MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

WYKŁAD 0: USTALENIA ORGANIZACYJNE

KOGNITYWISTYKA UAM, 2018–2019

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Ile i jakiej matematyki potrzebuje kognitywistyka?

O przedmiocie kognitywistyki słuchacze dowiedzą się na zajęciach ze *Wstępu do kognitywistyki*. Nauki kognitywne dotyczą możliwości poznawczych człowieka. Aby je opisać, badać i rozumieć potrzebna jest wiedza z wielu dyscyplin, m.in.: biologii, psychologii, logiki, lingwistyki, matematyki. Niezbędna jest również pewna erudycja filozoficzna, zwłaszcza w zakresie epistemologii.

Niniejszy kurs ma charakter usługowy. Nie jest to zatem wykład (określonych działów) matematyki, ale jedynie przegląd wybranych pojęć, twierdzeń, technik, metod, których znajomość jest nieodzowna w refleksji nad ludzkim poznaniem.

Podajmy przykładowe – niewyszukanie proste w swojej ogólności – pytania, które dotyczą procesów poznawczych:

1. *Ile czegoś jest?* Ile jest neuronów w mózgu? Ile jest połączeń między tymi neuronami? Ilu rzeczy mogę jednocześnie doświadczać?

2. *Jak duże (małe) coś jest?* Jak małe stworzenia potrafię zobaczyć?

3. *Czy jedno zależy od drugiego?* Jak moja percepcja zależy od wypalanego zioła? Jak wynik bitwy zależy od wznoszonych przed nią modlitw?

4. *Jak złożone coś jest?* Czy mózg jest zbudowany z niezależnych modułów?

5. *Czy jedno jest podobne do drugiego?* Czy rozwój mózgu człowieka podobny jest do modyfikacji sieci neuronowej?

6. *Jak coś zmienia się?* Jak zmieni się moje odczucie temperatury w każdej z rąk, gdy uprzednio jedną trzymałem w zimnej, a jedną w ciepłej wodzie?

7. *Czy występuje jakaś regularność?* Czy notowania akcji na giełdzie można opisać wzorem zależnym od z góry zadanych parametrów?

To nie są oczywiście pytania czysto *matematyczne*. Jednak próby odpowiedzi na nie *zawsze* wymagają stosownej matematycznej aparatury pojęciowej.

W trakcie wykładu poznamy matematyczne aspekty takich podstawowych dla kognitywistyki pojęć (wiążących się z odpowiedziami na powyższe pytania), jak np.:

1. *Liczba, ilość, miara*.
2. *Zależność, stosunek, relacja*.
3. *Zmienność, stałość*.
4. *Podobieństwo, nieodróżnialność*.
5. *Regularność, wzorzec*.
6. *Struktura, złożoność*.
7. *Odległość, bliskość*.
8. *Kształt, położenie*.

Zakładamy, że słuchacze dysponują pewną elementarną wiedzą wyniesioną ze szkoły:

1. *Umiejętności arytmetyczne*. Tabliczki dodawania i mnożenia. Znajomość elementarnych funkcji liczbowych.
2. *Umiejętność rozwiązywania prostych równań i nierówności*. Równania i nierówności pierwszego i drugiego stopnia.
3. *Znajomość elementarnych wzorów dotyczących obliczania długości, pól oraz objętości*. Oczywiście można powiedzieć: po co je znać, skoro można je znaleźć w sieci. Kaktus ich nie zna, a żyje. Cóż, nie jesteśmy cywilizacją kaktusów.

Można oczywiście pytać, czy wiedza matematyczna wyniesiona ze szkoły wystarcza dla prowadzenia badań i refleksji kognitywistycznych. Odpowiedź jest zwięzła i brzmi: *nie wystarcza*. Słuchacze przekonają się o tym już na pierwszym roku studiów. Dodamy jeszcze, że w naszym przekonaniu matematyka jest najbardziej humanistyczną z nauk, co będziemy się starali wykazywać na każdym wykładzie.

W trakcie tego wykładu będziemy wykonywać pewne standardowe w matematyce czynności, do których należą, m.in.:

1. *Abstrahowanie*. Rozwój nowoczesnej nauki byłby niemożliwy bez zabiegów idealizacyjnych (Arystoteles brnął w rozważania jakościowe, Galileusz docierał do praw natury). Rozwiązując dany problem, zwykle pomijamy wiele nieistotnych czynników, *abstrahujemy* od nich.

2. *Uogólnianie*. Ten proces widoczny jest np. w rozszerzaniu rozumienia pojęcia *liczby*. Obejmowano zakresem tego pojęcia coraz to nowe rodzaje liczb: od naturalnych i dodatnich wymiernych przez całkowite, rzeczywiste, zespolone, aż do innych jeszcze ich rodzajów.

3. *Definiowanie*. Warunkiem koniecznym efektywnej komunikacji jest używanie terminów w ustalonym znaczeniu. Wszystkie pojęcia matematyczne są (albo traktowane jako pierwotne albo) wprowadzane na drodze ścisłych, jednoznacznych definicji.

4. *Dowodzenie*. To bodaj najbardziej podstawowa czynność w matematyce. Przyjmuje się pewne założenia, z których *wyprowadza się*, za pomocą z góry wyraźnie określonych metod, różnorakie wnioski. Owe wnioski *wynikają logicznie* z czynionych założeń.

5. *Klasyfikowanie*. Nie jest jedynie czynnością wprowadzającą określony porządek w badanej klasie obiektów. Przez klasyfikowanie tworzymy nowe, bardziej abstrakcyjne *typy* obiektów.

6. *Szukanie sprzeczności*. Tak jak w poezji *brak cienia jest dowodem nieistnienia*, tak w matematyce i logice wystąpienie sprzeczności jest dowodem nieistnienia. Ta analogia jest oczywiście żartem. Sprzeczność to śmierć logiczna. Nie istnieją obiekty sprzeczne.

7. *Budowanie kontrprzykładów*. Kontrprzykłady buduje się w różnych celach, np. dla ukazania, że przyjmowane założenie jest jedynie wystarczające, ale nie jest konieczne dla otrzymanego wniosku.

8. *Notacja*. Gdybyśmy posiadali zdolność telepatii, to mówienie i pisanie byłoby może zbędne. Przekazujemy informacje zawsze w jakimś języku. W przypadku matematyki jest to specyficzna mieszanina języka etnicznego oraz przyjętych konwencjonalnie symboli o precyzyjnie ustalonym znaczeniu. Notacja matematyczna służy do mówienia o obiektach matematycznych, ale nie jest z nimi tożsama: np. *liczby* są obiektami matematycznymi, które możemy *reprezentować* w określonej notacji (np. dziesiętnej lub dwójkowej).

Również kurs *Wprowadzenia do logiki* dostarczy słuchaczom informacji na temat wymienionych wyżej czynności oraz ich wytworów.

Jest oczywiste, że niniejszy kurs stanowi jedynie skromny wstęp do matematyki. Współczesna matematyka ma ponad trzy tysiące działów. Tutaj wybieramy tylko niektóre drobne fragmenty z niektórych z nich. Może warto wspomnieć, że będziemy zajmować się następującymi rodzajami struktur:

1. *Struktury algebraiczne*: związane z operacjami wykonywanymi na obiektach.
2. *Struktury porządkowe*: związane z ustalaniem poprzedzania jednych obiektów przez inne.
3. *Struktury topologiczne*: związane m.in. z bliskością, odległością, kształtem, ciągłością.
4. *Struktury różniczkowe*: związane m.in. z rodzajami i tempem zmian.
5. *Struktury miarowe*: związane z miarą obiektów.

Nauczanie matematyki w szkole podlega pewnym naturalnym ograniczeniom. Po pierwsze, musi być dostosowane do poziomu rozwoju intelektualnego uczniów, co jest całkiem zrozumiałe. Po drugie, omawiany materiał musi zmieścić się w ograniczonych ramach czasowych i na to też niewiele można poradzić, chyba że uzyska się dodatkowy czas, likwidując niepotrzebne lekcje religii.

Uniwersyteckie nauczanie matematyki dysponuje większą swobodą. Zakłada się bowiem, że student jest potencjalnie zdolny do przyswojenia sobie, a nawet zrozumienia, o wiele bardziej abstrakcyjnych pojęć niż te, które omawiane są w szkole. Docenia się kreatywność studentów, będącą wynikiem ich samodzielnych dociekań.

Chcielibyśmy, aby słuchacze tego wykładu rozumieli matematykę jako:

1. *Naukę o wzorcach*. Początki matematyki biorą się z reprezentacji (wybranych aspektów) świata. Konstruowanie takich reprezentacji pozwala ujawnić występujące w nich wzorce – swoiste regularności. Wzorce mogą być numeryczno-arytmetyczne (związane z ustalaniem stałości liczebności kolekcji), algebraiczne (związane z własnościami działań na obiektach, symetrie), porządkowe (związane z rozmieszczeniem obiektów względem danych relacji), mogą dotyczyć kształtu, przestrzeni, pozycji, odległości (konstrukcje geometryczne, topologiczne), mogą dotyczyć ruchu i zmiany (pojęcia analizy matematycznej, geometrii i topologii różniczkowej), mogą wreszcie dotyczyć samych rozumowań matematycznych (pojęcia logiki matematycznej), obliczalności (pojęcia teorii rekursji oraz różnych działów informatyki), częstości (rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna), itd.

2. *Sztukę rozwiązywania problemów*. Praktyka badawcza matematyki obejmuje wiele typów działalności. Przede wszystkim, jest to dowodzenie twierdzeń. Inne typy tej działalności to, m.in.: uogólnianie, abstrahowanie, tworzenie pojęć, stawianie hipotez, przedstawianie nowych (lepszych, prostszych, bardziej eleganckich) dowodów już znanych twierdzeń, wyobrażanie sobie, szukanie kontrprzykładów, przeprowadzanie rozumowań przez analogię (prowadzących np. do rozważania nowych dziedzin matematycznych), rozpatrywanie szczególnych przypadków, klasyfikowanie, szukanie nowych aksjomatów, sięganie po motywacje płynące z nauk empirycznych, poszukiwanie nowych punktów widzenia, przeprowadzanie (niekiedy żmudnych) rachunków, myślenie przekorne, itd. Na początku każdego z takich działań mamy do czynienia z problemem poznawczym. W jego rozwiązaniu korzystamy dostępnych, sprawdzonych już w działaniu metod, ale także z tworzonych na nowo heurystyk.

Wspomnieliśmy już, że niniejszy kurs ma charakter usługowy. Należy jednak również dodać, że umiejętności matematyczne, takie jak tworzenie pojęć, dowodzenie, klasyfikowanie, konstruowanie kontrprzykładów, wyobrażanie sobie, itd. są niezwykle ważnymi ludzkimi zdolnościami poznawczymi. Tworząc matematykę, lub jedynie posługując się nią w sposób kompetentny dajemy świadectwo naszemu człowieczeństwu. Wyobraźnia matematyczna to potężne narzędzie poznawcze.

Ustalenia organizacyjne

Syllabus przedmiotu umieszczony został na stronie internetowej wykładu:

http://logic.amu.edu.pl/index.php/Mpk

Na wyżej wymienionej stronie zamieszczono plik zawierający szczegółowe omówienie planu wykładu. Tamże zamieszczać będziemy też odnośniki do wybranych miejsc w sieci, które z korzyścią dla rozumienia wykładu można odwiedzić.

Plan wykładów

Planujemy następujące tematy wykładów:

1. *Rachunek zbiorów*.

2. *Rachunek relacji*.

3. *Funkcje*.

4. *Kombinatoryka i ciągi liczbowe*.
5. *Struktury porządkowe*.
6. *Struktury algebraiczne*.
7. *Struktury topologiczne*.
8. *Granice i ciągłość*.
9. *Różniczkowanie*.
10. *Wybrane twierdzenia rachunku różniczkowego*.
11. *Całkowanie*.
12. *Miara i prawdopodobieństwo*.
13. *Algorytmy*.
14. *Powtórka I: przygotowanie do zaliczenia wykładu.*
15. *Powtórka II: przygotowanie do zaliczenia wykładu.*

Tematy 12 oraz 13 omawiane są w bardziej rozwiniętej formie na zajęciach *Metody statystyczne* oraz *Podstawy algorytmiki*.

Ustalenia dodatkowe

1. Wykład kończy się zaliczeniem z oceną. Ma ono formę pisemną i zostanie przeprowadzone przed rozpoczęciem sesji zimowej. Zakres materiału (przykładowe pytania) zostanie wyraźnie podany przed rozpoczęciem sesji zimowej. Zgodnie z zaleceniem koordynatora tego modułu kształcenia, przewiduje się następującą skalę ocen z zaliczenia wykładu:

    - do 50% maksymalnej puli punktów: ndst
    - do 60% maksymalnej puli punktów: dst
    - do 70% maksymalnej puli punktów: dst+
    - do 78% maksymalnej puli punktów: db
    - do 85% maksymalnej puli punktów: db+
    - powyżej 85% maksymalnej puli punktów: bdb

2. Wykład stanowi całość wraz z konwersatorium, prowadzonym w tym roku akademickim przez Panią dr Dorotę Leszczyńską-Jasion. Zasady zaliczenia konwersatorium poda prowadząca.

3. Materiały dydaktyczne będą systematycznie udostępniane na stronie internetowej wykładu.

Zalecana literatura

1. Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. 2002. *Matematyka konkretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

2. Musielak, H., Musielak, J. 2004. *Analiza matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

3. Rasiowa, H. 1968. *Wstęp do matematyki współczesnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

4. Reinhardt, F., Soeder, H. 2003. *Atlas matematyki*. Prószyński i S-ka, Warszawa.

Prowadząca konwersatorium poda słuchaczom dodatkowe pozycje, zawierające zadania.