Argumenty „z intuicji matematycznej”

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

ArgDiaP 2011

Intuicja i dowód w matematyce

Dwa filary matematyki:

- intuicja matematyczna
- dedukcja.

Dwa sposoby posługiwania się intuicją matematyczną:

- *Globalnie*. Dla rozwijania nowych teorii.
- *Lokalnie*. Dla wspomagania rozumienia dowodów i konstrukcji.

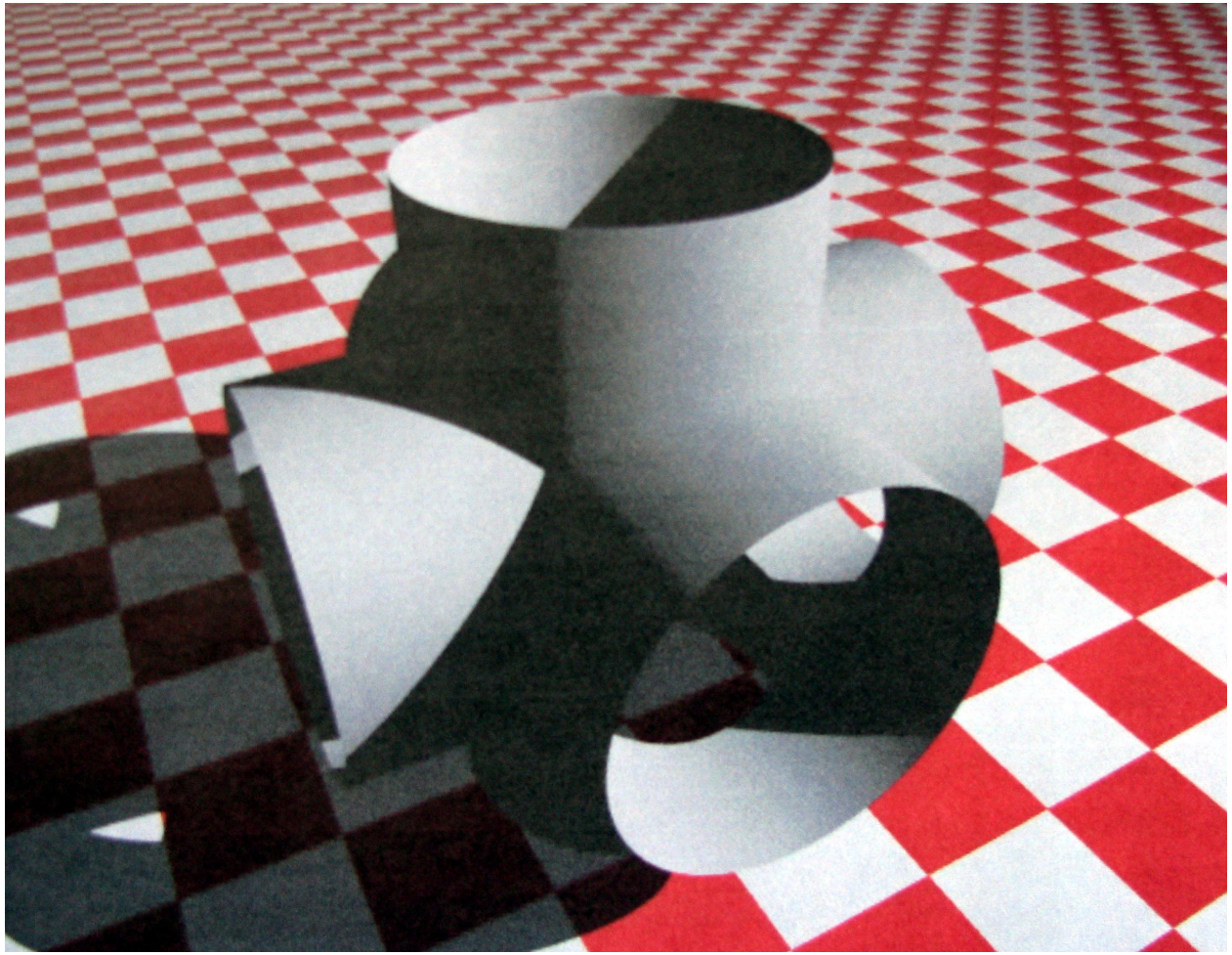
„Humanistka to ktoś, kto nie rozumie matematyki.” Przy założeniu bożej ingerencji w matematyczność Przyrody, Bóg nie może być więc Humanistką.

Obywatele, filozofowie, matematycy o intuicji

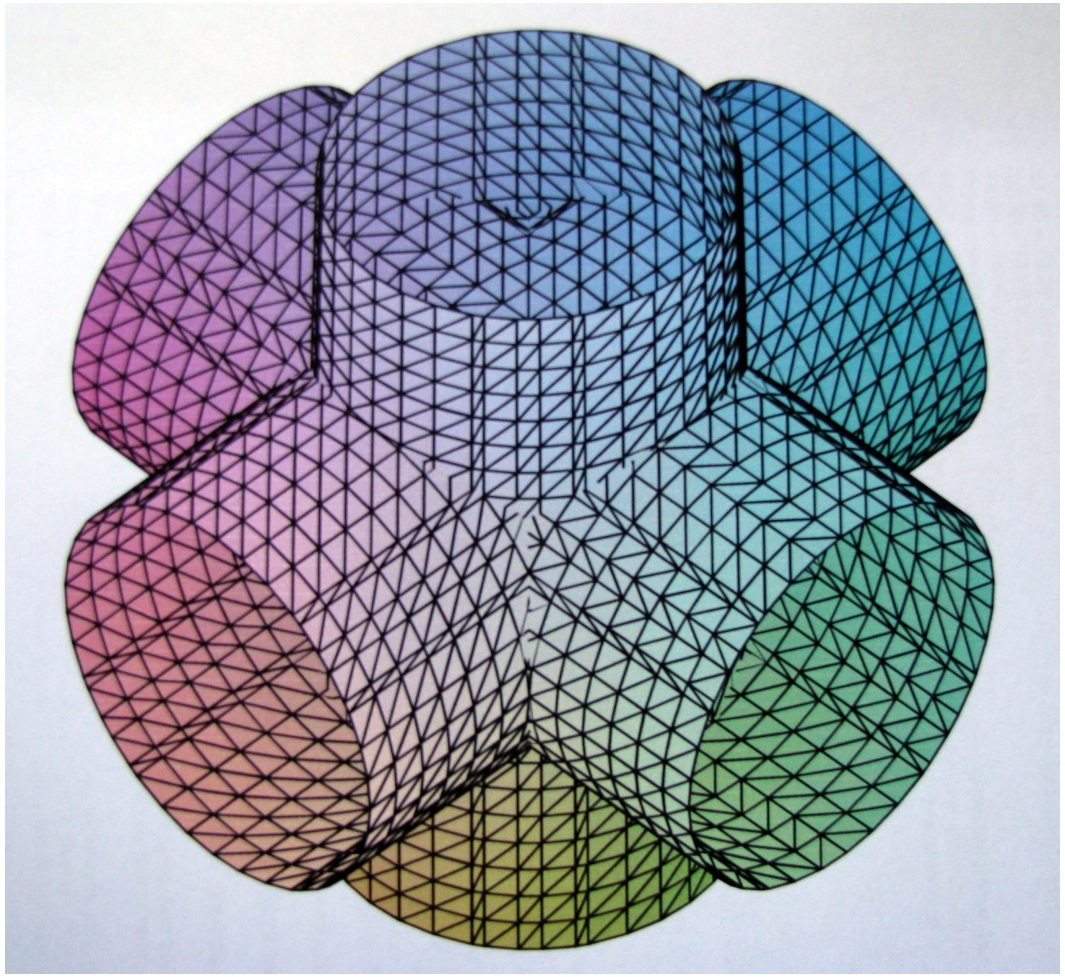
- Intuicja: definicje słownikowe oraz encyklopedyczne.
- Intuicja matematyczna: wypowiedzi matematyków.

- Trudności klasycznych stanowisk w filozofii matematyki związane z definicją terminu *intuicja matematyczna*.
- Kto miałby ustalać czym jest intuicja matematyczna?

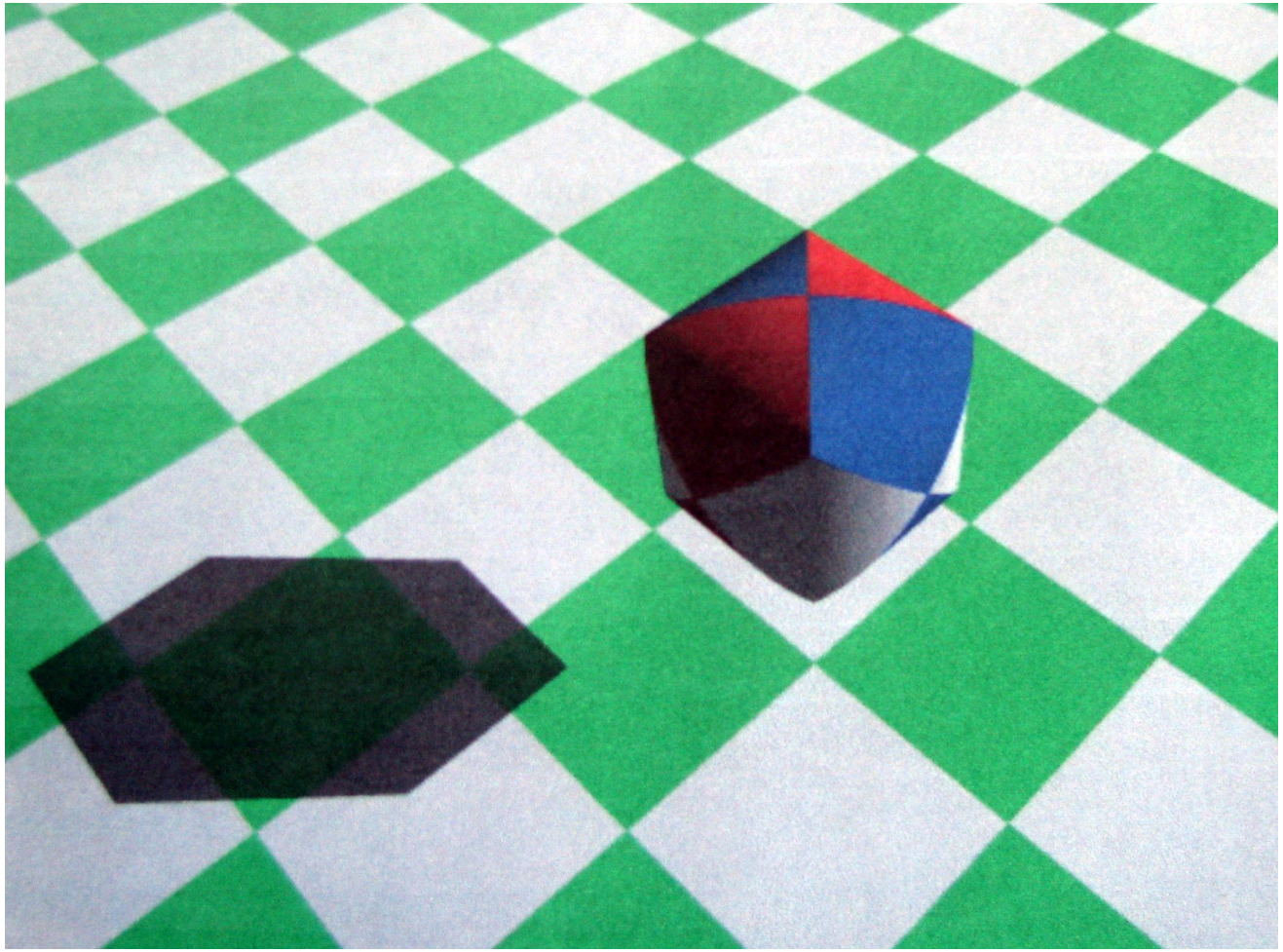
Czy masz wyobraźnię hydrauliczną?



Co jest częścią wspólną 3 ortogonalnych walców?



Widzisz to?



I nie opuszczę cię aż do śmierci

- Trzy klasyczne przykłady: *niewymierność*, aksjomat *wyróżniania*, rozumienie pojęcia *nieskończoności*.
- Dwie twarze *Paradoksu Skolema*.

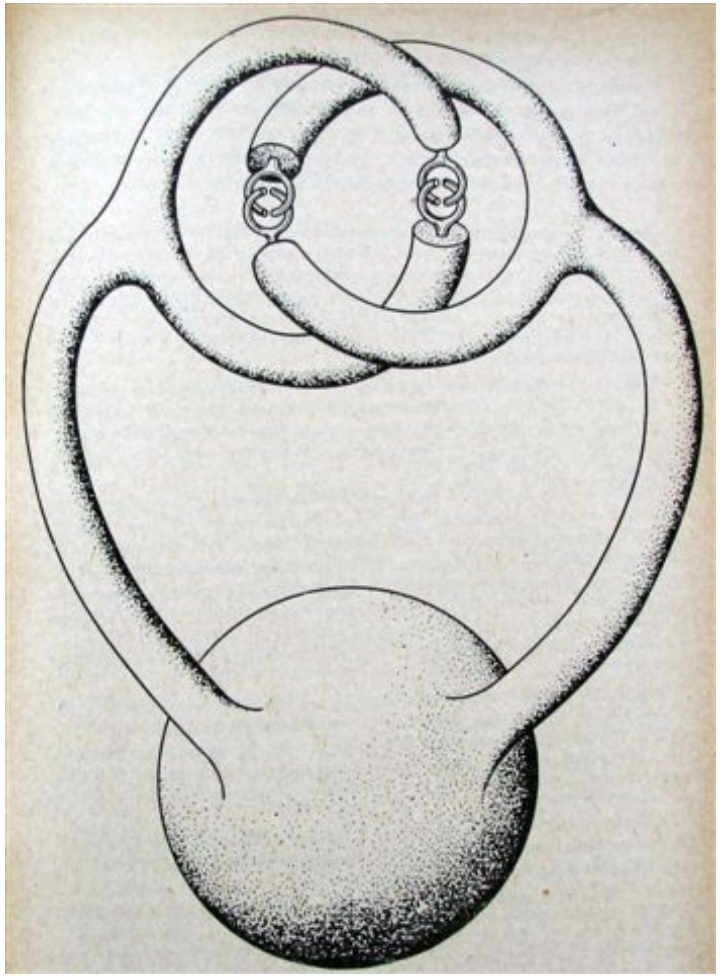
- Przykłady *zmienności* intuicji: algebra, analiza, geometria, logika.
- Intuicja a *uogólnianie* oraz *analogie*.
- O co *kłócą się* matematycy?

Teratologia potworów

- *All animals are equal but...*
- Sfera rogata Alexandera i twierdzenie Jordana-Schönfliessa

- Zbiory niemierzalne: kapitulacja intuicji *potocznych*
- Obiekty *fraktalne*: nowa intuicja wymiaru?
- Struktury *niearchimedesowe*.

Sfera rogata Alexandera



Bliźniacze liczby pierwsze

- Hipoteza: istnieje nieskończenie wiele bliźniaczych liczb pierwszych.
- $Li(x) = \int\limits_2^x \frac{1}{\ln t} \approx \frac{x}{\ln x} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(\ln x)^k}, \quad \pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x} \cdot \ln x)$, gdzie $\pi(x)$ to liczba liczb pierwszych $\leqslant x$, a O jest symbolem Landaua.
- *Przypuszczamy*, że szansa iż $(x, x+2)$ jest parą bliźniaczych liczb pierwszych jest taka, jak szansa uzyskania orła przy dwóch rzutach monetą. Szansa, iż wybrana losowo liczba x z przedziału od 0 do n będzie liczbą pierwszą równa jest około $\frac{1}{\ln n}$. Szansa, że zarówno x, jak i $x+2$ będą pierwsze jest równa około $\frac{1}{(\ln n)^2}$. Tak więc, będzie około $\frac{n}{(\ln n)^2}$ par bliźniaczych liczb pierwszych między 0 a n.
- Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^2} = \infty$, więc daje to, jak piszą Davis i Hersh (*Świat matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994, 190), „ilościową wersję przypuszczenia o parach liczb pierwszych."

Hipoteza Riemanna

- *Funkcja* ζ *Riemanna*: $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$. *Hipoteza Riemanna* głosi, że wszystkie (nietrywialne) zera tej funkcji leżą na prostej o równaniu $Re(z) = \frac{1}{2}$. [W argumentacji niżej pomijamy pewne kroki.]
- Funkcja Möbiusa $\mu(x) = 0$, gdy x dzieli się przez kwadrat liczby pierwszej, $\mu(x) = 1$ (odp. (-1)), gdy rozkład x ma parzystą (odp. nieparzystą) liczbę różnych czynników. HR jest równoważna temu, że $\sum_{y \leqslant x} \mu(y)$ rośnie nie szybciej niż $x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, przy $x \to \infty$, $\varepsilon > 0$. Prawdopodobieństwo, że $\mu(x) \neq 0$ jest równe: $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \ldots = \frac{6}{\pi^2}$. „Wartość oczekiwana" funkcji μ wynosi 0.
- Przy losowym wyborze N liczb ich suma *z prawdopodobieństwem* 1 rośnie nie szybciej niż $N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ przy N zmierzającej do nieskończoności.
- Daje to zatem „prawdziwość z prawdopodobieństwem 1" HR, przy *intuicyjnym przekonaniu*, że tablica wartości funkcji μ jest „losowa" (Davis, Hersh 1994, 315–321).

Jeszcze o wyobraźni hydraulicznej

Zwodnicze niby-intuicje

- Iluzje optyczne
- A teraz narysujemy zbiór Vitalego...

- Monty Hall Problem
- Ciągi von Misesa
- Brakujący dolar
- Wszystkie konie są tej samej maści
- Pitagoras błądził
- Aporie związane z kontinuum geometrycznym
- Wypełnianie przestrzeni
- Cztery drzewa
- Czterowymiarowy Jezus

Mów prawdę, całą prawdę i tylko prawdę

- Cantor: *Widzę to, ale temu nie wierzę.*
- Czy zbiory to *przepaście*?

- Niezupełność i nierozstrzygalność teorii mnogości ZF.
- Jaka jest *prawdziwa* wartość mocy kontinuum?

Reglamentacje ontologiczne

- Aksjomat ograniczenia Fraenkla
- Aksjomat konstruowalności Gödla

- Krytyka aksjomatów ograniczenia
- Metoda modeli wewnętrznych i metoda wymuszania

Duże liczby kardynalne

- Postulaty Zermela
- Program Gödla

- Hierarchia interpretowalności
- Konsekwencje aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych

Intuicje komplementarne?

- Aksjomat determinacji
- Starość czy druga młodość teorii mnogości?

- Czy potrzebna jest jedność matematyki?
- *Horror infiniti*

Uposażenie poznawcze

- Eksperymenty myślowe: rozumne kleksy, struktury nieprzemienne, matematyka Braci Mniejszych
- Tajemnica skuteczności matematyki
- Inspiracje z innych nauk

- Kulturowe uwarunkowania matematyki
- *Życie matematyczne dzikich*

Geometrie rozumnych kleksów

Dydaktyka

- Stadia rozwoju intelektualnego
- Trudności w uczeniu się matematyki

- Jak układać programy nauczania matematyki?
- Poziomy intuicji matematycznej

Pytania bez odpowiedzi

- W literaturze przedmiotu nie ma definitywnej odpowiedzi na pytanie czym jest intuicja matematyczna.
- Z całą pewnością nie można jednak redukować działalności matematyków do przeprowadzania wyłącznie dedukcji.

- Odczyt stanowi mały fragment przygotowywanego tekstu o intuicji matematycznej, uwzględniającego przykłady matematyczne, ustalenia historyczne, komentarze filozoficzne.
- Odczyt był sponsorowany przez Polsko-Japońską Wyższą Szkołę Technik Komputerowych w Warszawie, za co niniejszym uprzejmie sponsorowi dziękuję.