Matematyczne Podstawy Kognitywistyki

Zaliczenie Wykładu: 29.I.2020

Kognitywistyka UAM, 2019–2020

Imię i nazwisko: . . . . Lewa Mróweczka

1. [2 punkty] Podaj definicję warunku przechodniości relacji R w zbiorze X. Podaj przykład relacji na liczbach rzeczywistych, która nie jest przechodnia.

2. [2 punkty] Niech $A = \{8, 10, 16\}$, $B = \{2^3, 3^2, 4^2\}$, $C = \{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $D = \{6, 8, 9, 10, 12, 14, 16\}$. Znajdź elementy minimalne i maksymalne względem inkluzji właściwej $\subset$ w rodzinie zbiorów $\{A, B, C, D\}$. Czy rodzina ta ma element największy i najmniejszy względem inkluzji $\subset$?

3. [3 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$(A \cap C) - (B \cup C) = (B \cup C) - (A \cap C)$$

4. [3 punkty] Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)}$$

5. [5 punktów] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i przeprowadź dowód:

1. Udowodnij Lemat Königa: jeśli drzewo $D = (X, R, x_0)$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.
2. Udowodnij przez indukcję matematyczną: $(1 + \frac{1}{3})^n \geqslant 1 + \frac{n}{3}$, dla wszystkich $n \geqslant 1$.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

ZALICZENIE WYKŁADU: 29.I.2020

KOGNITYWISTYKA UAM, 2019–2020

Imię i nazwisko: . . . . PRAWA MRÓWECZKA

1. [2 punkty] Podaj definicję warunku spójności relacji R w zbiorze X. Podaj przykład relacji na liczbach rzeczywistych, która nie jest spójna.

2. [2 punkty] Niech $A = \{5, 6, 7, 15, 16, 27, 36\}$, $B = \{6, 7, 15, 16, 26, 27, 36\}$, $C = \{6, 7, 4^2, 27, 36\}$, $D = \{2^4, 3^3, 6^2\}$. Znajdź elementy minimalne i maksymalne względem inkluzji właściwej $\subset$ w rodzinie zbiorów $\{A, B, C, D\}$. Czy rodzina ta ma element największy i najmniejszy względem inkluzji $\subset$?

3. [3 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$(A \cup C) - (B \cap C) = (B \cap C) - (A \cup C)$$

4. [3 punkty] Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}$$

5. [5 punktów] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i przeprowadź dowód:

1. Udowodnij TWIERDZENIE CANTORA: żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.
2. Udowodnij przez indukcję matematyczną: $(1 + \frac{1}{5})^n \geqslant 1 + \frac{n}{5}$, dla wszystkich $n \geqslant 1$.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

ROZWIĄZANIA

LEWA MRÓWECZKA

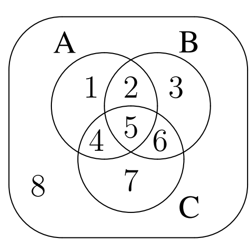
1. Relacja $R \subseteq X \times X$ jest przechodnia w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x \in X$, $y \in X$ oraz $z \in X$: jeśli xRy oraz yRz, to xRz.

W zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ istnieje nieskończenie wiele relacji, które nie są przechodnie. Taka jest np. relacja: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y^2$. Mamy bowiem np.: $4R2$, $2R\sqrt{2}$, ale nie zachodzi $4R\sqrt{2}$.

2. Porównując zbiory A, B, C oraz D widzimy, że: $B \subset D$, $A \subset C$, $C \subset D$, a więc także $A \subset D$. Ponadto, nie zachodzi ani $A \subset B$ ani $B \subset A$. A zatem: D jest elementem największym rozważanej rodziny (bo wszystkie pozostałe elementy rodziny są w nim zawarte), a więc także maksymalnym (czyli nie istnieje w tej rodzinie zbiór go zawierający), natomiast A i B są różnymi (nieporównywalnymi względem inkluzji) elementami minimalnymi tej rodziny (bo nie istnieje w tej rodzinie zbiór zawarty w A lub zawarty w B), czyli w rozważanej rodzinie nie istnieje element najmniejszy względem inkluzji (ponieważ nie ma w tej rodzinie zbioru, który byłby zawarty we wszystkich pozostałych).

3. Zadanie można rozwiązać bardzo prosto, zauważając, że podana równość jest postaci $X - Y = Y - X$ (gdzie $X = A \cap C$ oraz $Y = B \cup C$). Jeśli przyjmiemy np. $X = \{1, 2\}$, a $Y = \{2, 3\}$, to $X - Y = \{1\}$ oraz $Y - X = \{3\}$, a zatem podana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.

Można też narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:

$A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$
$A \cap C = \{4, 5\}$
$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$(A \cap C) - (B \cup C) = \emptyset$
$(B \cup C) - (A \cap C) = \{2, 3, 6, 7\}$.

Widzimy zatem, że podane wyżej zbiory A, B i C nie spełniają badanej równości, a więc nie jest ona prawem rachunku zbiorów.

4. Pochodną funkcji $f(x) = \frac{1-\sin(x)}{\cos(x)}$ obliczamy, korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:

$f'(x) = (\frac{1-\sin(x)}{\cos(x)})' =$
$\frac{(1-\sin(x))' \cdot \cos(x) - (1-\sin(x)) \cdot (\cos(x))'}{\cos^2(x)} =$
$\frac{(-\cos(x)) \cdot \cos(x) - (1-\sin(x)) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$
$\frac{-\cos^2(x) + (\sin(x) - \sin^2(x))}{\cos^2(x)} =$
$\frac{\sin(x) - (\sin^2(x) + \cos^2(x))}{\cos^2(x)} =$
$\frac{\sin(x) - 1}{\cos^2(x)}$

5.1. LEMAT KÖNIGA. *Jeśli drzewo $D = (X, R, x_0)$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.*

DOWÓD. Przypuśćmy, że D jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w D przez indukcję matematyczną.

Element x_0 (czyli korzeń drzewa D) jest pierwszym elementem konstruowanej gałęzi. Ponieważ D jest nieskończone, więc x_0 ma nieskończenie wiele R-następników. Element x_0 należy do zerowego poziomu drzewa D. Ponieważ D jest drzewem rzędu skończonego, więc x_0 ma jedynie skończenie wiele bezpośrednich R-następników, a zatem któryś z nich (możliwe, że kilka z nich) ma nieskończenie wiele R-następników. Za x_1 wybieramy więc jeden z owych bezpośrednich następników elementu x_0, który sam ma nieskończenie wiele R-następników. Wtedy oczywiście x_1 należy do pierwszego poziomu drzewa D.

Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że x_i należy do i-tego poziomu drzewa D oraz x_i ma nieskończenie wiele R-następników. Z założenia, x_{n-1} ma tylko skończenie wiele *bezpośrednich* R-następników. Ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele R-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich R-następników także ma nieskończenie wiele R-następników. Wybieramy więc element x_n z n-tego poziomu drzewa D o tej właśnie własności. Wtedy

x_n ma nieskończenie wiele R-następników. Ponieważ jest tak dla każdego n, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie D.

5.2. To szczególny przypadek nierówności Bernoulliego, której dowód przeprowadzono na wykładzie. Dowód tego, że $(1 + \frac{1}{3})^n \geqslant 1 + \frac{n}{3}$, dla wszystkich $n \geqslant 1$ przebiega następująco.

Krok początkowy. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest 1. Ponieważ $(1 + \frac{1}{3})^1 \geqslant 1 + \frac{1}{3}$, więc badana nierówność zachodzi dla liczby 1.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne dla $k \geqslant 1$: $(1 + \frac{1}{3})^k \geqslant 1 + \frac{k}{3}$. Mamy udowodnić, że przy tym założeniu zachodzi: $(1 + \frac{1}{3})^{k+1} \geqslant 1 + \frac{k+1}{3}$.

Ponieważ $(1+\frac{1}{3})^{k+1} = (1+\frac{1}{3})^k \cdot (1+\frac{1}{3})$, więc na mocy założenia indukcyjnego: $(1+\frac{1}{3})^k \cdot (1+\frac{1}{3}) \geqslant (1+\frac{k}{3}) \cdot (1+\frac{1}{3})$. Obliczamy: $(1+\frac{k}{3}) \cdot (1+\frac{1}{3}) = 1+\frac{1}{3}+\frac{k}{3}+\frac{k}{9}$. Ponieważ $\frac{k}{9} > 0$, więc $1 + \frac{1}{3} + \frac{k}{3} + \frac{k}{9} > 1 + \frac{1}{3} + \frac{k}{3}$. Ale $1 + \frac{1}{3} + \frac{k}{3} = 1 + \frac{k+1}{3}$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $(1 + \frac{1}{3})^k \geqslant 1 + \frac{k}{3}$, to $(1 + \frac{1}{3})^{k+1} \geqslant 1 + \frac{k+1}{3}$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważana nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.

ROZWIĄZANIA

PRAWA MRÓWECZKA

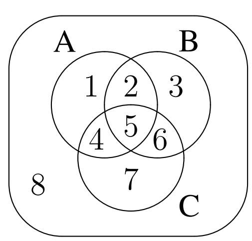
1. Relacja $R \subseteq X \times X$ jest spójna w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli $x \neq y$, to xRy lub yRx.

W zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ istnieje nieskończenie wiele relacji, które nie są spójne. Taka jest np. relacja: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y^2$. Mamy bowiem np.: $2 \neq 3$, ale nie zachodzi ani $2R3$ ani $3R2$ (ponieważ $2 \neq 3^2$ oraz $3 \neq 2^2$).

2. Porównując zbiory A, B, C i D widzimy, że: $D \subset C$, $C \subset B$, $C \subset A$, a więc także $D \subset B$ oraz $D \subset A$. Ponadto, nie zachodzi ani $A \subset B$ ani $B \subset A$. A zatem: D jest elementem najmniejszym rozważanej rodziny (ponieważ zawiera się we wszystkich pozostałych elementach), a więc także minimalnym (czyli nie istnieje w tej rodzinie element w nim zawarty), natomiast A i B są różnymi (nieporównywalnymi względem inkluzji) elementami maksymalnymi tej rodziny (bo nie ma w niej elementu zawierającego A lub zawierającego B), czyli w rozważanej rodzinie nie istnieje element największy względem inkluzji (bo nie ma w niej elementu zawierającego wszystkie pozostałe elementy).

3. Zadanie można rozwiązać bardzo prosto, zauważając, że podana równość jest postaci $X - Y = Y - X$ (gdzie $X = A \cup C$ oraz $Y = B \cap C$). Jeśli przyjmiemy np. $X = \{1, 2\}$, a $Y = \{2, 3\}$, to $X - Y = \{1\}$ oraz $Y - X = \{3\}$, a zatem podana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.

Można też narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$
$A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
$B \cap C = \{5, 6\}$
$(A \cup C) - (B \cap C) = \{1, 2, 4, 7\}$
$(B \cap C) - (A \cup C) = \emptyset$.

Widzimy zatem, że podane wyżej zbiory A, B i C nie spełniają badanej równości, a więc nie jest ona prawem rachunku zbiorów.

4. Pochodną funkcji $f(x) = \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)}$ obliczamy, korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:
$f'(x) = (\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)})' =$
$\frac{(\sin(x)-1)' \cdot \cos(x) - (\sin(x)-1) \cdot (\cos(x))'}{\cos^2(x)} =$
$\frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (\sin(x)-1) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$
$\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x) - \sin(x)}{\cos^2(x)} =$
$\frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

5.1. TWIERDZENIE CANTORA. *Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.*
DOWÓD. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Weźmy dowolny zbiór X i przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje bijekcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Określmy następujący element rodziny $\wp(X)$:

$$X_f = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}.$$

Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Zapytajmy teraz: czy $x_f \in X_f$?

1. Jeśli $x_f \in X_f$, to $x_f \in \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$, czyli $x_f \notin X_f$.
2. Jeśli $x_f \notin X_f$, to $x_f \notin \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$, czyli $x_f \in \{x \in X \ :$ nieprawda, że $x \notin f(x)\} = \{x \in X \ : \ x \in f(x)\}$, a zatem $x_f \in X_f$.

Otrzymujemy zatem, iż: $x_f \in X_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_f \notin X_f$, a to jest *sprzeczność*. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, nie istnieje bijekcja między X oraz $\wp(X)$, czyli X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.

5.2. To szczególny przypadek nierówności Bernoulliego, której dowód przeprowadzono na wykładzie. Dowód tego, że $(1+\frac{1}{3})^n \geqslant 1+\frac{n}{3}$, dla wszystkich $n \geqslant 1$ przebiega następująco.

Krok początkowy. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest 1. Ponieważ $(1+\frac{1}{5})^1 \geqslant 1+\frac{1}{5}$, więc badana nierówność zachodzi dla liczby 1.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne dla $k \geqslant 1$: $(1+\frac{1}{5})^k \geqslant 1+\frac{k}{5}$. Mamy udowodnić, że przy tym założeniu zachodzi: $(1+\frac{1}{5})^{k+1} \geqslant 1+\frac{k+1}{5}$.

Ponieważ $(1+\frac{1}{5})^{k+1} = (1+\frac{1}{5})^k \cdot (1+\frac{1}{5})$, więc na mocy założenia indukcyjnego: $(1+\frac{1}{5})^k \cdot (1+\frac{1}{5}) \geqslant (1+\frac{k}{5}) \cdot (1+\frac{1}{5})$. Obliczamy: $(1+\frac{k}{5}) \cdot (1+\frac{1}{5}) = 1+\frac{1}{5}+\frac{k}{5}+\frac{k}{25}$. Ponieważ $\frac{k}{25} > 0$, więc $1+\frac{1}{5}+\frac{k}{5}+\frac{k}{25} > 1+\frac{1}{5}+\frac{k}{5}$. Ale $1+\frac{1}{5}+\frac{k}{5} = 1+\frac{k+1}{5}$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $(1+\frac{1}{5})^k \geqslant 1+\frac{k}{5}$, to $(1+\frac{1}{5})^{k+1} \geqslant 1+\frac{k+1}{5}$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważana nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.