętych jest taka sama jak na osi rzędnych.

Wykres funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych tworzymy przyporządkowując każdej parze (x, y) argumentów tej funkcji (reprezentowanej przez punkt na płaszczyźnie kartezjańskiej) punkt o współrzędnych $(x, y, f(x, y))$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Przykład: $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Przykładowe prezentacje ukazujące jak rysować wykresy funkcji wielu zmiennych:

1. https://www.youtube.com/watch?v=Q_NEbzFAdDE
2. https://www.youtube.com/watch?v=L3QEkUEsLbM

Narzędzia do rysowania wykresów funkcji, np.:

1. https://www.geogebra.org/
2. https://www.medianauka.pl/portal:matematyka
3. http://www.matemaks.pl/index.html
4. http://www.scilab.org/
5. http://fooplot.com/
6. https://rechneronline.de/function-graphs/
7. *MATLAB*, *Mathematica*, itp.

- Dysponując pojęciem funkcji, możemy podać formalną definicję zbiorów skończonych oraz nieskończonych. Możemy obiecać słuchaczom, że nasza Matematyczna Przygoda Edukacyjna stanie się naprawdę frapująca od momentu, gdy zaczniemy obcować z Nieskończonością.

- Mamy wszyscy dość dobre intuicje, jeśli chodzi o *skończone* kolekcje przedmiotów, nawet jeśli tych przedmiotów jest *bardzo dużo*.
- Nasuwającą się charakterystyką zbiorów skończonych jest wyrażenie *liczby ich elementów* poprzez jakąś liczbę naturalną: zbiór X jest *skończony*, gdy ma n elementów, dla pewnej $n \in \mathbb{N}$. W przeciwnym przypadku X jest *nieskończony*. Taka charakterystyka zakłada, że dobrze wiemy czym jest zbiór $\mathbb{N}$.
- Zdarza się, że potrafimy *udowodnić*, że jakiś zbiór jest skończony w powyższym sensie, ale nie potrafimy określić w sposób wyraźny dokładnej liczby jego elementów.
- Zdarza się i tak, że potrafimy wyrazić liczbę elementów jakiegoś zbioru jako wartość stosownej funkcji liczbowej, ale dokładne wypisanie tej wartości nie jest możliwe.

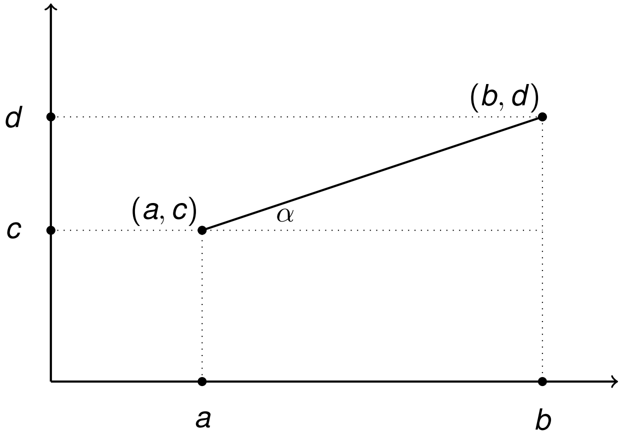
Zbiór $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych nie jest skończony. Udowodnimy to metodą nie wprost. Przypuśćmy, że zbiór $\mathbb{P}$ jest skończony. Niech zbiór ten zawiera elementy: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Mamy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, itd. Liczba p_n miałaby być największą liczbą pierwszą. Tworzymy iloczyn $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$. Następnie tworzymy sumę: $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Wtedy $p > p_n$. Liczba p jest bądź liczbą pierwszą, bądź liczbą złożoną. Gdyby p była liczbą złożoną, to musiałaby dzielić się bez reszty przez którąś z liczb pierwszych $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, powiedzmy przez p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. To jednak jest niemożliwe, ponieważ wtedy p_i musiałaby dzielić oba składniki sumy tworzącej p: zarówno iloczyn $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$, jak i liczbę 1. To jest niemożliwe, ponieważ liczba 1 nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą. Jeśli p jest liczbą pierwszą, to otrzymujemy sprzeczność z przypuszczeniem, że p_n jest największą liczbą pierwszą. W konsekwencji, musimy odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost i otrzymujemy tezę twierdzenia. Widzimy zatem, że zbiór $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych nie jest zbiorem skończonym.

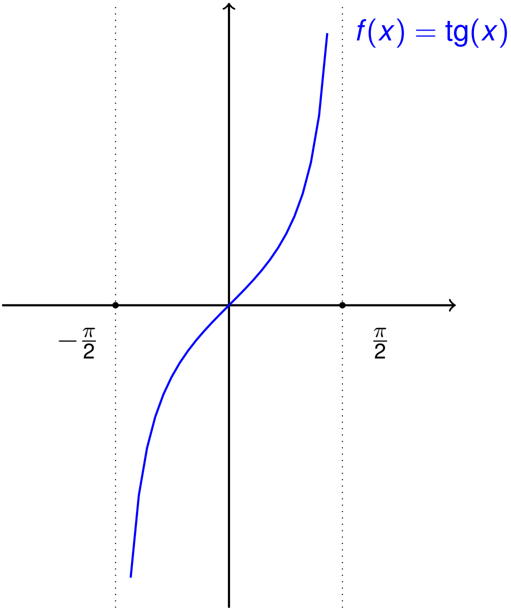
Mówimy, że zbiory X i Y są *równoliczne*, gdy istnieje bijekcja $f : X \to Y$.

- Zbiór pusty nie jest równoliczny z żadnym zbiorem niepustym.
- Zbiór wszystkich liczb parzystych jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Funkcja $f(n) = 2n$ jest bijekcją ze zbioru $\mathbb{N}$ na zbiór wszystkich liczb parzystych.
- Zbiór $\{1, 2, 3\}$ nie jest równoliczny ze zbiorem $\wp(\{1, 2, 3\})$. Za chwilę zobaczymy, że *żaden* zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.

- Każde dwa przedziały domknięte (długości dodatniej) w zbiorze liczb rzeczywistych są równoliczne. Niech $a < b$ oraz $c < d$. Bijekcją między przedziałami $[a, b]$ oraz $[c, d]$ jest funkcja określona dla $x \in [a, b]$ następująco: $f(x) = \frac{(d-c)x+bc-ad}{b-a}$. W innym zapisie: $f(x) = c + \frac{d-c}{b-a} \cdot (x - a)$.
- Przedział otwarty $(0, 1)$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}_+$. Równoliczność tę ustala np. bijekcja określona dla $x \in (0, 1)$ następująco: $f(x) = \frac{x}{1-x}$.
- Bijekcja $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ określona jest wzorem $f(x) = \mathrm{tg}(x)$.

Bijekcja $f : [a, b] \to [c, d]$ określona jest następująco:
$f(x) = c + \frac{d-c}{b-a} \cdot (x - a)$. Zauważmy, że $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{d-c}{b-a}$.




$f(x) = \mathrm{tg}(x)$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$

- Bijekcja $f : [0,1) \to [0,1]$ określona jest następująco:
  - $f(x) = 1$ dla $x = \frac{1}{2}$,
  - $f(x) = \frac{n-1}{n}$ dla $x = \frac{n}{n+1}$, gdzie $n \geqslant 2$,
  - $f(x) = x$ w pozostałych przypadkach.
- Mamy zatem:
  - $f(\frac{1}{2}) = 1$,
  - $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$,
  - $f(\frac{3}{4}) = \frac{2}{3}$,
  - $f(\frac{4}{5}) = \frac{3}{4}$,
  - $\ldots$

Definicja Dedekinda. Zbiór jest *nieskończony* (w sensie Dedekinda), gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest *skończony* (w sensie Dedekinda).

- Zbiór pusty jest skończony w sensie tej definicji.
- Zbiór $\{1, 2, 3\}$ jest skończony w sensie tej definicji.
- Zbiór $\mathbb{N}$ jest nieskończony w sensie tej definicji, albowiem jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym: zbiorem wszystkich liczb parzystych.
- Zbiór $\mathbb{Z}$ wszystkich liczb całkowitych jest nieskończony w sensie tej definicji, albowiem jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym $\mathbb{N}$. Stosowną bijekcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ otrzymujemy np. definiując: $f(n) = \frac{n}{2}$ dla n parzystych oraz $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ dla n nieparzystych.
- Można udowodnić, że dwie podane definicje zbiorów nieskończonych są równoważne.

Czy wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne?

Twierdzenie Cantora. *Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów*.

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost.

- Weźmy dowolny zbiór X i przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje bijekcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Określmy następujący element rodziny $\wp(X)$: $X_f = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$.
- Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Stąd i z definicji zbioru X_f otrzymujemy, iż: $x_f \in X_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_f \notin X_f$, a to jest *sprzeczność*.
- Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.

Konsekwencje twierdzenia Cantora

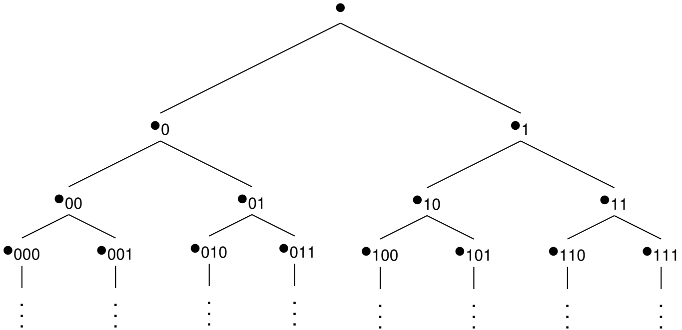
- Jednym z wniosków z tego twierdzenia jest to, że zbiór $\mathbb{N}$ nie jest równoliczny ze swoim zbiorem potęgowym $\wp(\mathbb{N})$. Oznacza to, że nie można ponumerować w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbami naturalnymi wszystkich zbiorów liczb naturalnych.
- Innym wnioskiem jest oczywiście to, że jeśli utworzymy nieskończony ciąg zbiorów nieskończonych:

$$(\mathbb{N}, \;\; \wp(\mathbb{N}), \;\; \wp(\wp(\mathbb{N})), \;\; \wp(\wp(\wp(\mathbb{N}))), \ldots),$$

  to żadne dwa wyrazy tego ciągu nie będą równoliczne.

Metoda użyta w dowodzie twierdzenia Cantora nazywa się *metodą przekątniową*. Wykorzystamy ją teraz do pokazania, że nie można ponumerować w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbami naturalnymi wszystkich gałęzi pełnego drzewa dwójkowego.

Pełne drzewo dwójkowe



Każdy z kolejnych wierzchołków ma dwóch bezpośrednich potomków. Wierzchołki (oprócz korzenia) kodujemy ciągami zer i jedynek. Jeśli jakiś wierzchołek ma kod s, to jego bezpośrednimi potomkami są wierzchołki o kodach: $s0$ oraz $s1$. *Gałęzią* nazwiemy każdy *nieskończony* ciąg złożony z zer i jedynek. Czy możliwe jest ponumerowanie (liczbami naturalnymi: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...) wszystkich gałęzi?

Metoda przekątniowa

- Przypuśćmy, że można ponumerować wszystkie gałęzie (czyli nieskończone ciągi zero-jedynkowe) liczbami naturalnymi (tu każda a_i^j jest zerem lub jedynką):
  $g_1 = a_1^1 a_1^2 a_1^3 \ldots$
  $g_2 = a_2^1 a_2^2 a_2^3 \ldots$
  $g_3 = a_3^1 a_3^2 a_3^3 \ldots$
  ...
- Rozważmy ciąg $G = b_1 b_2 b_3 \ldots$, gdzie:
  - jeśli $a_n^n = 0$, to $b_n = 1$
  - jeśli $a_n^n = 1$, to $b_n = 0$.

Wtedy ciąg G różni się od *każdego* z ciągów g_n (co najmniej na n-tym miejscu). Tak więc, jakkolwiek chcielibyśmy ponumerować wszystkie gałęzie pełnego drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi, to zawsze pozostaną gałęzie, dla których numerów nie starczy.

- Zbiory, które są równoliczne ze zbiorem $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych nazywamy *przeliczalnymi* (czasem: *przeliczalnie nieskończonymi*).
- Jeśli zbiór jest skończony lub przeliczalny, to mawia się, że jest *co najwyżej przeliczalny*.
- Jeśli zbiór X jest nieskończony, ale nie jest przeliczalny, to mówimy, że jest *nieprzeliczalny*.
- Jeśli zbiór X jest równoliczny ze zbiorem $\wp(\mathbb{N})$, to mówimy, że jest on zbiorem mocy *kontinuum*.

- Zbiór wszystkich liczb parzystych jest przeliczalny. Funkcja $f(n) = 2n$ jest bijekcją ze zbioru $\mathbb{N}$ na zbiór wszystkich liczb parzystych.
- Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wszystkich par uporządkowanych liczb naturalnych jest przeliczalny. Jedna z bijekcji między zbiorami $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}$ jest wyznaczona przez *funkcję pary Cantora*: $f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$. Czy widzisz jak wykorzystać ten fakt dla udowodnienia, że zbiór $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny?
- Zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Jest zbiorem mocy kontinuum.

- *Obcięciem* funkcji $f : X \to Y$ do zbioru $Z \subseteq X$ nazywamy funkcję $f|Z$ zdefiniowaną następująco:
  $f|Z = f \cap (Z \times Y) = \{(x, y) \in f : x \in Z\}$
- Jeśli funkcja g jest obcięciem funkcji f do pewnego zbioru, to f nazywamy *przedłużeniem* g. Tak więc, f jest przedłużeniem g, gdy $g = f|dom(g)$.
- Jeśli f jest funkcją różnowartościową, to zbiór $\{(y, x) : (x, y) \in f\}$ również jest funkcją, nazywaną *funkcją odwrotną* do funkcji f. Funkcję odwrotną do funkcji f oznaczamy zwykle przez f^{-1}. Tak więc, jeśli f jest funkcją z X w Y, to funkcja do niej odwrotna, czyli f^{-1} jest funkcją z Y w X.

- *Złożeniem* (*superpozycją*) funkcji f oraz g nazywamy funkcję $g \circ f$ zdefiniowaną następująco:
  $g \circ f = \{(x, z) \in dom(f) \times rng(g) :$
  $\text{istnieje } y \text{ taki, że } (x, y) \in f \text{ oraz } (y, z) \in g\}$
- Rozpatrując złożenie $g \circ f$, zwykle zakłada się, że $rng(f) \subseteq dom(g)$. Tak więc, jeśli f jest funkcją z X w Y, zaś g jest funkcją z Y w Z, to ich złożenie, czyli $g \circ f$ jest funkcją z X w Z. Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to wartość złożenia funkcji f oraz g dla argumentu $x \in dom(f)$ oznaczamy też $g(f(x))$.

- Obcięciem ciągu $(3,5,7,9,2,2,4)$ do zbioru $\{3,4,5\}$ jest ciąg $(7,9,2)$.
- Niech $f(x) = 2x + 3$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $g(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $(g \circ f)(x) = (2x+3)^2$, natomiast $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$.

- Niech $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$. Wtedy $(g \circ f)(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- Niech $f(x) = x^2$ dla $x \geqslant 0$. Wtedy $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$. Zauważmy, że jeśli rozpatrujemy funkcję $f(x) = x^2$ określoną na całym zbiorze $\mathbb{R}$, to funkcja do niej odwrotna nie istnieje, ponieważ w tej dziedzinie f nie jest różnowartościowa.
- Funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej jest funkcja logarytmiczna. Jeśli $y = a^x$, to $x = \log_a y$.
- Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq 0$ i jest różnowartościowa. Jest ona swoją własną funkcją odwrotną, czyli $f^{-1} = f$.

Niech X będzie dowolnym podzbiorem ustalonego uniwersum U. *Funkcją charakterystyczną* zbioru X (w tym uniwersum) nazywamy funkcję $\chi_X : U \to \{0, 1\}$, zdefiniowaną następująco:

1. Jeśli $x \in X$, to $\chi_X(x) = 1$
2. Jeśli $x \notin X$, to $\chi_X(x) = 0$.

Funkcja charakterystyczna zbioru jest zatem indykatorem przynależności elementów uniwersum do tego zbioru.

- Funkcja charakterystyczna zbioru wszystkich liczb parzystych w uniwersum $\mathbb{N}$ przyjmuje wartość 1 dla każdej liczby parzystej, a wartość 0 dla każdej liczby nieparzystej.
- Rozważmy funkcję charakterystyczną zbioru $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych w uniwersum $\mathbb{R}$. Tę funkcję nazywamy *funkcją Dirichleta*. Czy potrafisz wyobrazić sobie jak wygląda jej wykres?

Niech $f : X \to Y$, $A \subseteq dom(f)$, $B \subseteq rng(f)$.

1. *Obrazem* zbioru A względem funkcji f jest zbiór: $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$.
2. *Przeciwobrazem* zbioru B względem funkcji f jest zbiór: $f^{-1}[B] = \{x \in dom(f) : f(x) \in B\}$.

- Rozważmy funkcję $f(x) = 2x$ oraz przedział otwarty $(3, 4)$. Wtedy $f[(3, 4)] = (6, 8)$. Proponujemy sporządzić wykres.
- $|[\mathbb{R} - \mathbb{R}_+]| = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
- Przeciwobrazem zbioru $\{1\}$ względem funkcji Dirichleta jest zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.
- Niech $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz niech $B = (1, 2)$. Wtedy $f^{-1}[B] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 2\}$. Wtedy $f^{-1}[(1, 2)] = (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$. Narysuj wykres rozważanej funkcji, zaznacz na nim zbiór B i podaj interpretację geometryczną zbioru $f^{-1}[(1, 2)]$.

- *Opis językowy*. Funkcja może zostać określona przepisem otrzymywania jej wartości dla ustalonych argumentów. Przepis musi gwarantować istnienie oraz jednoznaczność wartości funkcji. Tak definiujemy np. funkcje podłogi oraz sufitu.
- *Jawny wzór*. Funkcja może zostać określona w postaci jawnego wzoru, ustalającego zależność między argumentami a wartościami. Np.: funkcja liniowa, kwadratowa, potęgowa, itd. są tak właśnie definiowane.

- *Definiowanie warunkowe*. Funkcja może być określona różnymi wzorami dla różnych fragmentów swojej dziedziny. Np.: *wartość bezwzględna* $|x|$ liczby rzeczywistej x: $|x| = x$ dla $x \geqslant 0$, a $|x| = -x$ dla $x < 0$.
- *Definicje przez indukcję*. Funkcja może być określona przez *wzory rekurencyjne*, określające jej wartości dla wybranego początkowego argumentu oraz formułujące przepis, jak otrzymywać dalsze wartości, gdy obliczone są już wartości wcześniejsze. Np.: dodawanie, mnożenie i potęgowanie liczb naturalnych, funkcja *silnia*.

Nieśmiertelne monogamiczne kazirodcze króliki

- Mamy Pierwszą Parę królików (samca i samicę). Chcemy obliczyć, ile par królików otrzymamy po n miesiącach przy założeniu, że każda para królików rodzi co miesiąc nową parę (samca i samicę), która staje się reproduktywna po miesiącu (i natychmiast z tego korzysta).
- Nadto, króliki żyją wiecznie, są monogamiczne i kazirodcze (począwszy od drugiej pary tylko brat z siostrą dają potomstwo; Pierwsza Para też kontynuuje prokreację), oraz nie ustają w rozmnażaniu. [Jest również wersja ze śmiertelnymi królikami.]

Ciąg Fibonacciego:

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ dla $n \geqslant 2$

Ciąg Mosera-Steinhausa

Wprowadźmy oznaczenia (oryginalna symbolika Steinhausa była inna):

1. $\triangle(n)$ oznacza n^n
2. $\square(n)$ oznacza iterowanie n razy operacji $\triangle$ dla argumentu n
3. $\bigstar(n)$ oznacza iterowanie n razy operacji $\square$ dla argumentu n.

Czy potrafisz obliczyć $\bigstar(2)$?

1. $\bigstar(2) = \square(\square(2)) = \square(\triangle(\triangle(2)))$
2. $\triangle(\triangle(2)) = \triangle(2^2) = \triangle(4) = 4^4 = 256$
3. $\bigstar(2) = \square(256) = \triangle(\triangle \ldots (\triangle(256) \ldots))$, gdzie operacja $\triangle$ wykonywana jest 256 razy.

Ciąg Mosera-Steinhausa

W notacji Steinhausa argumenty były umieszczane wewnątrz wielokątów. Konstrukcję: n w m p-kątach ($p \geqslant 3$) opisuje funkcja $M(n, m, p)$:

1. $M(n, 1, 3) = n^n$
2. $M(n, 1, p + 1) = M(n, n, p)$
3. $M(n, m + 1, p) = M(M(n, 1, p), m, p)$.

Liczba ★2 (czyli 2 w pięciokącie) nazywana jest czasem *mega*, zaś 2 w mega-kącie (czyli wielokącie o mega bokach) nosi nazwę *moser*. Liczbę ★10 (czyli 10 w pięciokącie) nazywa się *megiston*:

1. mega=$M(2, 1, 5)$
2. megiston=$M(10, 1, 5)$
3. moser=$M(2, 1, M(2, 1, 5))$.

Dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$:

- $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.
- $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$.
- $f[A] - f[B] \subseteq f[A - B]$.
- Jeśli $A \subseteq B$, to $f[A] \subseteq f[B]$.
- $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[A - B] = f^{-1}[A] - f^{-1}[B]$.
- Jeśli $A \subseteq B$, to $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

Jeśli $A \subseteq dom(f)$ i $B \subseteq rng(f)$, to:

- $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$, $f[f^{-1}[B]] = B$, $f[A] \cap B = f[A \cap f^{-1}[B]]$.
- $f[A] \cap B = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap f^{-1}[B] = \emptyset$.
- $f[A] \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq f^{-1}[B]$.

Myśl przekornie!

- Czy każda funkcja ma jakiś opis językowy?
- Czy można sporządzić wykres dowolnej funkcji?
- Co to znaczy, że jedna funkcja rośnie szybciej od drugiej?
- Czy argumentami funkcji mogą być funkcje?
- Czy wartościami funkcji mogą być funkcje?

- Ze szkoły znasz funkcję *silnia*, zdefiniowaną dla liczb naturalnych. Czy istnieje podobna do niej funkcja dla liczb rzeczywistych?
- Przypuśćmy, że Wszechświat jest skończony. Jaki jest wtedy sens mówienia o zbiorach nieskończonych?

Co musisz ZZZ (Zapamiętać-Ze-Zrozumieniem)

- Definicja funkcji, argument i wartość funkcji, jej dziedzina i przeciwdziedzina, obrazy i przeciwobrazy zbiorów względem funkcji.
- Iniekcje, surjekcje, bijekcje.
- Złożenie funkcji, funkcja odwrotna, obcięcie funkcji, funkcja charakterystyczna zbioru.
- Wykres funkcji (zmiennej rzeczywistej).
- Równoliczność zbiorów.
- Zbiory nieskończone (w sensie Dedekinda).
- Twierdzenie Cantora.
- Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne.
- Zbiory mocy kontinuum.