MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

WYKŁAD 9: RÓŻNICZKOWANIE

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Głównym pojęciem wprowadzonym na dzisiejszym wykładzie będzie pojęcie *pochodnej* (funkcji rzeczywistej jednej zmiennej). Pojęcie to funkcjonuje w matematyce od prawie czterystu lat i w krajach cywilizowanych jest omawiane w edukacji szkolnej. W niezliczonych zastosowaniach matematyki w badaniach empirycznych pojęcie pochodnej odgrywa zasadniczą rolę. Przy jego pomocy ustalać można np. szybkość zmian wielkości zależnej od innej wielkości, ekstremalne wartości przyjmowane przez funkcję opisującą badaną zależność, itp. Znajdowanie pochodnych funkcji – czyli ich różniczkowanie – jest procedurą niezbyt skomplikowaną. Aby się z nią oswoić wystarcza dobre rozumienie pojęcia granicy, omówionego na poprzednim wykładzie.

1 Pochodna funkcji jednej zmiennej

Pochodna funkcji w danym punkcie to pojęcie dotyczące *lokalnych* własności funkcji – tego, w jaki sposób zmieniają się wartości funkcji dla argumentów z dowolnie małego otoczenia wybranego punktu.

1.1 Definicja

Załóżmy, że funkcja f o wartościach rzeczywistych jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, czyli w pewnym przedziale otwartym $(x_0 - a, x_0 + a)$, gdzie $a > 0$. Niech $0 < |h| < a$. *Ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu h zmiennej niezależnej nazywamy liczbę:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Powszechnie używa się też następujących oznaczeń oraz terminologii dla funkcji $y = f(x)$:

1. Liczbę h, czyli przyrost zmiennej niezależnej oznacza się przez $\triangle x$.
2. Liczbę $f(x_0+h)-f(x_0)$, czyli przyrost zmiennej zależnej oznacza się przez $\triangle y$.
3. Przy tych oznaczeniach iloraz różnicowy ma postać:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu h ma prostą interpretację geometryczną: jest równy tangensowi nachylenia siecznej do krzywej $y = f(x)$ w punktach $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Jeśli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz istnieje granica ilorazu różnicowego:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

to tę granicę nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy przez $f'(x_0)$.

Jeżeli istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0, to mówimy, że f jest *różniczkowalna* w punkcie x_0.

UWAGA. Dla pochodnej funkcji $y = f(x)$ używa się także następujących oznaczeń: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, przy czym symbole te należy traktować jako całości, a nie jako iloraz (dwóch „nieskończenie małych" wielkości). To notacja proponowana przez Leibniza. W fizyce używa się też oznaczenia: $\dot{y}$ (notacja proponowana przez Newtona).

Wprost z definicji pochodnej funkcji w punkcie wynikają następujące dwa wnioski:

1. Niech f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $a > 0$ oraz $\delta > 0$ takie, że dla $|h| < \delta$:

   $$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + \varepsilon(x_0, h),$$

   gdzie funkcja ε spełnia warunek:

   $$\lim_{h\to 0} \varepsilon(x_0, h) = 0.$$

   Zachodzi wówczas $a = f'(x_0)$.
2. Funkcja różniczkowalna w punkcie x_0 jest w tym punkcie ciągła.

Dodajmy, że istnieją funkcje ciągłe w danym punkcie, ale nie posiadające pochodnej w tym punkcie. Co więcej, istnieją funkcje ciągłe określone na całym zbiorze $\mathbb{R}$, które nie są różniczkowalne w żadnym punkcie tego zbioru.

Dla zaspokojenia *głodu rachunków*, który deklarowali słuchacze, rozważmy kilka przykładów. Obliczenia zostaną wykonane kredą na tablicy. Uważamy, że stanowi to nagrodę dla tych słuchaczy, którzy – niezależnie od warunków atmosferycznych oraz licznych pokus czyhających na studenta pierwszego roku poza murami Uczelni – decydują się na uczestnictwo w wykładzie. Natomiast nagrodą dla tych, którzy w wykładach nie uczestniczą jest możliwość wykonania samodzielnie (a więc w komfortowych warunkach, gdy nikt nie wtrąca się do naszego bystrego toku myślenia) odnośnych rachunków lub lektura zalecanych pozycji bibliograficznych.
PRZYKŁADY.

1. *Funkcja* $f(x) = x^n$. Pokażemy, że $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$ dla wszystkich $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz $n \geqslant 1$.

2. *Funkcja* $f(x) = \sqrt{x}$. Niech $x_0 > 0$. Pokażemy, że $f'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}$.

3. *Funkcja* $f(x) = \sin x$. Pokażemy, że $f'(x_0) = \cos x_0$.

4. *Funkcja* $f(x) = \cos x$. Pokażemy, że $f'(x_0) = -\sin x_0$.

5. *Funkcja* $f(x) = a^x$, *gdzie* $a > 0$. Pokażemy, że $f'(x_0) = a^{x_0} \cdot \ln a$. Zakładamy, że słuchacze dowiedzieli się na konwersatorium, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ dla $a > 0$ (dowód tej równości znajdą słuchacze także np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, na stronach 142–143, Tom I, część 1).

6. *Funkcja* $f(x) = |x|$. Pokażemy, że $f'(0)$ nie istnieje, ponieważ granica lewostronna ilorazu różnicowego funkcji f w punkcie x_0 jest różna od granicy prawostronnej tego ilorazu w tym punkcie.

7. *Funkcja* $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Niech $x_0 = 0$. Pokażemy, że iloraz różnicowy tej funkcji w punkcie $x_0 = 0$ nie ma ani granicy lewostronnej ani granicy prawostronnej, a zatem pochodna tej funkcji w punkcie $x_0 = 0$ nie istnieje.

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym przedziale $[x_0, x_0 + a]$, gdzie $a > 0$ oraz istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

to tę granicę nazywamy *pochodną prawostronną funkcji* f *w punkcie* x_0 i oznaczamy przez $f'_+(x_0)$.

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym przedziale $[x_0 - a, x_0]$, gdzie $a > 0$ oraz istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

to tę granicę nazywamy *pochodną lewostronną funkcji* f *w punkcie* x_0 i oznaczamy przez $f'_-(x_0)$.

Jak słuchacze się domyślają, funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 ma w tym punkcie pochodną dokładnie wtedy, gdy ma w tym punkcie pochodną prawostronną oraz pochodną lewostronną i obie te pochodne są równe $f'(x_0)$.

1.2 Interpretacje

Zwykle podaje się następujące dwie interpretacje pojęcia pochodnej funkcji w punkcie: interpretację *geometryczną* oraz interpretację *mechaniczną*. Pierwsza z tych interpretacji zachowuje ważność dla dowolnych funkcji, druga jest właściwie wykorzystaniem zjawisk fizycznych, które opisujemy przy użyciu pochodnych.

1.2.1 Interpretacja geometryczna: wyznaczanie stycznej do krzywej

Jak już wspomnieliśmy, iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu h jest równy tangensowi nachylenia siecznej do krzywej $y = f(x)$ w punktach $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Dla różnych wartości h otrzymamy różne takie sieczne, przechodzące przez punkt $(x_0, f(x_0))$. Gdy h dąży do 0, to punkt $(x_0+h, f(x_0+h))$ przybliża się do punktu $(x_0, f(x_0))$. Tak więc, w tym przypadku „graniczna sieczna” jest styczną do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to *styczną do krzywej* $y = f(x)$ *w punkcie* $(x_0, f(x_0))$ jest prosta o współczynniku kierunkowym $f'(x_0)$, przechodząca przez punkt $(x_0, f(x_0))$.

Tak więc, równaniem stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ (różniczkowalnej w punkcie x_0) jest:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Równaniem *normalnej do krzywej* $y = f(x)$ *w punkcie* $(x_0, f(x_0))$ jest (przy założeniu, że $0 \neq |f'(x_0)| < \infty$):

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

1.2.2 Interpretacja mechaniczna: ustalanie prędkości chwilowej

Wyobraźmy sobie punkt poruszający się po osi liczbowej $\mathbb{R}$ w ten sposób, że w chwili t jego położenie określa funkcja $x(t)$. Rozważymy dwa przypadki.
POŁOŻENIE JEST LINIOWĄ FUNKCJĄ CZASU. To bardzo prosty pojęciowo przypadek: $x(t) = v \cdot t + w$. Wtedy przyrostowi czasu $h = \triangle t$ odpowiada przyrost drogi: $\triangle x = x(t + t_0) - x(t_0) = v \cdot (t + t_0) + w - v \cdot t_0 - w = v \cdot h$. Stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu jest wtedy równy:

$$\frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{x(t + t_0) - x(t_0)}{h} = \frac{v \cdot h}{h} = v,$$

czyli jest wielkością stałą. Wtedy stosunek ten nazywamy *prędkością ruchu punktu*.
POŁOŻENIE JEST DOWOLNĄ FUNKCJĄ CZASU. Przypuśćmy z kolei, że $x(t)$ jest całkiem dowolną funkcją czasu. Nie ma wtedy żadnego powodu, aby iloraz różnicowy $\frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$ funkcji $x(t)$ w punkcie t_0 dla przyrostu h był wielkością stałą, albowiem może on istotnie zależeć od przyrostu $\triangle t = h$. Wartość tego ilorazu nazywamy *średnią prędkością* w punkcie (chwili) t_0 dla przyrostu $\triangle t$. Rozważenie możliwości przejścia do granicy średniej prędkości przy przyroście $\triangle t$ dążącym do zera (przy założeniu, że granica ta istnieje) było jednym z przełomowych momentów w fizyce. Zauważmy, że granica ta (o ile istnieje) zależy tylko od t_0. Jak już wiemy, granica ta jest równa pochodnej funkcji x (zależnej od czasu t) w punkcie t_0. Nazywamy ją *prędkością chwilową* w chwili t_0 i zwykle oznaczamy przez $v(t_0)$. Mamy zatem:

$$v(t_0) = x'(t_0) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t}.$$

Gorąco zachęcamy słuchaczy do chwili refleksji nad tym odważnym krokiem w opisie rzeczywistości fizycznej.

1.2.3 Przykłady ekonomiczne

Jest rzeczą tajemniczą (przynajmniej dla piszącego te słowa), że zastosowania pochodnych do problemów ekonomicznych uważa się dość powszechnie za *wielce praktyczne*. Pieniądze są przecież bytami fikcyjnymi, ich istnienie jest czysto umowne. Ponadto, ludzkie zachowania związane z tymi fikcyjnymi bytami często nie dają się ująć w precyzyjnie sformułowane reguły.

1. *Koszt krańcowy*. Niech $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją opisującą zależność kosztów od wielkości produkcji x. Wtedy iloraz różnicowy

$$(\bigstar) \qquad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

oznacza przeciętny koszt wytworzenia jednostki produktu, jeśli zwiększymy produkcję o $\triangle x$ jednostek, uważając produkcję w wysokości x_0 za wyjściową (Piszczała 1993, strona 80, zamieniliśmy numer wzoru na (★)). W podręczniku Piszczała 1993 dalej na tej stronie czytamy:

> Tym samym więc iloraz (★) określa, w jakim stopniu funkcja kosztów f jest czuła na przyrost produkcji x. Jednak ocena wzorem (★) reakcji funkcji f na przyrost produkcji daje pogląd tylko na przeciętną prędkość zmiany wartości tej funkcji w przedziale $[x_0, x_0 + \triangle x]$. Charakterystyka prędkości zmian funkcji f wzorem (★) nie jest więc precyzyjna. Dokładną charakterystykę prędkości zmian funkcji kosztów otrzymujemy wtedy, gdy w ilorazie (★) przejdziemy do granicy przy $\triangle x \to 0$. Granicę
>
> $$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = f'(x_0)$$
>
> nazywamy *kosztem krańcowym* funkcji f w punkcie x_0. Koszt krańcowy jest miarą prędkości zmiany wartości funkcji f w punkcie x_0.

Trzeba oczywiście pamiętać, że tego typu propozycje są pewnymi *idealizacjami*, jak zawsze, gdy mamy do czynienia z zastosowaniami matematyki w badaniach empirycznych. Takie idealizacje są jednak niezbędne, co pokazuje rozwój nauki co najmniej od czasów Galileusza i Newtona.

2. *Elastyczność funkcji*. Niech $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją opisującą jakąś zależność ekonomiczną (np. zależność kosztu od wielkości produkcji, zależność popytu od ceny, zależność popytu od dochodu). *Elastycznością przeciętną funkcji f w przedziale* $[x_0, x_0 + \triangle x]$ (gdzie $x_0 > 0$, $\triangle x > 0$) nazywamy stosunek przyrostu względnego wartości funkcji do przyrostu względnego jej argumentu, czyli ułamek o liczniku równym $\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{f(x_0)}$ oraz mianowniku równym $\frac{\triangle x}{x_0}$. Proste działania na ułamkach pokazują, że stosunek ten jest równy:

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}.$$

Elastycznością funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)},$$

którą oznaczmy np. przez $E_f(x_0)$. Tak więc, elastycznością funkcji f w punkcie x_0 jest wartość funkcji $E_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$ w punkcie x_0.

Można z łatwością udowodnić (zachęcamy słuchaczy do zmierzenia się z tym wyzwaniem), że jeśli przyrostowi zmiennej niezależnej funkcji f o $p\%$ odpowiada przyrost wartości tej funkcji o $q\%$, to q jest w przybliżeniu (czyli dla dostatecznie małych przyrostów zmiennej niezależnej) równe $p \cdot E_f(x)$. W podręczniku Piszczała 1993 na stronie 82 czytamy:

> Z doświadczenia wiadomo, że zmiany ceny i popytu mają nie tylko kierunki przeciwne, ale ponadto zmiana ceny w różnym stopniu wpływa na zmianę popytu. Podwyższenie cen towarów pierwszej potrzeby nie ma większego wpływu na zmniejszenie popytu, natomiast nieznaczne podwyższenie cen artykułów luksusowych może spowodować duże ograniczenie ich popytu. Wynika więc z tego, że można klasyfikować towary, obserwując jak reaguje ich popyt na zmiany ceny.

3. *Trend logistyczny*. W podręczniku Piszczała 1993 na stronie 89 czytamy:

> Rozwój niektórych wielkości w czasie charakteryzuje się następującą tendencją: z początku wielkość ta szybko rośnie, jednak po osiągnięciu pewnego poziomu prędkość wzrostu jest coraz słabsza, po czym następuje stabilizacja tej wielkości. Taką tendencję obserwuje się badając na przykład popyt na nowo wprowadzone na rynek dobra trwałego użytku (telewizory, samochody), przy stałości ogólnych warunków ekonomicznych. Do opisu zjawiska, które rozwija się zgodnie z taką tendencją, może służyć krzywa logistyczna, określona wzorem
> $f(t) = \frac{a}{1+b\cdot e^{-c\cdot t}}$, gdzie $a, b, c > 0$.

Na wykładzie w przyszłym tygodniu zbadamy przebieg zmienności tej funkcji, czyli określimy jej dziedzinę, zbadamy czy funkcja przyjmuje wartości ekstremalne (minima i maksima lokalne), zbadamy jej monotoniczność (asymptoty, wypukłość i wklęsłość w określonych przedziałach, punkt przegięcia). Widoczna stanie się wtedy rola parametrów a, b oraz c. Będziemy także mogli naszkicować wykres tej funkcji. Omawiana funkcja jest funkcją złożoną, więc obliczanie jej pochodnej podlega regułom, o których powiemy za chwilę.

Dość powszechnie uważa się, że dobre gospodarowanie zakłada maksymalizację *zysku*. Pomijając różne złożone uwarunkowania tej drapieżnej maksymy, powiedzmy w tym miejscu jedynie, że – skoro zysk traktujemy jako różnicę między dochodem ze sprzedaży a poniesionymi kosztami produkcji – to pytanie o maksymalizację zysku jest pytaniem, kiedy ta różnica przyjmuje wartość maksymalną. Na następnym wykładzie pokażemy, że odpowiedź na tak postawione pytanie uzyskujemy badając pochodne rozważanych funkcji (ustalając, kiedy funkcja ma ekstremum lokalne).

2 Reguły obliczania pochodnych

Podamy teraz wybrane reguły obliczania pochodnych funkcji oraz fakty dotyczące działań arytmetycznych na pochodnych. Dowody odnośnych twierdzeń znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, na stronach 23–30 (proszę zauważyć, że teraz korzystamy z części 2 tomu I tego podręcznika).

1. Załóżmy, że funkcje f i g są określone w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz że są różniczkowalne w tym punkcie. Wtedy różniczkowalne w tym punkcie są również funkcje: $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$ (dla $c \in \mathbb{R}$). Zachodzą wzory:
   $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
   $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
   $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
   $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.
   Ponadto, jeśli $g'(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ również jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz: $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$. W szczególności, przy tych założeniach: $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

2. Załóżmy, że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x_0, natomiast funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $u_0 = g(x_0)$. Wtedy funkcja złożona $f \circ g$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz zachodzi:
   $$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$
   Pamiętamy, że $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Funkcję f nazywamy funkcją *zewnętrzną* złożenia $f \circ g$, zaś funkcję g funkcją *wewnętrzną* tego złożenia. Jeśli stosujemy zapis: $y = f(u)$, $u = g(x)$, to w notacji Leibniza możemy zapisać powyższy wzór następująco:
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Należy jednak pamiętać o zastrzeżeniach dotyczących rozumienia notacji Leibniza.

3. Załóżmy, że f jest ciągła i monotoniczna w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz różniczkowalna w x_0. Niech ponadto $f'(x_0) \neq 0$. Wtedy funkcja f^{-1} odwrotna do funkcji f również jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ oraz zachodzi:
$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dla przykładu, udowodnimy wzór dotyczący obliczania pochodnej iloczynu funkcji w punkcie x_0, czyli wzór: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$. Zauważmy najpierw, że (co będzie potrzebne w dalszych rachunkach): jeśli g jest różniczkowalna w punkcie x_0, to g jest ciągła w punkcie x_0, czyli $\lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$. Mamy:

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0}(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot g(x_0+h) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}) =$
$\lim\limits_{h\to 0}(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot g(x_0+h)) + \lim\limits_{h\to 0}(f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}) =$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot \lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h) + f(x_0) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}) =$
$f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Rozważmy przykłady czysto rachunkowe, wykorzystujące powyżej wprowadzone reguły.

PRZYKŁADY.

1. *Pochodna funkcji wielomianowej*. Pochodną funkcji wielomianowej

   $f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n$

   jest funkcja wielomianowa

   $f'(x) = n \cdot a_0 \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_1 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$.

2. *Pochodne funkcji trygonometrycznych*. Wiemy już, że $(\sin x)' = \cos x$ oraz $(\cos x)' = -\sin x$. Mamy ponadto:

   (a) Dla $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ ($n \in \mathbb{Z}$):
   $$(\text{tg } x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(b) Dla $x \neq n \cdot \pi$ ($n \in \mathbb{Z}$):

$$(\text{ctg}\, x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

3. *Pochodna funkcji złożonej*. Obliczymy np. pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x^4+1}$ w punkcie $x_0 = 1$. Funkcja f jest złożeniem funkcji $g(x) = \sqrt{x}$ oraz $h(x) = \sqrt{x^4+1}$:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^4+1) = \sqrt{x^4+1}.$$

   Mamy: $g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ oraz $h'(x) = 4 \cdot x^3$. Tak więc:

$$f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{h(x)}} \cdot 4 \cdot x^3 = \frac{2 \cdot x^3}{\sqrt{x^4+1}}.$$

   Dla $x_0 = 1$ mamy: $f'(1) = \frac{2 \cdot 1^3}{\sqrt{1^4+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

4. *Pochodna funkcji odwrotnej*. Niech $f(x) = \log_a x$, gdzie $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Ponieważ funkcja logarytmiczna $\log_a x$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej a^x, więc:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

   W szczególności: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Zachęcamy słuchaczy do samodzielnego wykazania, że pochodna funkcji złożonej, opisującej omawiany wyżej *trend logistyczny*, czyli funkcji $f(t) = \frac{a}{1+b \cdot e^{-c \cdot t}}$, gdzie $a, b, c > 0$, jest równa:

$$f'(t) = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-c \cdot t}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot t})^2}.$$

Z pewnych wzorów na obliczanie pochodnych korzysta się bardzo często. Należą do takich wzorów np. następujące (część z nich uzasadniono powyżej, pozostałe mogą słuchacze uzasadnić samodzielnie, w ramach treningu intelektualnego):

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
2. $(\frac{1}{x^n})' = -\frac{n}{x^{n+1}}$
3. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

4. $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

6. $(\frac{1}{\sqrt[n]{x}})' = -\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n+1}}}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

12. $(e^x)' = e^x$

13. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$

14. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

15. $(x^x)' = x^x \cdot (\ln x + 1)$

16. $(\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})' = \frac{1}{1-x^2}$

3 Pochodne wyższych rzędów

Założymy się, że słuchacze zadali już sobie w myślach pytanie: czy proces różniczkowania można *iterować*, czyli obliczać pochodną pochodnej funkcji w danym punkcie? Przy jakich założeniach można to uczynić? Jaki jest sens takiej procedury, czyli jakie informacje o funkcji wyjściowej uzyskujemy, badając pochodną jej pochodnej?

Załóżmy, że funkcja f jest określona i różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0. Jeżeli jej pochodna f' ma pochodną w punkcie x_0, to tę pochodną nazywa się *drugą pochodną* (*pochodną drugiego rzędu*) funkcji f w punkcie x_0 i oznacza przez $f''(x_0)$. Inne oznaczenie to: $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$.

Przyjmując, że pochodna rzędu zerowego funkcji f to sama funkcja f, można – posługując się definiowaniem przez indukcję – określić pochodne n-tego rzędu w sposób następujący.

Załóżmy, że funkcja f jest określona i ma pochodną $f^{(n-1)}$ rzędu $n-1$ (gdzie $n \geqslant 1$) w pewnym otoczeniu punktu x_0. Jeżeli funkcja $f^{(n-1)}$ ma pochodną w

punkcie x_0, to nazywamy ją *n-tą pochodną* (*pochodną rzędu* n) funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy przez $f^{(n)}(x_0)$. Inne oznaczenie: $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$.
PRZYKŁADY.

1. *Pochodna wielomianu*. Niech np. $f(x) = 7 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 11$. Mamy wtedy kolejno:
   $f'(x) = 21 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 4$
   $f''(x) = 42 \cdot x + 10$
   $f^{(3)}(x) = 42$
   $f^{(4)}(x) = 0 = f^{(n)}(x)$ dla wszystkich $n \geqslant 4$.
2. *Spadek swobodny*. Rozważmy spadek swobodny punktu materialnego pod wpływem przyspieszenia ziemskiego g. Jak pamiętamy ze szkoły, droga przebyta przez ten punkt w czasie t wyraża się wzorem $f(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$. Prędkość spadania (czyli pochodna tej funkcji) wyznaczona jest zatem wzorem $v(t) = f'(t) = g \cdot t$. Zmiana tej prędkości w czasie, czyli *przyspieszenie* jest pochodną prędkości spadania, a więc drugą pochodną drogi przebytej w danym czasie: $a(t) = v'(t) = f''(t)$. Z rachunku wynika, że $a(t) = (g \cdot t)' = g$, czyli to przyspieszenie jest stałe.
3. *Sinus i cosinus*. Wiemy już, że $(\sin x)' = \cos x$ oraz $(\cos x)' = -\sin x$. Mamy zatem:
   (a) $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$
   (b) $(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$

   Zachęcamy słuchaczy do samodzielnego policzenia n-tych pochodnych funkcji sinus i cosinus.

Bez wnikania w szczegóły (które zainteresowani słuchacze znajdą np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, na stronach 66–69, Tom I, część 2) wyliczymy jedynie kilka własności pochodnych n-tego rzędu:
WYBRANE WŁASNOŚCI.

1. Załóżmy, że funkcje f oraz g są określone w pewnym otoczeniu punktu x_0 i mają skończone pochodne $f^{(n)}(x_0)$ i $g^{(n)}(x_0)$. Wtedy funkcje $f+g$, $f-g$, $c \cdot f$ (dla $c \in \mathbb{R}$) również mają skończone pochodne w punkcie x_0 oraz:
   $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$
   $(f-g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - g^{(n)}(x_0)$
   $(c \cdot f)^{(n)}(x_0) = c \cdot f^{(n)}(x_0)$.

2. *Wzór Leibniza*. Załóżmy, że funkcje f oraz g są określone w pewnym otoczeniu punktu x_0 i mają skończone pochodne $f^{(n)}(x_0)$ i $g^{(n)}(x_0)$. Wtedy funkcja $f \cdot g$ również ma skończoną pochodną w punkcie x_0 oraz:

   $(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^k(x_0).$

Jak zapewne domyślają się słuchacze, wzór Leibniza można udowodnić, posługując się zasadą indukcji matematycznej. Gorąco zachęcamy do wykonania tego ćwiczenia intelektualnego. Zachęcam również do zadumy nad faktem, że – z czysto formalnego punktu widzenia – wzór ten kojarzy się z wzorem dwumianowym Newtona. Jakaż może być tego przyczyna?

4 Dodatek: różniczkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych

Naturalne jest pytanie: czy (przy jakich założeniach) z tego, że ciąg (f_n) funkcji różniczkowalnych jest zbieżny do funkcji f wynika, że ciąg ich pochodnych jest zbieżny do pochodnej funkcji f. Podobne pytanie zadać można dla szeregów funkcyjnych. Ograniczymy się jedynie do przytoczenia sformułowań trzech twierdzeń, ustalających odpowiedzi na te pytania. Ich dowody (korzystające z pewnych twierdzeń, które sformułujemy za tydzień, ale nieco wykraczające poza zakres niniejszego usługowego kursu) znajdą zainteresowani słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, na stronach 48–56, Tom I, część 2.

1. Załóżmy, że w przedziale właściwym (a, b) określony jest ciąg funkcji (f_n), takich, że:

   (a) ciąg $(f_n(x_0))$ jest zbieżny dla pewnego $x_0 \in (a, b)$
   (b) funkcje f_n są różniczkowalne w (a, b)
   (c) ciąg pochodnych (f'_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji g w (a, b).

   Wtedy: ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny w (a, b), funkcja $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ jest różniczkowalna w (a, b) oraz $f'(x) = g(x)$ dla $x \in (a, b)$.

2. Załóżmy, że w przedziale właściwym (a, b) określony jest ciąg funkcji (f_n), takich, że:

   (a) szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ jest zbieżny dla pewnego $x_0 \in (a, b)$
   (b) funkcje f_n są różniczkowalne w (a, b)

(c) szereg pochodnych $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny do sumy $g(x)$ w (a, b).

Wtedy: szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w (a, b), funkcja $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$jest różniczkowalna w (a, b) oraz $f'(x) = g(x)$ dla $x \in (a, b)$.

3. Szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ma wewnątrz swojego przedziału zbieżności $(-R, R)$ (gdzie $R > 0$) pochodną $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n)'$, przy czym zachodzi równość:
   $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$
   dla wszystkich $|x| < R$. Promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ jest R.

5 Zachęta do refleksji

1. Jak rozumiesz stwierdzenie: *stopa bezrobocia rośnie coraz szybciej*?
2. Dlaczego parasol skutecznie chroni przed deszczem? Przecież krople wody spadają ze znacznej wysokości, ponadto robią się coraz większe podczas swojego lotu.
3. Jaki jest sens fizyczny wyższych pochodnych (np. dla funkcji opisującej zależność przebytej drogi od czasu)? Czy potrafimy zwerbalizować (po polsku, angielsku, japońsku, kaszubsku, itd.) jaki jest sens fizyczny np. siódmej pochodnej funkcji opisującej zależność przebytej drogi od czasu?
4. Czy do mówienia o różniczkowalności funkcji konieczne jest założenie aksjomatu ciągłości?
5. Wspomniano, że istnieją funkcje, które nie mają pochodnej w żadnym punkcie. Jak wygląda wykres takiej funkcji?
6. Czy różniczkowanie jest procesem algorytmicznym?

6 Podsumowanie

To, co należy zapamiętać z niniejszego wykładu:

1. Pochodna funkcji w punkcie. Pochodna funkcji.
2. Reguły obliczania pochodnych: pochodna funkcji złożonej, pochodna funkcji odwrotnej, pochodna iloczynu i ilorazu funkcji.
3. Pochodne wyższych rzędów.

7 Wybrane pozycje bibliograficzne

Kuratowski, K. 1976. *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Leja, F. 1976. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Musielak, H., Musielak, J. 2004. *Analiza matematyczna. Tom I Część 2: Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Niedziałowski, K., Kowalczyk, R., Obczyński, C. 2013. *Granice i pochodne. Metody rozwiązywania zadań*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Piszczała, J. 1993. *Matematyka i jej zastosowanie w naukach ekonomicznych*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.