MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

KOGNITYWISTYKA UAM, 2022–2023. ZALICZENIE WYKŁADU: 25.01.2023

Imię i nazwisko:................ MRÓWECZKA CALINECZKA

1. [3 punkty] Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ o parzystej liczbie elementów. Narysuj graf relacji $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ zdefiniowanej warunkiem: $A\ R\ B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$.

2. [4 punkty] (a) Co to znaczy, że relacja R określona w zbiorze X jest antysymetryczna? (b) Podaj przykład relacji, która ma tę własność i relacji, która jej nie ma. (c) Rozstrzygnij czy jest antysymetryczna relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $|x - y| \leqslant \pi$.

3. [4 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$A \cap (B - C) = A \cap (C - B).$$

4. [4 punkty] Wyznacz (w możliwie najprostszej postaci) pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{e^x}}.$$

5. [5 punktów] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i przeprowadź dowód, stosując indukcję matematyczną:

1. Udowodnij, że $(1 + \frac{1}{10})^n \geqslant 1 + \frac{n}{10}$, dla wszystkich $n \geqslant 1$.
2. Udowodnij, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}.$$

Liczba punktów	Ocena
< 11	2
11–12	3
13–14	3+
15–16	4
17–18	4+
19–20	5

JERZY POGONOWSKI, Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM, pogon@amu.edu.pl

MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

KOGNITYWISTYKA UAM, 2022–2023. ZALICZENIE WYKŁADU: 25.01.2023

Imię i nazwisko: .... MRÓWECZKA DOROTECZKA

1. [3 punkty] Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ o nieparzystej liczbie elementów. Narysuj graf relacji $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ zdefiniowanej warunkiem: $A\ R\ B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$.

2. [4 punkty] (a) Co to znaczy, że relacja R określona w zbiorze X jest spójna? (b) Podaj przykład relacji, która ma tę własność i relacji, która jej nie ma. (c) Rozstrzygnij czy jest spójna relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $|x - y| > \pi$.

3. [4 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$A \cup (B - C) = A \cup (C - B).$$

4. [4 punkty] Wyznacz (w możliwie najprostszej postaci) pochodną funkcji:

$$f(x) = x \cdot e^{-\sqrt{x}}.$$

5. [5 punktów] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i przeprowadź dowód, stosując indukcję matematyczną:

1. Udowodnij, że $(1 + \frac{1}{20})^n \geqslant 1 + \frac{n}{20}$, dla wszystkich $n \geqslant 1$.
2. Udowodnij, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}.$$

Liczba punktów	Ocena
< 11	2
11–12	3
13–14	3+
15–16	4
17–18	4+
19–20	5

JERZY POGONOWSKI, Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM, pogon@amu.edu.pl

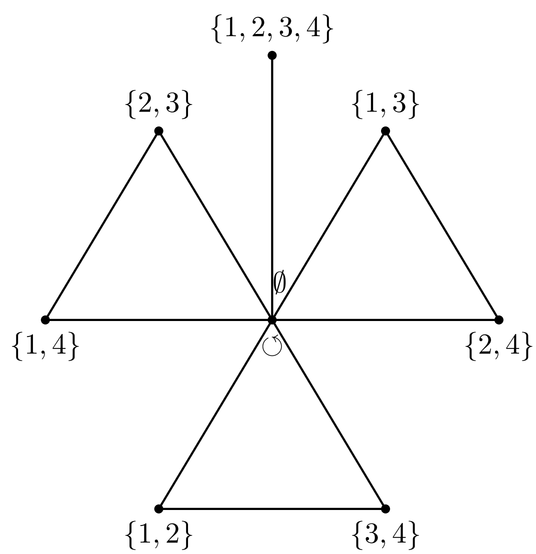
ROZWIĄZANIA

MRÓWECZKA CALINECZKA

1. Rodzina $\mathcal{A}$ ma następujące elementy:

$$\emptyset, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}.$$

Rozważana relacja jest symetryczna, więc jej graf narysujemy jako graf niezorientowany. Widać, że zbiór $\emptyset$ jest rozłączny z każdym zbiorem z rodziny $\mathcal{A}$, natomiast zbiór $\{1,2,3,4\}$ ma elementy wspólne z każdym niepustym zbiorem z rodziny $\mathcal{A}$. Graf rozważanej relacji wygląda zatem następująco:



Ponieważ $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, więc mamy pętlę w wierzchołku $\emptyset$.

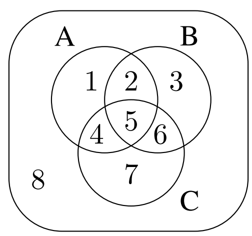
2. (a) Relacja R określona w zbiorze X jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli xRy oraz yRx, to $x = y$.

(b) Relacja $\leqslant$ jest antysymetryczna w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ jest tak, iż jeśli $x \leqslant y$ oraz $y \leqslant x$, to $x = y$. Nie jest antysymetryczna np. relacja R określona między prostymi na płaszczyźnie zachodząca między prostymi x i y wtedy i tylko wtedy, gdy x jest prostopadła do y, ponieważ jeśli xRy oraz yRx, to x i y są różnymi prostymi. Podobnie, relacja R określona między prostymi na płaszczyźnie zachodząca między prostymi x i y wtedy i tylko wtedy, gdy x jest równoległa do y nie jest antysymetryczna, ponieważ proste wzajem równoległe mogą być różne.

(c) Relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $|x-y| \leqslant \pi$ nie jest antysymetryczna, ponieważ np. $1R2$ oraz $2R1$, ale $1 \neq 2$.

3. Znalezienie kontrprzykładu dla równości $A \cap (B-C) = A \cap (C-B)$ polega na podaniu takich zbiorów A, B i C, że wynik operacji po lewej stronie tej równości nie będzie tożsamy z wynikiem operacji po prawej stronie.

Można narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości. Jeśli wynik wykonanych operacji po lewej stronie nie będzie tożsamy z wynikiem operacji wykonanych po prawej stronie, to podane zbiory stanowią kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{2,3,5,6\}$, $C = \{4,5,6,7\}$
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po lewej stronie równości:
$B - C = \{2,3\}$
$A \cap (B-C) = \{2\}$.
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po prawej stronie równości:
$C - B = \{4,7\}$
$A \cap (C-B) = \{4\}$.
Ponieważ $\{2\} \neq \{4\}$, więc podane zbiory A, B i C stanowią kontrprzykład dla rozważanej równości.

4. Pochodną funkcji $f(x) = \frac{x}{\sqrt{e^x}}$ wyznaczymy, korzystając ze wzorów na: pochodną ilorazu funkcji, pochodną funkcji złożonej, pochodną funkcji wykładniczej i pochodną funkcji potęgowej.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{e^x}}\right)' =$$

$$\frac{(x)' \cdot \sqrt{e^x} - x \cdot (\sqrt{e^x})'}{(\sqrt{e^x})^2} =$$

$$\frac{1 \cdot \sqrt{e^x} - x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{e^x}} \cdot (e^x)'}{e^x} =$$

$$\frac{\sqrt{e^x} - x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{e^x}} \cdot e^x}{e^x} =$$

$$\frac{\sqrt{e^x} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e^x}}{e^x} =$$

$$\frac{\sqrt{e^x}}{e^x} \cdot (1 - \frac{x}{2}) =$$

$$\frac{2 - x}{2 \cdot \sqrt{e^x}}.$$

5.1. To szczególny przypadek nierówności Bernoulliego, której dowód przeprowadzono na wykładzie. Dowód tego, że $(1 + \frac{1}{10})^n \geqslant 1 + \frac{n}{10}$, dla wszystkich $n \geqslant 1$ przebiega następująco.

Krok początkowy. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest 1. Ponieważ $(1 + \frac{1}{10})^1 \geqslant 1 + \frac{1}{10}$, więc badana nierówność zachodzi dla liczby 1.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne dla $k \geqslant 1$: $(1 + \frac{1}{10})^k \geqslant 1 + \frac{k}{10}$. Mamy udowodnić, że przy tym założeniu zachodzi: $(1 + \frac{1}{10})^{k+1} \geqslant 1 + \frac{k+1}{10}$.

Ponieważ $(1 + \frac{1}{10})^{k+1} = (1 + \frac{1}{10})^k \cdot (1 + \frac{1}{10})$, więc na mocy założenia indukcyjnego: $(1 + \frac{1}{10})^k \cdot (1 + \frac{1}{10}) \geqslant (1 + \frac{k}{10}) \cdot (1 + \frac{1}{10})$. Obliczamy: $(1 + \frac{k}{10}) \cdot (1 + \frac{1}{10}) = 1 + \frac{1}{10} + \frac{k}{10} + \frac{k}{100}$. Ponieważ $\frac{k}{100} > 0$, więc $1 + \frac{1}{10} + \frac{k}{10} + \frac{k}{100} > 1 + \frac{1}{10} + \frac{k}{10}$. Ale $1 + \frac{1}{10} + \frac{k}{10} = 1 + \frac{k+1}{10}$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $(1 + \frac{1}{10})^k \geqslant 1 + \frac{k}{10}$, to $(1 + \frac{1}{10})^{k+1} \geqslant 1 + \frac{k+1}{10}$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważana nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.

5.2. Udowodnimy, że $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$, korzystając z zasady indukcji matematycznej.

Krok początkowy. Dla $k = 1$ lewa strona równości to 1^3, czyli 1. Natomiast prawa strona to $\frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$, czyli 1. Wzór jest zatem prawdziwy dla $k = 1$.

Krok następnikowy. Zakładamy, że $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$. Musimy udowodnić, że $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$.

Obliczamy $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$. Na mocy założenia indukcyjnego, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$, a zatem $\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3$.

Obliczamy: $\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4 \cdot (n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4 \cdot n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$.

Pokazaliśmy zatem, że jeśli $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$, to $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, rozważany wzór jest prawdziwy dla wszystkich $n \geqslant 1$.

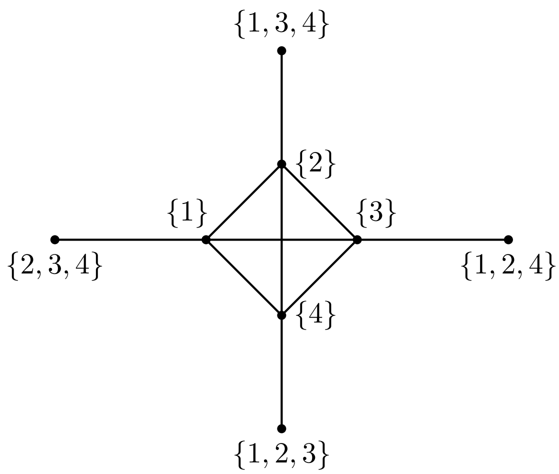
Rozwiązania

Mróweczka Doroteczka

1. Rodzina $\mathcal{A}$ ma następujące elementy:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

Rozważana relacja jest symetryczna, więc jej graf narysujemy jako graf niezorientowany. Każde dwa różne zbiory jednoelementowe są rozłączne, a każdy zbiór trójelementowy jest rozłączny wyłącznie z tym zbiorem jednoelementowym, którego element nie należy do rozważanego zbioru trójelementowego. Graf rozważanej relacji wygląda zatem następująco:



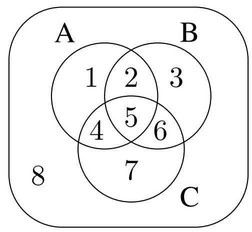
2. (a) Relacja R określona w zbiorze X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli $x \neq y$, to xRy lub yRx.

(b) Relacja $<$ w zbiorze liczb rzeczywistych jest spójna, co wynika z prawa trychotomii. Jeśli $x \neq y$, to $x < y$ lub $y < x$. Nie jest spójna np. relacja inkluzji zbiorów w rodzinie wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru o co najmniej dwóch elementach. Dla $X = \{1, 2, 3\}$ mamy np. $\{1, 2\} \neq \{2, 3\}$ ale nie zachodzi ani $\{1, 2\} \subseteq \{2, 3\}$ ani $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2\}$.

(c) Relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $|x - y| > \pi$ nie jest spójna, ponieważ np. $1 \neq 2$, ale nie zachodzi ani $1R2$ ani $2R1$. Mamy bowiem $|1 - 2| = 1 < \pi$ oraz $|2 - 1| = 1 < \pi$.

3. Znalezienie kontrprzykładu dla równości $A \cup (B - C) = A \cup (C - B)$ polega na podaniu takich zbiorów A, B i C, że wynik operacji po lewej stronie tej równości nie będzie tożsamy z wynikiem operacji po prawej stronie.

Można narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości. Jeśli wynik wykonanych operacji po lewej stronie nie będzie tożsamy z wynikiem operacji wykonanych po prawej stronie, to podane zbiory stanowią kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po lewej stronie równości:
$B - C = \{2, 3\}$
$A \cup (B - C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po prawej stronie równości:
$C - B = \{4, 7\}$
$A \cup (C - B) = \{1, 2, 4, 5, 7\}$.
Ponieważ $\{1, 2, 3, 4, 5\} \neq \{1, 2, 4, 5, 7\}$, więc podane zbiory A, B i C stanowią kontrprzykład dla rozważanej równości.

4. Funkcję $f(x) = x \cdot e^{-\sqrt{x}}$ możemy traktować jako iloczyn funkcji $g(x) = x$ i $h(x) = e^{-\sqrt{x}}$ lub jako iloraz funkcji $g(x) = x$ i $k(x) = e^{\sqrt{x}}$. Każdy z tych wyborów skutkuje tym samym wynikiem, korzystamy jedynie z innych wzorów na pochodne (iloczynu bądź ilorazu funkcji). Ponadto, wykorzystujemy wzory na pochodne funkcji wykładniczej, funkcji złożonej i funkcji potęgowej. Powiedzmy, że policzymy pochodną tej funkcji jako pochodną ilorazu funkcji $f(x) = \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}$:

$$f'(x) = (\frac{x}{e^{\sqrt{x}}})' =$$

$$\frac{(x)' \cdot e^{\sqrt{x}} - x \cdot (e^{\sqrt{x}})'}{(e^{\sqrt{x}})^2} =$$

$$\frac{1 \cdot e^{\sqrt{x}} - x \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'}{e^{\sqrt{x}+\sqrt{x}}} =$$

$$\frac{e^{\sqrt{x}} - x \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}{e^{2\cdot\sqrt{x}}} =$$

$$\frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{2\cdot\sqrt{x}}} \cdot (1 - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{x}}) =$$

$$\frac{2 - \sqrt{x}}{2 \cdot e^{\sqrt{x}}}.$$

5.1. To szczególny przypadek nierówności Bernoulliego, której dowód przeprowadzono na wykładzie. Dowód tego, że $(1 + \frac{1}{20})^n \geqslant 1 + \frac{n}{20}$, dla wszystkich $n \geqslant 1$ przebiega następująco.

Krok początkowy. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest 1. Ponieważ $(1 + \frac{1}{20})^1 \geqslant 1 + \frac{1}{20}$, więc badana nierówność zachodzi dla liczby 1.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne dla $k \geqslant 1$: $(1 + \frac{1}{20})^k \geqslant 1 + \frac{k}{20}$. Mamy udowodnić, że przy tym założeniu zachodzi: $(1 + \frac{1}{20})^{k+1} \geqslant 1 + \frac{k+1}{20}$.

Ponieważ $(1 + \frac{1}{20})^{k+1} = (1 + \frac{1}{20})^k \cdot (1 + \frac{1}{20})$, więc na mocy założenia indukcyjnego: $(1 + \frac{1}{20})^k \cdot (1 + \frac{1}{20}) \geqslant (1 + \frac{k}{20}) \cdot (1 + \frac{1}{20})$. Obliczamy: $(1 + \frac{k}{20}) \cdot (1 + \frac{1}{20}) = 1 + \frac{1}{20} + \frac{k}{20} + \frac{k}{400}$. Ponieważ $\frac{k}{400} > 0$, więc $1 + \frac{1}{20} + \frac{k}{20} + \frac{k}{400} > 1 + \frac{1}{20} + \frac{k}{20}$. Ale $1 + \frac{1}{20} + \frac{k}{20} = 1 + \frac{k+1}{20}$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $(1 + \frac{1}{20})^k \geqslant 1 + \frac{k}{20}$, to $(1 + \frac{1}{20})^{k+1} \geqslant 1 + \frac{k+1}{20}$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważana nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.

5.2. Udowodnimy, że $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$, korzystając z zasady indukcji matematycznej.

Krok początkowy. Dla $k = 1$ lewa strona równości ma postać $1 \cdot 2^1$, czyli równa jest 2. Natomiast prawa strona to $2 + (1-1) \cdot 2^{1+1}$, czyli $2 + 0 \cdot 4$, a więc równa jest 2. Wzór jest zatem prawdziwy dla $k = 1$.

Krok następnikowy. Zakładamy, że $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$. Musimy pokazać, że wtedy $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = 2 + n \cdot 2^{n+2}$.

Obliczamy $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^k + (n+1) \cdot 2^{n+1}$. Na mocy założenia indukcyjnego $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$, a zatem $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+1}$.

Obliczamy $2 + (n-1) \cdot 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2 + 2^{n+1} \cdot (n - 1 + n + 1) = 2 + 2 \cdot n \cdot 2^{n+1} = 2 + n \cdot 2^{n+2}$.

Pokazaliśmy zatem, że jeśli $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$, to $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = 2 + n \cdot 2^{n+2}$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, rozważany wzór jest prawdziwy dla wszystkich $n \geqslant 1$.