Intuicje a nabywanie wiedzy matematycznej

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

FMiI V, 2016

Plan na dziś: kontekst przekazu

- *Kontekst odkrycia*. Obejmuje intuicje profesjonalnych matematyków.
- *Kontekst uzasadnienia*. Dedukcja i obliczenia.
- ***Kontekst przekazu***. Odnosi się do procesów przekazywania i nabywania wiedzy matematycznej.

- Podamy przykłady objaśnień intuicyjnych funkcjonujących w kontekście przekazu.
- *Dobre intuicje matematyczne* kształtujemy poprzez odwołanie się: bądź do modeli fizycznych bądź do wcześniej przyswojonych pojęć matematycznych. *Złe intuicje matematyczne* tworzą się na podstawie pochopnych analogii oraz uogólnień, myślenia „na skróty", niewłaściwego korzystania z semantyki terminów, nieszczęsnych (nietrafnych) metafor. Model fizyczny nie może chyba generować złych intuicji, wszystko co złe bierze się z nieuzasadnionej wiary.

Projekt badawczy NCN

- Odczyt został przygotowany w ramach projektu badawczego NCN 2015/17/B/HS1/02232:
  Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne.
- Projekt jest realizowany w Zakładzie Logiki i Kognitywistyki UAM (2016–2018).
- Strona projektu: http://logic.amu.edu.pl/index.php/Ncn2015jp

- W ramach projektu przewiduje się dwa skromne stypendia dla doktorantów, ewentualnie zainteresowanych współpracą.
- Oferta zatrudnienia:
  http://logic.amu.edu.pl/images/7/71/Konkurs01.pdf

Poincaré: *Science and Method*

We are in a class of the fourth grade. The teacher is dictating: 'A circle is the position of the points in a plane which are at the same distance from an interior point called the centre.' The good pupil writes this phrase in his copy-book and the bad pupil draws faces, but neither of them understands. Then the teacher takes the chalk and draws a circle on the board. 'Ah', think the pupils, 'why didn't he say at once, a circle is a round, and we should have understood.'

- Cytat za: Sierpińska 1994 (*Understanding in Mathematics*, str. 1). Każdy rozdział tej książki rozpoczyna się cytatem z prac Poincaré'go.
- Ujęcie rozumienia w matematyce proponowane przez Sierpińską bazuje na ideach Ajdukiewicza z *Logiki pragmatycznej*.

Sierpińska: *Understanding in Mathematics*

- The quest for an explanation in mathematics cannot be a quest for proof, but it may be an attempt to find a rationale of a choice of axioms, definitions, methods of constructing of a theory. A rationale does not reduce to logical premisses. An explanation in mathematics can reach for historical, philosophical, pragmatic arguments. In explaining something in mathematics, we speak *about* mathematics: our discourse becomes more metamathematical than mathematical (76).
- Explanation of an abstract mathematical theory may consist in a construction of its model, in which the variables, rules and axioms of the theory are interpreted and acquire meaning. The model becomes a certain 'reality', ruled by its own 'laws'. In explaining a theory, we deduce its rules, axioms, definitions, and theorems from the 'laws' of the model (77).

Kłopoty z intuicją matematyczną

- Znaczenia pojęć matematycznych są określone w samej teorii. Są podobne chimerom. *Objaśnienia intuicyjne* (w procesie dydaktycznym) nie są raz na zawsze ustalone. Czynimy co w naszej mocy, aby oswajać chimery.
- *Objaśnienie intuicyjne* jest pojęciem relacyjnym. Rozumiemy je tutaj w sensie pragmatycznym (rozjaśnienie idei, metody heurystyczne, wskazówki ułatwiające rozumienie), nie odwołując się do ogólnej metodologii nauk.

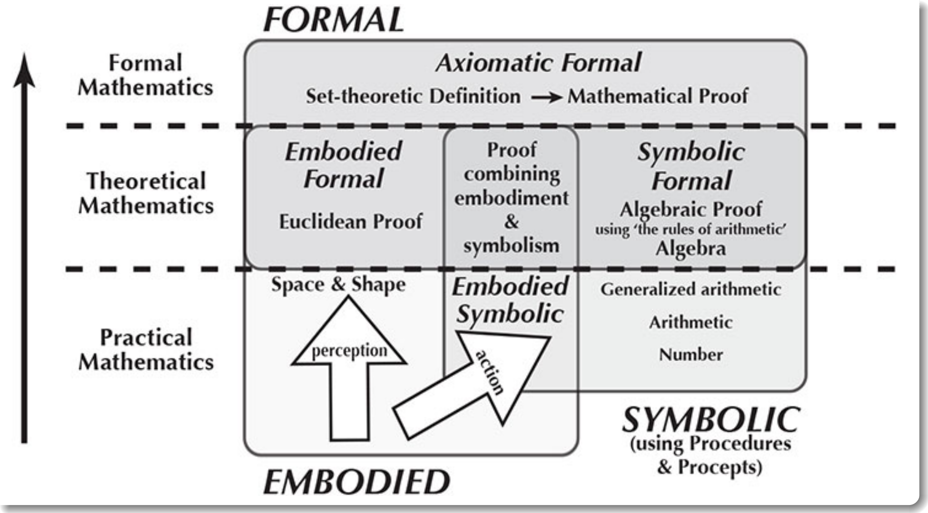
- Proponujemy rozplątanie złożonego pojęcia *intuicji matematycznej*.
- Interesuje nas nie nabywanie wiedzy matematycznej przez dzieci, ale to, w jaki sposób osoby dorosłe (studenci kierunków pozamatematycznych) rozszerzają swoją wiedzę i przekształcają dotychczasowe przekonania.

Czym jest kontekst przekazu?

- Kontekst przekazu obejmuje: proces dydaktyczny oraz popularyzację matematyki.
- Cel objaśnień intuicyjnych: wspomaganie rozumienia.
- Używane środki: parafraza, przekład, metafora, analogia, budowanie modeli, itd.
- Jakie działania w kontekście przekazu są poprawne i skuteczne?

- Składnikami kontekstu przekazu są pojęcia matematyczne wraz ze sposobami ich intuicyjnego objaśnienia.
- Akceptujemy wybrane ustalenia klasyków piszących o edukacji matematycznej (Piaget, Polya, Fischbein, Schoenfeld, Tall, Sierpińska). Natomiast z pewną rezerwą odnosimy się do redukcji genezy i funkcjonowania matematyki wyłącznie do procesów tworzenia metafor poznawczych.

David Tall: trzy światy matematyki



Przenikanie się kontekstów

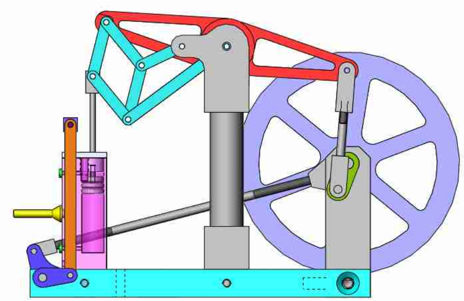
- *Archimedes*: sfera, stożek i walec; argumentacja mechaniczna oraz dowód matematyczny metodą wyczerpywania.

- *Hilbert i Gödel*: aksjomat zupełności w teorii mnogości; pragmatyczne uzasadnienie (akceptacji aksjomatów maksymalności i odrzucenia aksjomatów ograniczenia).
- *Cohen*: budowa modeli teorii mnogości metodą wymuszania; intuicyjne analogie z rozszerzeniami ciał o elementy przestępne.

Wyjaśnianie koincydencji:

- Wzór dwumianowy: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- Pochodna iloczynu: $(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$

Ruch i geometria



http://www.homemodelenginemachinist.com/showthread.php?t=3693

Peaucellier-Lipkin linkage przekształca ruch po okręgu w ruch po prostej:
https://www.youtube.com/watch?v=j4DpH8GsFQw
Maszyna parowa Watta: http://www.animatedengines.com/watt.html

Język matematyki i język naturalny

- *Mówienie* o zbiorach: paradoksy, zbiory rozmyte, kłopoty z nieskończonością, *definiowalne* versus *opisywalne*.
- Granice: uwaga na metafory! Okrąg, szereg najwolniej rozbieżny.
- Ciągłość: objaśnianie własności „przekraczającej" gęstość. Podejrzane: ciągłość *naturalna*.
- Rachunek różniczkowy: logiczna złożoność ε-δ-sformułowań. Remedium: analiza niestandardowa (trudność dydaktyczna: konstrukcja liczb hiperrzeczywistych).
- Przegrane: notacja Fregego, ikoniczna notacja Leśniewskiego.

- Język naturalny jest niezbędny w dydaktyce matematyki, ale jakie są granice objaśnień lingwistycznych? $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty}(\cos(n!\cdot\pi\cdot x))^{2k})$

Doświadczenie zmysłowe

- Rysunki, diagramy, schematy: potęga reprezentacji wizualnych i niebezpieczeństwo sugestii. Śmieszna sprzeczka dot. diagramów Venna. Gust matematyka i gust laika.
- Modele 3D: pomoce dydaktyczne Istvána Lénárta.
- Filmy (powszechnie dostępne w sieci): przenicowanie sfery, wiązka Hopfa, podróż w wyższe wymiary, itd.
- Piosenki matematyczne: środki mnemotechniczne.

- Kolory w reprezentacjach graficznych funkcji zespolonych.

Lego audio video erro ergo disco.

Sfery Istvána Lénárta

István Lénárt

i jego sfery

www.gombigeometria.eoldal.hu

Inspiracje z Natury

- Archimedes: obliczanie powierzchni i objętości przy użyciu mechaniki.
- Robert Ghrist: *linkages* i rozmaitości. *Any smooth compact manifold is diffeomorphic to the configuration space of some planar linkage*
- Mark Levi: *The Mathematical Mechanic.* Uzasadnianie twierdzeń matematycznych przez odwołania do modeli fizycznych.
- Analogie kinematyczne: geometria.
- Pola elektromagnetyczne: Poincaré o dowodzie Kleina.
- Przepływy cieczy i ciepła: analiza zespolona.
- Problemy wariacyjne: mądrość Natury.

- Eksperymenty: igła Buffona, paradoks Bertranda, bilard i π.
- Fizyka i nieskończoność: czy *supertasks* są możliwe?

Potoczność

- Topologia: „gumowate” obiekty i operacje na nich.
- Geometryczne reprezentacje liczb naturalnych (trójkątne, itd.).
- Liczby ujemne: długi, temperatura, piętra, skaczące żaby.
- Narzędzia: linijka, cyrkiel, pantograf, *Peaucellier-Lipkin linkage*, itp.
- Gry: gry Ehrenfeuchta, aksjomat determinacji.
- Komputery: programy, eksperymenty, metafory.

- *Filtry i ideały*: duże i małe obiekty.
- *Prawie wszędzie*: dziedziny skończone i nieskończone.
- *Model thinks*: mowa figuratywna.

It is wrong always, everywhere, and for anyone, to believe anything upon insufficient evidence. (William K. Clifford, *The Ethics of Belief*, 1877).

Spójność matematyki

- Euklides: teoria proporcji w systemie geometrii.
- Descartes: powstanie geometrii analitycznej.
- Współcześnie: np. topologia algebraiczna, gałęzie teorii liczb.
- Programy unifikacji: Weierstrass & Co., Hilbert, Thurston, Laglands.

- Uogólnienia operacji i relacji arytmetycznych na abstrakcyjne dziedziny.
- Hipoteza Riemanna: prawdziwość z prawdopodobieństwem 1.
- Wymuszanie w teorii mnogości a rozszerzenia ciał.
- Aksjomat zupełności w teorii mnogości: uzasadnienie pragmatyczne.

Horyzont wyobraźni

- Liczby ujemne: kilkaset lat oswajania (przez profesjonalistów); obecnie akceptowalne przez większość populacji.
- Liczby zespolone: kilkaset lat oswajania (przez profesjonalistów); obecnie standardowe obiekty w badaniach matematycznych, jednak stale trudne do pojęcia przez ogół obywateli.
- Wyższe wymiary: szybkie oswojenie (przez profesjonalistów); dla większości populacji wciąż iluzoryczne.

- Nieskończenie wymiarowe przestrzenie liniowe: załamanie intuicji potocznych.
- Dzikie struktury topologiczne w niskich wymiarach.
- Struktury egzotyczne.

Nasza wędrówka trwa, dopóki czynny jest horyzont.

- Davis, P.J., Hersh, R. 1981. *Mathematical experience*. Birkhäuser, Boston.
- Fischbein, H. 1987. *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Kluwer Academic Publishers, New York / Boston / Dordrecht / London / Moscow.
- Ghrist, R. 2014. *Elementary Applied Topology*. Createspace, ISBN 978-1502880857.
- Hanna, G., Jahnke, H.N., Pulte, H. (Eds.) 2010. *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives*. Springer, New York Dordrecht Heidelberg London.
- Lange, M. 2014. Depth and Explanation in Mathematics. *Philosophia Mathematica*. Advance Access published September 12, 2014.
- Levi, M. 2009. *The Mathematical Mechanic. Using Physical Reasoning to Solve Problems*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Needham, T. 1997. *Visual complex analysis*. Clarendon Press, Oxford.

- Polya, G. 2009. *Mathematical Discovery on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. Ishi Press International, New York, Tokyo.
- Polya, G. 2014. *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol.I: *Induction and Analogy in Mathematics*, Vol. II: *Patterns of Plausible Inference*. Martino Publishing, Mansfield Centre, CT.
- Prasolov, V.V. 2011. *Intuitive topology*. American Mathematical Society.
- Schoenfeld, A. H. 1985. *Mathematical Problem Solving* . Academic Press, Inc., Orlando.
- Sierpińska, A. 1994. *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press, London.
- Tall, D. 2013. *How Humans Learn to Think Mathematically. Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Thurston, W. 1994. On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society* **30** (2), 161–177.