Witold Marciszewski

CZŁOWIEK – TWÓR WSZECHŚWIATA I JEGO WSPÓŁTWÓRCA

M O T T A

Bóg się rodzi, moc truchleje [...] *Ma granice Nieskończony.* — Kolęda Franciszka Karpińskiego.

Wszechświat jest twórczy w tym samym sensie, w jakim za twórczych uznajemy wielkich poetów, wielkich artystów, wielkich muzyków, jak również wielkich matematyków, uczonych i wielkich wynalazców. — Karl Popper w zakończeniu książki *Wszechświat otwarty*.

1. Idea nieskończonego potencjalnie wzrostu mocy obliczeniowej

§1.1. Zdaję sobie sprawę, że pierwsze motto jest ekscentryczne, a może nawet wydać się niestosowne przez zestawienie dwóch jakże odmiennych porządków: opowieści ewangelicznej oraz problemu, jak ma się twórczość do obliczalności.[1] Ale skoro jest to opowieść o Logosie, czyli umyśle o najwyższej mocy obliczeniowej, to wolno się w tym dopatrzeć inspirującej przenośni. Postaram się więc pokazać, że za sprawą pewnej trawestacji słowa tej kolędy mogą inspirować do zrozumienia, jak rodzą się wciąż nowe twórcze moce umysłu.

O takich mocach umysłu szczególnie wiele dowiadujemy się z twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki liczb naturalnych. Uczy ono, że jeśli umysł wykryje zdanie niedowodliwe w uprawianym aktualnie systemie arytmetyki, to może użyć tego zdania jak sportowiec tyczki, żeby się od danego systemu odbić i pokonać jeszcze wyżej ustawioną poprzeczkę. To znaczy stworzyć nowy, mocniejszy, system, w którym zdanie dotąd niedowodliwe da się dowieść. Następnie, można ten nowy system zautomatyzować, żeby się odciążyć od licznych dowodów zleciwszy je komputerowi, a samemu wyprawić się na poszukiwanie zdań dla komputera w tym systemie niedowodliwych, żeby wraz z kolejnym mocniejszym systemem powiększyć o kolejną strefę obszar poznawalności, a potem automatyzowalności.

Myśl ta zyskuje na wyrazistości i daleko idącemu poszerzeniu dzięki jeszcze innej, bardzo ważnej, wypowiedzi Gödla, z której należy wywnioskować, że ceną za bilet do tego Gödlowskiego raju jest opowiedzenie się filozoficzne po stronie platonizmu. Nie bał się tego Gödel; niektórzy filozofowie uważają to za cenę zbyt wysoką, ale jak zobaczymy, informatycy z pierwszego frontu praktyki obliczeniowej nie mają w tym względzie oporów. Platonizm rozumie się tu jako gotowość do posługiwania się logiką wyższych rzędów.

Nim zdam dokładniejszą relację ze wspomnianej wypowiedzi Gödla, naszkicuję ją skrótowo – na tyle, żeby ujawnić asocjacje z cytowaną kolędą. Słowo „Bóg” ma treść tak niepojętą, że każde jego użycie jest nieuchronnym tej treści pomniejszeniem, trzeba bowiem, iżby była to treść dająca się jakoś pojąć przez umysł skończony. Ograniczenie tu przyjęte polega na tym, że z owej nieogarnionej treści bierze się jeden moment, mianowicie zdolność do stwarzania światów. Zdolność ta jest

[1] Praca, której wynikiem jest ten artykuł, była finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2003-2006 jako projekt pn. *Nierozstrzygalność i algorytmiczna niedostępność w naukach społecznych*, nr 2H01A03025.

stopniowalna, poczynając od najwyższego stopnia, jakim byłoby *creatio ex nihilo*, po coraz niższe, stosownie do tego, ile stwórca potrzebuje do swego dzieła materiału oraz jak wielkiej to wymaga mocy obliczeniowej i mocy energetycznej.

I oto okazuje się, na gruncie współczesnej wiedzy kosmologicznej, że na którymś stopniu tej zdolności stwórczej może się znaleźć ludzka cywilizacja, gdy stanie się wystarczająco rozwinięta technologicznie, to znaczy gigantycznie zaawansowana w technice informatycznej oraz technice wytwarzania energii. Owa wizja kosmologiczna znajduje wsparcie od strony logiki matematycznej z informatyką. Te bowiem dają podstawy do oczekiwań, że niewyobrażalnie wielka moc obliczeniowa niezbędna do stwarzania światów da się, być może (myśl ta ma status filozoficznej hipotezy) uzyskać dzięki nieograniczonym szansom tworzenia coraz to mocniejszych obliczeniowo systemów matematycznych, a więc i coraz potężniejszych programów komputerowych, z mocą potencjalnie rosnącą do nieskończoności.

Tu przyda się kolęda. Trzeba jednak ją do tego uzdatnić przez pewien ruch przewrotny, mianowicie odwrócenie:
„moc słabnie (truchleje)" – na: „słabość nabiera mocy", oraz
„ma granice nieskończony" – na: „ograniczone rozwija się w nieskończoność".

Taka trawestacja kolędy oddaje główną myśl ewolucjonistycznej metafizyki F. W. J. von Schellinga (1775-1854), odzianej w pojęcia informatyczne przez Barrowa i Tipplera [1996, s. 156n]. Ma ta metafizyka kontynuacje i analogie w Anglii i USA (w tym nurcie jest po części twórczość C. S. Peirce'a), a potem u Tailharda de Chardin. Dziś nabiera ona nowych barw, gdy modelu do pojmowania, czym jest *Geist* dostarcza nam pojęcie algorytmu czy programu (jak to jest u wspomnianych Barrowa i Tipplera). Schelling, nawiązując do *Objawienia* św. Jana, gdzie Bóg nazywa siebie Alfą i Omegą, widzi kosmiczną ewolucję jako proces rozwijający się od Alfa czyli *Deus implicitus* do Omega czyli *Deus explicitus*. A że jest to proces nieustanny, dobrze go oddaje czas teraźniejszy w kolędzie: Bóg się rodzi (a nie rodził się, czy raz się urodził). Wśród tak pojętych, nieskończenie wielu, momentów rodzenia się Boga jest każdy moment przejścia od słabszego do mocniejszego obliczeniowo systemu czy programu, pomnażającego intelektualny potencjał ludzkości. Pora powiedzieć o tej ewolucji mocy obliczeniowej w sposób nieco dokładniejszy.

§1.2. Twierdzenie Gödla powiada, że każdy aksjomatyczny system arytmetyki zawiera prawdziwe twierdzenia, których nie da się udowodnić przez wyprowadzanie z aksjomatów za pomocą środków dowodowych określonego systemu logiki. Istotne jest w tym twierdzeniu, że nie mówi się o wszystkich naraz systemach arytmetyki, lecz o wszystkich w sensie „każdy z osobna". I nie o wszystkich naraz systemach logiki, lecz o każdym w sensie „każdy z osobna" (co odpowiada angielskiemu *each*). To znaczy, mając system arytmetyczny A_1, np. arytmetykę Peano, oraz logikę L_1, np. klasyczną logikę pierwszego rzędu, nie będziemy w stanie dowieść wszystkich prawdziwych zdań systemu A_1 środkami L_1. Jeśli wzmocnimy środki dowodowe, uzyskamy system mocniejszy dedukcyjnie, lecz w nim znowu znajdą się zdania niedowodliwe. I tak bez końca.

Wielu autorów uważa ten wynik jako pesymistyczny, zwiastujący nieuleczalną ograniczoność ludzkiego umysłu. Jest to interpretacja z gruntu mylna. Jeśli jest to wynik przygnębiający, to tylko dla komputera, któremu człowiek zlecił automatyczne dowodzenie, wyposażywszy go w odpowiedni program. Komputer napotka wtedy nieprzekraczalną barierę możliwości dowodzenia. Ale nie jest to bynajmniej nieuleczalna trudność dla człowieka. Wymieni on komputerowi program dotychczasowy na inny, mocniejszy, który ma w swych zasobach, a jeśli nie ma, to go dzięki swej pomysłowości ułoży. Dla tej pomysłowości zaś nie ma granic.

Podsumujmy: (1) nie jest tak, że istnieje jakiś program dla rozwiązania każdego problemu, ale (2) dla każdego problemu istnieje (aktualnie lub potencjalnie) jakiś rozwiązujący go program. Pesymistyczny wydźwięk pierwszego członu jest pięknie równoważony przez optymizm drugiego. W tej drugiej sprawie wypowiedział się dokładniej Gödel [1936], już po przełomowym wyniku z roku 1931, w komunikacie *o długości dowodów*. Wypowiedź ta wchodzi dziś do kanonu informatyki. Ze względu na jej wagę, podaję ją także w oryginale (po dokonanym ad hoc własnym przekładzie).

> Przejście do logiki najbliższego wyższego rzędu sprawia nie tylko to, że stają się dowodliwymi pewne zdania wcześniej niedowodliwe, lecz także to, że nieskończenie wiele już istniejących dowodów da się niezwykle mocno skrócić.
>
> *Der Übergang zur Logik der nächst höcheren Stufe bewirkt also nicht bloß, daß gewisse früher unbeweisbare Sätze beweisbar werden, sondern auch daß unendlich viele der schon vorhandenen Beweise außerordentlich stark abgekürzt werden können.*

Ta niezwykle ważna myśl, nie poparta jednak dowodem ani egzemplifikacją (na co nie pozwalały ramy krótkiego komunikatu), pozostawała przez dziesiątki lat w cieniu. Dopiero na pewnym etapie rozwoju techniki komputerowej, gdy już praktycznie funkcjonowała ta technika w dziedzinie automatycznego dowodzenia twierdzeń, uwaga Gödla z roku 1936 znalazła się w centrum uwagi informatyków i logików. Mianowicie, druga część zdania (po „lecz") daje klucz do zagadnienia algorytmicznej rozwiązywalności problemów w tej części problematyki, która w literaturze anglojęzycznej określana jest mianem *tractability* (*of problems*), a w polskiej przyjęło się jako jej określenie *obliczalność praktyczna* (zob. Skowron [1987]).

§1.3. Potrwało sporo lat nim to niezwykle płodne stwierdzenie Gödla, zawarte w jednostronicowym komunikacie doczekało się wnikliwego komentarza z wielce rozjaśniającą egzemplifikacją. Uczynił to Boolos [1987] wziąwszy na warsztat w roli przykładu dowodzenia twierdzenie arytmetyczne dotyczące pewnej funkcji Ackermanna. Samego twierdzenia i jego przesłanek nie ma potrzeby przytaczać tu szerzej (w skrócie informuje o tym dowodzie przypis 5); interesować nas będą tylko pewne wyniki dotyczące oszacowania długości dowodu. Istotne jest, że wartość funkcji rośnie zawrotnie szybko; np., gdy jej argumentami są liczby 4 i 2, wartość funkcji stanowi liczba złożona z prawie 20 tysięcy cyfr.[2] Zapisywanie tak wielkich liczb środkami notacyjnymi logiki pierwszego rzędu jest niewykonalne, stąd przydatność badań nad takimi funkcjami dla wykazania przewagi logik wyższych rzędów nad logiką pierwszego rzędu. Dowód twierdzenia rozważanego przez Boolosa prowadzony w logice pierwszego rzędu nie dałby się zapisać na żadnej osiągalnej ilości papieru, jak też byłby niewykonalny dla komputera w jakimkolwiek osiągalnym czasie. Problem więc prawdziwości twierdzenia, gdy go rozwiązywać w logice pierwszego rzędu okazuje się nieobliczalny (nierozstrzygalny) praktycznie. Tymczasem, gdy go przeprowadzić w logice drugiego rzędu zajmuje nie więcej niż stronę druku.

Do rozumowania Boolosa wrócimy w następnym paragrafie. Tymczasem rozpatrzmy rzecz na przykładach rozumowań, których natychmiastowe wykonanie w logice wyższych rzędów nie przekracza poziomu przedszkolaka, natomiast ich wykonanie w osiągalnym czasie w logice pierwszego rzędu przekracza możliwości najpotężniejszych komputerów.

Zacznijmy od liczby dwa. Zapisanie w logice pierwszego rzędu, że jakichś przedmiotów, powiedzmy M-ów, jest dwa, miast jednej cyfry oznaczającej liczbę dwa czyli zbiór par (a więc obiekt wyższego niż indywidua rzędu), wymaga około (zależnie od notacji) 50 symboli logicznych. Oto

[2] zob. http://nostalgia.wikipedia.org/wiki/Ackermann_function, gdzie jest też definicja tej funkcji.

zapis zdania „istnieją dokładnie dwa M-y", dokonany bez użycia cyfry ..2". Na potrzeby naszej analizy wyróżnimy w nim trzy segmenty, każdy wyodrębniony w nawiasach kwadratowych.

$$\exists x_1 \exists x_2 \{[M(x_1) \wedge M(x_2)] \wedge [x_1 \neq x_2] \wedge \forall x_3 [M(x) \Rightarrow (x_3 = x_1 \vee x_3 = x_2)]\}.$$

Te trzy segmenty nazwiemy, odpowiednio (licząc od lewej), pierwszym, drugim i trzecim.

A oto zagadka dla przedszkolaków. „Każdy król ma nie mniej i nie więcej niż jednego błazna. Królów na świecie jest dwóch. Ilu jest błaznów?"

Dla przedszkolaka taki problem to drobnostka, także i wtedy, gdy zamiast dwóch królów wymieni się np. dwa tysiące. Ale dla komputera, gdy wyposażymy go tylko w logikę pierwszego rzędu, już przy dwóch tysiącach jest to problem wielce złożony. Oszacować jego złożoność możemy biorąc pod uwagę długość segmentu drugiego w formule pierwszego rzędu będącej zapisem wniosku „jest na świecie 2000 błaznów"; przyrost długości formuły ze względu na pozostałe segmenty jest zaniedbywalny. Drugi segment jest miejscem służącym do stwierdzenia, że liczba obiektów danego rodzaju wynosi *conajmniej* N (tutaj 2000), podczas, gdy trzeci powiada, że jest ich *najwyżej* N, tak więc ich koniunkcja mówi, że jest *dokładnie* tyle.

Przy N elementach, ile będzie nierówności w rodzaju $x_1 \neq x_2$, w drugim segmencie? Określa to wzór: $\frac{N^2-N}{2}$.

Mamy bowiem porównać każdy element z każdym (z wyjątkiem porównania z sobą) czyli utworzyć z nich pary nieuporządkowane (tj. takie, w których kolejność nie gra roli). Par uporządkowanych jest N^2, od tej liczby odejmujemy liczbę par jednoimiennych (jak $x_1 \neq x_1$) jako sprzecznych; a że par nieuporządkowanych jest dwa razy mniej niż uporządkowanych, dzielimy różnicę $N^2 - N$ przez 2. Liczby N i 2 są w porównaniu z N^2 zaniedbywalne. I tak okazuje się, że pytanie, ile jest symboli w drugim segmencie okazuje się być problemem o złożoności rzędu $O(N^2)$ czyli kwadratowej. To jest tylko rozmiar konkluzji rozumowania. Nie jest to jeszcze złożoność tak porażająca jak wykładnicza czy rzędu silni, ale dostatecznie duża, żeby przy odpowiednio wielkim N otrzymywać formuły o długościach astronomicznych i czasie ich przetwarzania idącym w miliony lat. Przy N=2000, policzmy, członów w formie nierówności będzie prawie dwa miliony; jeśli każdy zapiszemy na pięciu milimetrach paska papieru, pasek będzie miał długość 10 kilometrów. A jest to tylko miara złożoności samego wniosku. W dowodzeniu tego wniosku, gdy posłużymy się metodą nie wprost z użyciem reguł drzew semantycznych, negacja wniosku mającego formę koniunkcji rozszczepi go na miliony zanegowanych alternatyw, z których każda leży na osobnej gałęzi wywodu, gdzie ma być badana na okoliczność sprzeczności lub braku sprzeczności z formułami wynikającymi z przesłanek.

Nie są to jeszcze, w powyższym przykładzie, liczby astronomiczne. Ale staną się takie w rozumowaniach tak samo łatwych jak poprzednie, w których umieścimy odpowiednio większe liczby. Na przykład, takie:

Kiedyś będzie na świecie dwa miliardy żonatych (monogamicznie) mężczyzn.
A zatem
Kiedyś będzie na świecie dwa miliardy zamężnych kobiet.

Dwa miliardy do kwadratu to już pokaźna kwota. Mając do przebadania dwa tryliony gałęzi dowodu i poświęcając każdej milisekundę, komputer, jeśli damy mu do dyspozycji nie więcej niż logikę pierwszego rzędu, zużyje na rozumowanie miliony lat. Uczeń zaś odpowie w sekundę, gdyż ma wbudowaną do głowy logikę drugiego rzędu. Już tak proste przykłady dają pojęcie o gigantycznej różnicy w wydajności rozumowania w zależności od tego, jakim dysponujemy rzędem logiki.[3]

§1.4. Żeby uzyskać głębsze teoretycznie wnioski, trzeba sięgnąć do studium Boolosa. Jego istotne pogłębienie znajdujemy w studium dwóch autorów z wiodących ośrodków badań nad automatycznym dowodzeniem twierdzeń. Jest to studium *A Challenge for Mechanized Deduction*; będę się doń dalej odwoływał, tytułując je polskim skrótem „Wyzwanie". Jego autorami są Christoph Benzmüller (Fachrichtung Informatik, Universität des Saarlandes, Saarbrücken) oraz Manfred Kerber (School of Computer Science, The University of Birmingham, związany także z ośrodkiem w Saarbrücken).[4] Intencje artykułu oddaje zamieszczone w nim poniższe streszczenie; szkicując własną myśl autorów, naświetla ono zarazem omawianą wyżej (§1.2) ideę Gödla (przekład ad hoc – WM).

> Badamy tu w nowym aspekcie przykład dowodu podanego przez George Boolosa. Przejrzyście ilustruje on argument Gödla o tym, jak drastycznie może rosnąć długość dowodów w systemach formalnych, gdy prowadzi się dowód na zbyt niskim poziomie [gdy idzie o rząd logiki]. Mówiąc dokładniej, ograniczenie logiki, w której przeprowadza się dowód, do tego rzędu, w którym problem został sformułowany początkowo, może prowadzić do dowodów o niemożliwej do zrealizowania długości, choć w logice wyższego rzędu istnieją krótkie dowody tegoż twierdzenia. Celem tego artykułu jest [...] ukazać w pewnym aspekcie wyzwanie, jakim jest automatyzacja dowodu Boolosa. Ukazuje ono trafnie, jak sądzimy, rozbieżność między intuicją i twórczością, jakiej wymaga matematyka, a tymi ograniczeniami, z którymi mamy do czynienia w sztuce automatycznego dowodzenia twierdzeń.

Nowość aspektu polega na tym, że po wiadomej już diagnozie o praktycznej nierozstrzygalności problemu na gruncie logiki pierwszego rzędu, podejmuje się zagadnienie, czy rozumowanie Boolosa w logice drugiego rzędu da się praktycznie zautomatyzować, a więc zagadnienie praktycznej obliczalności dowodu. Analiza przeprowadzona przez autorów (należących do czołówki w badaniach nad automatycznym dowodzeniem twierdzeń) skłania ich do wniosku, że taka próba automatyzacji jest w badaniach nad automatyzacją rozumowań wyzwaniem na miarę stulecia. Jest bowiem w rozumowaniu Boolosa tak wielki wkład ludzkiej inwencji, że zaprogramowanie komputerowej symulacji tych aktów twórczych będzie kolosalnym problemem badawczym, wymagającym odpowiednio wielkich nakładów czasu.[5] Wielkość tego wyzwania ma źródło w fakcie, że w rozumowaniu od-

[3] Przykłady te są inspirowane artykułem: Ketland [2005] (*Some more curious inferences*), ale są w stosunku do Ketlanda uproszczone. Inna też jest w tamtym artykule metoda szacowania złożoności problemu, prowadzi jednak podobnie do wyniku, że jest to złożoność kwadratowa.

[4] Zob. http://www.cs.bham.ac.uk/ mmk/papers/01-IJCAR.html.

[5] W śledzeniu argumentacji na ten temat może być dla niektórych czytelników pomocne przytoczenie tekstu zawierającego przesłanki i konkluzję dowodu. Cytowane niżej formuły różnią się od oryginalnego tekstu Boolosa tylko transkrypcją na notację bliższą językom programowania.

```
1. FORALL n. f(n,1)=s(1)
2. FORALL x. f(1,s(x))=s(s(f(1,x)))
3. FORALL n. FORALL x. f(s(n),s(x))=f(n,f(s(n),x))
4. D(1)
5. FORALL x. (D(x) -> D(s(x)))
hence
6. D(f(s(s(s(s(1)))),s(s(s(s(1))))))
```

Tym, czego dokonał Boolos jest rozumowanie w logice drugiego rzędu prowadzące od przesłanek 1-5 do konkluzji 6, a zajmujące nie więcej niż stronę druku.

grywa kluczową rolę schemat *pewnika definicyjnego*.[6] Jest on wyrażeniem logiki drugiego rzędu (ze względu na kwantyfikację zmiennej Z reprezentującej dowolny zbiór), które w schematycznej formie ma następujący zapis:

$$\exists_Z \forall_x (x \in Z \Leftrightarrow \phi(x).$$

Autorzy „Wyzwania", zestawiając pokaźną listę trudności, które miałby do pokonania automatyczny program dowodzący (*prover*), zwracają uwagę na problem dobrania odpowiednich wersji pewnika definicyjnego – jako czynności służącej wprowadzaniu nowych pojęć będących istotnym środkiem dowodzenia (nazwa „pewnik definicyjny" trafnie się kojarzy z procesem tworzenia pojęć). Kreowanie nowych pojęć to typowy akt twórczy, którego symulowanie komputerowe jest wyzwaniem na nadchodzącą przyszłość. Inna trudna do symulacji czynność to krytyczna refleksja nad tokiem przeprowadzanego dowodu potrzebna do przewidywań, które kierunki dalszego toku dowodu mają szansę powodzenia, a które nie. Biegły matematyk dobrze sobie z tym radzi, podczas gdy system automatyczny jest, jak dotąd bezradny; wyposażenie go w taką zdolność krytyczną to kolejne wyzwanie. Jest ich jeszcze kilka, ale już te dwa dają pojęcie o skali trudności.

Myśli zawarte w „Wyzwaniu" pomogą nam wytyczyć ścieżkę rozważań nad możliwościami twórczymi kształtującej się dziś cywilizacji. Jej istotą jest sojusz ludzi i komputerów. Ma on charakter dodatniego sprzężenia zwrotnego, w którym ludzka moc intelektualna zwiększa moc obliczeniową maszyn, a moc obliczeniowa maszyn zwiększa ludzką moc intelektualną. Tak jawi się perspektywa nieskończonego potencjalnie wzrostu mocy obliczeniowej.

W ten sposób dochodzimy do pytania, czy mogą to być zdolności twórcze na tak wielką skalę żeby cywilizacja ludzka stała się zdolna uczestniczyć w stwarzaniu świata. Czyli w procesie prowadzącym od punktu Alfa do punktu Omega, w którym w każdej chwili *Deus implicitus* jest bliższy stania się *Deus explicitus*, a więc niejako w każdym momencie rodzi się faza tego procesu doskonalsza. Co z emfazą oddaje kolęda „Bóg się rodzi".

2. Przyszła moc obliczeniowa, w tym moc superalgorytmiczna, jako szansa wielkoskalowej inżynierii kosmicznej

§2.1. Podejmując zagadnienie, które na gruncie obecnego stanu nauki i filozofii może się zdać osobliwe, a nawet ekscentryczne, zaopatrzyłem ten esej w dwa motta mające pobudzić wyobraźnię. Ta zaś miałaby przezwyciężać utrwalone nawyki myślowe. Pierwsze motto, omawiane w części pierwszej, zachęca do myślenia bez zahamowań mogących się brać z obawy przed paradoksem. Drugie, zaczerpnięte z Poppera, powinno wyprowadzać poza dwa przyswojone od wieków, a między sobą opozycyjne, obrazy świata. Jeden z nich to obraz atomistyczny, drugi zaś stoicki. W pierwszym rządzi bez reszty przypadek („przypadek jak wiatr swawoli" – tak oddał tę wizję Mickiewicz w wierszu „Rozum i wiara"). W drugim rządzi bez reszty determinizm; stoicki Logos, podobnie jak plan świata w ujęciu Leibniza, przypomina jakiś algorytm dla kosmosu ściśle deterministyczny. Ani w pierwszym ani w drugim obrazie nie ma miejsca na tę kosmiczną twórczość, o której mówi cytowany tekst Poppera.

W tekście tym mowa jest o twórczości wielkich artystów, wielkich matematyków i wielkich wynalazców. Do niej porównuje Popper twórczość Wszechświata. Jest to obraz świata tak nowy i oryginalny, że trudny do akceptacji zarówno dla tych, co się orientują na obraz atomistyczny, jak i

[6] Tak jest on nazwany u Mostowskiego [1948]; inna jego nazwa to *pewnik abstrakcji* (por. Marciszewski (red.) [1988]) lub *aksjomat komprehensji* (za ang. *comprehension axiom*).

dla skłonnych do widzenia stoickiego. Może jednak uczyni go przystępniejszym myśl następująca. Oto już wiemy, że ten fizyczny kosmos dokonał jakiegoś cudu twórczego, powoławszy do istnienia inteligencję matematyków, przyrodników i wynalazców, a ta zdolna jest zmieniać świat na skalę dla niej samej kiedyś (choćby wiek temu) niewyobrażalną. W tych latach, w których przypadło żyć autorowi obecnego eseju i jego (ewentualnym) czytelnikom rodzi się świadomość, że skala przekształcania świata fizycznego przez naukę i technikę może rosnąć o nowe rzędy wielkości dzięki nieograniczonemu wzrostowi mocy obliczeniowej. Nazwijmy tę twórczość *wielkoskalową inżynierią kosmiczną*.

Przestaje być wizją jedynie baśniową to, że tak gigantyczny, dzięki twórczości matematycznej i komputerom, wzrost mocy obliczeniowej uzdolni naszą inżynierię kosmiczną do wytwarzania aż tak wielkich energii, jakie są niezbędne do wyprodukowania nowego wszechświata. Wtedy nasz wszechświat okazałby się twórczy w najwyższym stopniu, jaki tylko da się pomyśleć. A dałoby się to pomyśleć dzięki owej świadomości, do jakich osiągnięć staje się zdolna moc intelektualna człowieka w jej sprzężeniu zwrotnym z mocą obliczeniową maszyn. Wtedy ani atomiści ani stoicy nie mieliby prawa odmawiać kosmosowi mocy twórczej.

Współtworzenie kosmosu w najbliższym otoczeniu ziemi zaczęło się od umieszczenia na orbicie ziemskiej pierwszego satelity. Między tym skromnym początkiem a dającym się pomyśleć punktem szczytowym inżynierii kosmicznej rozciąga się niezmierna skala możliwości. Żeby ją ogarnąć, spróbujmy opisać hipotetycznie jej osiągnięcie szczytowe – utworzenie nowego wszechświata.

> „Recepta jest prosta. Należy wziąć mały kawałek materii. Według Andrieja Lindego wystarczy tysiączna część grama. Następnie trzeba ścisnąć go do gęstości, która niegdyś wystarczyła do wywołania inflacji naszego wszechświata. Ściśnięta materia utworzy czarną dziurę – obszar przestrzeni, gdzie grawitacja jest tak potężna, że nawet światło nie może z niego uciec. Według teorii Gutha supergęste wnętrze takiej czarnej dziury natychmiast ulegnie inflacji – nie w naszym świecie, lecz w przypominającym bąbelek obszarze czasoprzestrzeni połączonym z naszym przez „pepowinę" czarnej dziury. Pępowina nie jest stabilna, ponieważ bardzo małe czarne dziury żyją tylko ułamek sekundy, po czym znikają, lub „parują", wydzielając tak zwane promieniowanie Hawkinga. W tym samym momencie znika pępowina i powstaje nowy wszechświat niemowlęcy." Marcus Chown, „Sąsiedni wszechświat", Zysk i S-ka, 2004, s.144.

Nie będziemy dociekać, jaka jest szansa spełnienia się tej wizji w jakiejś, niezmiernie odległej, przyszłości. Zadanie tego eseju jest skromniejsze: rozważyć tylko pewien warunek konieczny inżynierii kosmicznej, w szczególności takiego jej apogeum, jak opisana wyżej prokreacja świata potomnego. Tym warunkiem koniecznym jest osiągnięcie przez cywilizację niewyobrażalnie wielkich mocy energetycznych i obliczeniowych.

§2.2. Głównym narzędziem myślowym w tym rozważaniu jest zaadaptowane do jego celów pojęcie mocy obliczeniowej.[7] Zwrot ten występuje w kilku różnych idiomach informatyki. W *prawie Moore'a* dotyczy on wydajności sprzętu czyli czynnika fizycznego (hardware). Kiedy indziej dotyczy czynnika logicznego (software), jak w następującym zdaniu.[8]

[7] Pojęcie mocy obliczeniowej pojawiło się w obecnym tekście już wcześniej, w szczególności w §1.4, gdzie było brane w węższym zakresie, jako właściwość algorytmu. Tak wąskie pojęcie ma jednak znaczną niedogodność, gdy formułuje się zagadnienia podejmowane w obecnym odcinku. Stąd propozycja jego rozszerzenia motywowana w §2.2 i §2.3.

[8] Zdanie to brzmi w oryginale, jak następuje. „It is common practice to compare the computational power of different models of computation. For example, the recursive functions are strictly more powerful than the primitive recursive functions, because the latter are a proper subset of the former." Zaczerpnięte ze strony: arxiv.org/abs/cs.LO/0510069.

Jest to powszechna praktyka, że porównujemy moc obliczeniową różnych modeli obliczania. Na przykład, funkcje rekurencyjne są mocniejsze niż funkcje pierwotnie rekurencyjne, gdyż drugie stanowią podzbiór właściwy pierwszych.

W tym sensie dyskutowana jest w literaturze cała klasa zagadnień: jak ma się do maszyny Turinga moc obliczeniowa automatu komórkowego, a jak sieci neuronowej itp.

Proponowany tu sens terminu „moc obliczeniowa" jest pojemniejszy niż alternatywa czyli suma zakresów wspomnianych obu (czynników fizycznego i logicznego). Jest on inspirowany maksymą Leibniza „Cum Deus calculat fit mundus": moc obliczeniowa w sensie pochodnym od słowa „calculat" obejmuje wszystkie elementy niezbędne do rozwiązania problemu „jak i jaki stworzyć świat?". Trzeba więc do czynników fizycznego i logicznego dołączyć jeszcze zbiór danych (informacji) czyli wiedzę niezbędną w roli przesłanek w rozwiązywaniu problemu.

Znaczną trudnością do pokonania, gdy chce się ustalić definicję mocy obliczeniowej, jest dwuznaczność terminu „obliczanie". Powiadamy, że jakiś układ ma większą od innego moc obliczeniową, gdy więcej lub sprawniej potrafi obliczać; ale co to jest obliczanie, to sprawa do dokładniejszego wyjaśnienia.

Precyzyjna definicja obliczania dana przez Turinga (1936), wedle której obliczać to znajdować rozwiązanie według instrukcji jakiegoś algorytmu dotyczącego operacji na symbolach, jest dzięki swej precyzji w powszechnym użyciu. Nie znaleziono jednak innego technicznego terminu, żeby określić nim procesy też nazywane powszechnie obliczaniem i też odnoszące się do liczb. Mówi się np. o komputerach analogowych, a więc urządzeniach obliczających, choć nie jest to obliczanie w sensie Turinga, bo nie jest operacją na symbolach.

Suma zakresów przy obu wymienionych sensach daje szerokie pojęcie obliczania, przy którym obliczać, znaczyłoby znajdować wartość funkcji, czy to metodą symboliczną (czyli cyfrową) czy analogową. Zważywszy jednak na istnienie funkcji nieobliczalnych, popadamy w paradoksalny sposób mówienia, że znajdując wartość takiej funkcji oblicza się (sensu largo) jakąś liczbę nieobliczalną (sensu stricto), a więc oblicza się nieobliczalne. To zaś, że istotnie potrafimy znajdować wartości funkcji nieobliczalnych pokazali Gödel [1931] i Turing [1936] (obaj za pomocą argumentu przekątniowego).

Zdolność znajdowania wartości funkcji nieobliczalnych, czyli znajdowania liczb nieobliczalnych zademonstrował przekonująco Turing, gdy zdefiniował taką liczbę za pomocą procedury intersubiektywnej i doskonale precyzyjnej, a także Gödel, gdy na takim samym poziomie ścisłości udowodnił istnienie własności arytmetycznych nie dających się wykazać algorytmicznie przez sformalizowaną dedukcję z aksjomatów. Tak ważna zdolność, kluczowa dla rozwoju matematyki i całej nauki, zasługuje na to, żeby mieć własną osobną nazwę. Niech będzie nią termin: *superalgorytmiczna moc obliczeniowa*, w skrócie SAMO. [9] Przedrostek „super" jest stosowny z dwóch racji: chodzi o zdolność, która potrafi to, czego nie potrafi algorytm, a ponadto potrafi tworzyć algorytmy nawet takie, które symulowałyby ją samą (por. uwagi w „Wyzwaniach" streszczone w §1.4).

[9] Termin „superalgorithmic" pojawia się w literaturze (co można sprawdzić w Sieci) i to z intencją podobną do intencji tego eseju, ale jak dotąd (na ile autorowi wiadomo) nie przyjął się szerzej. Można to tłumaczyć tym, że w wielu kontekstach autorzy, jak Penrose [1989] czy Hodges [1997, s.47], posługują się w opisanej tu roli mianem intuicji, wglądu lub rozumienia (po angielsku, odpowiednio: intuition, insight, understanding), stosownym komentarzem adaptując ich sens do danego kontekstu. Ma to jednak swoją cenę, która dla obecnych rozważań nie jest opłacalna.

§2.3. Łatwo zaproponować nowy termin, trudniej należycie go zdefiniować. Nie pretendując do definicji zupełnej, która w obecnych rozważaniach nie jest konieczna, poprzestanę na kilku cząstkowych definicjach SAMO. Zarazem przyjmuję hipotezę, do sprawdzenia w dalszych badaniach, że owe cząstkowe określenia dotyczą wszystkie tej samej zdolności; będę je odróżniał kolejnymi numerami.

(1) Zacznijmy od doświadczeń każdemu dobrze znanych, a określanych przez język potoczny terminem „obliczanie", choć nie występuje w tych doświadczeniach żaden algorytm. Powiadamy, że sportowiec (jak również tygrys czy lew) oblicza, jak się ustawić i napiąć mięśnie, by wykonać zamierzony skok. Kierowca w myśli oblicza, jaki wykonać skręt i hamowanie, żeby zapobiec kolizji z innym pojazdem; oblicza, choć nie operuje na żadnych symbolach cyfrowych charakterystycznych dla algorytmu. Mamy więc do czynienia z procesem rozwiązywania problemów, który zasadnie jest nazwać obliczaniem; nie jest ono jednak algorytmiczne. Oponuje przeciw tej drugiej konkluzji szkoła myślenia, której zwolenników można określić jako panalgorytmistów. Ta powiada, że wszystkie takie procesy dokonujące się w mózgu muszą być algorytymiczne, jako programy w kodzie neuronowym, nie ma bowiem innego sposobu na rozwiązywanie problemu, jak wykonywanie pewnego algorytmu, choć bywa, że wykonawca nie jest tego świadomy, jak to ma miejsce w podanych przykładach. Jest to pogląd zasługujący na dyskusję, która może doprowadziłaby do odebrania opisanej zdolności (sportowców, kierowców etc.) miana SAMO, ale onus probandi w tej sprawie należy do panalgorytmistów.

(2) Oprócz takich doświadczeń potocznych, jak wymienione wyżej, istnieją doświadczenia matematyków, dyskutowane w §1.3 i §1.4 w związku z rozumowaniem takim jak Boolosa i jemu podobne, prowadzonym w logice wyższych rzędów. Jak przekonująco dokumentują Benzmüller & Kerber [2001], jest nam bardzo daleko do stworzenia algorytmu, przekładalnego na funkcjonujący praktycznie program, który symulowałby inwencję matematyka operującego w logice drugiego rzędu. A jednak matematyk dowodzi, a więc oblicza, choć wciąż nie ma takiego algorytmu. Jest zatem powód, by jego zdolność do rozwiązania problemu zaliczyć do kategorii SAMO. W tym punkcie znowu mogą się odezwać panalgorytmiści z poglądem, że w mózgu Boolosa Przyroda umieściła algorytm, jemu samemu nieznany, ale w pełni determinujący proces rozwiązywania przezeń problemu. Uporczywe odwoływanie się do czynników ukrytych, a nie wykrytych doświadczalnie, może tu być konsekwencją hipotezy filozoficznej, powiedzmy, determinizmu w stylu stoickim. Taki argument filozoficzny ma wagę dla deterministów, ale jest jej pozbawiony, jeśli się przyjmie indeterminizm, jakiemu daje wyraz m.in. Popper [1996]. Tak więc, motto z Poppera powinno nas uzbroić w należytą odporność na filozoficzną ofensywę panalgorytmizmu.

(3) Klasyczny argument za istnieniem SAMO czerpią niektórzy autorzy, z których najznaczniejszym jest Roger Penrose [1989 i in.], z odkryć Gödla [1931] i Turinga [1936]. Obaj oni (przypomnijmy rzecz powiedzianą wyżej) podali nieodparty dowód na istnienie procedur niealgorytmicznych: Gödel za istnieniem zdań niedowodliwych algorytmicznie w arytmetyce, Turing za istnieniem funkcji nieobliczalnych. Każde z tych rozumowań nie mniej precyzyjne niż algorytm, choć nie jest algorytmiczne. Są one nieodparte i precyzyjne dla umysłu ludzkiego, a nieosiągalne dla algorytmu, który by pokierował rozumowaniem maszyny. Mamy w tym bodaj najdobitniejszy przypadek SAMO. Ale i w tym punkcie nie unikniemy sprzeciwu panalgorytmistów, którzy powtórzą swoje „caeterum censeo", że zasługa odkryć o niewystarczalności algorytmów przypada wyłącznie algorytmom usadowionym w głowach Gödla i Turinga. Nie powtarzając już komentarzy z punktów (1) i (2), dodam tylko ten akcent, iż traktując panalgorytmizm jako liczącego się partnera w dyskusji

filozoficznej, trzeba podkreślać, że jest to dyskusja filozoficzna, a nie empiryczna czy matematyczna; akcent taki jest potrzebny, gdyż niektórzy rzecznicy owego obozu przemawiają z pozycji autorytetu nauk ścisłych.

(4) Ostatni człon w proponowanej tu koniunkcji definicji cząstkowych to przypadek formuł logiki pierwszego rzędu, o których algorytm logiczny w rodzaju rezolucji czy drzew semantycznych (inaczej, tabel analitycznych) nie potrafi rozstrzygnąć, czy badana formuła jest czy nie jest prawem logiki. Człowiek natomiast orientuje się szybko, że będzie powstawać nieskończenie wiele zapętleń, które nie pozwolą, by proces zamknął się konkluzją. Oto przykład takiego procesu.

[1] $\forall_x \exists_y Ryx$

[2] $\neg \forall_x Rax$

[3] $\neg Rab$ 2

[4] $\exists_y Rya$ 1

[5] $\exists_y Ryb$ 1

[6] Rca 4

[7] Rdb 5

[8] $\exists_y Ryc$ 1

[9] $\exists_y Ryd$ 1

....

I tak powtarza się bez końca. Każda eliminacja kwantyfikatora egzystencjalnego, jak w krokach 6 i 7, tworzy zapętlenie polegające na konieczności powrócenia do wiersza 1, żeby opisać nowo powstałą sytuację spełniania tej formuły przez ostatnio wprowadzone indywidua. To prowadzi do kolejnych kroków eliminacji kwantyfikatora egzystencjalnego, a to znowu powoduje powrót do formuły 1, i tak bez końca. Że bez końca, to każdy odrazu widzi, jeśli „każdy" oznacza istotę ludzką; maszyna zaś będzie zataczać pętle w nieskończoność. Gdy umysł ludzki spostrzeże ten fakt (tą swą osobliwą spostrzegawczością obejmującą nieskończoność), diagnozuje problem jako nierozstrzygalny algorytmicznie. A jeśli ponadto ciekawi go czy ta oporna wobec algorytmu formuła jest prawdą, to łatwo znajdzie model będący kontrprzykładem. Powiedzmy, zbiór liczb naturalnych, o którym jest prawdą, ża dla każdej liczby istnieje od niej większa, a nie jest prawdą, że istnieje liczba większa od każdej liczby. Implikacja przeto mająca pierwsze zdanie za poprzednik, a drugie za następnik, nie jest powszechnie ważna, czyli nie jest prawem logiki.

Opisana tu zdolność umysłu do przewidywania, że proces się nie zakończy oraz wnioskowania na tej podstawie, że problem nie jest rozstrzygalny, to łatwy do zaobserwowania przypadek SAMO – superalgorytmicznej mocy obliczeniowej ludzkiego umysłu. Interesujące komentarze w tej sprawie dają Pogonowski i Bondecka-Krzykowska [2005]. Co do reakcji superalgorytmistów, to tym razem nie mogą oni przypisać rozwiązania ukrytemu algorytmowi, bo żaden algorytm nie daje sobie rady z nieskończonością. Powiedzą natomiast, że skoro odpowiedź nie jest dziełem algorytmu, to jest pozbawiona pewności, jest jedynie rodzajem zgadywania. To jednak dla parających się takim zgadywaniem nie powinno być większym zmartwieniem; chciałoby się, by wiele innych rzeczy, które są niepewne miało tylko taki stopień niepewności.

§2.4. Zdefiniujmy moc obliczeniową, w szerokim rozumieniu, jako alternatywę algorytmicznej i superalgorytmicznej mocy obliczeniowej. A że powstaje wtedy zwrot nieporęcznie długi, zaradźmy temu korzystając z faktu, że cecha określona taką alternatywą to wszechstronna (tzn. algorytmiczna lub superalgorytmiczna) zdolność rozwiązywania problemów. Tę zaś nazywamy na codzień *inteligencją*. Tak wprowadzone pojęcie inteligencji nie musi dokładnie pokrywać się z potocznym czy z należącym do teorii psychologicznej, ale jest potocznemu na tyle bliskie, że nasza definicja, choć ma charakter regulujący, a nie czysto sprawozdawczy, nie będzie rodzić nieporozumień. Rzeczona wszechstronność nie implikuje, że będzie to w każdym przypadku wysoki stopień inteligencji. W rodzinie algorytmów zachodzą znaczne różnice co do efektywności, a te bardziej efektywne są bardziej inteligentne; to samo dotyczy procesów superalgorytmicznych.

Przedsięwzięcie będące przedmiotem tego eseju, mianowicie inżynieria kosmiczna wielkoskalowa, aż na skalę tworzenia nowych wszechświatów, wymaga, rzecz jasna, inteligencji na skalę gigantyczną. Taki projekt kosmiczny wymagałby energii nieosiągalnych w obecnym stanie nauki i techniki, ale pozyskanie z czasem takich energii to kwestia przekraczania kolejnych progów wiedzy przez fizykę i technologię, a to z kolei zależy od należytego spotęgowania mocy obliczeniowych.

To, czego nasza cywilizacja zdążyła dotąd doświadczyć, jest obiecujące. Moc obliczeniowa komputerów w aspekcie fizycznym (szybkość procesora) podwaja się co półtora roku, mamy więc wzrost wykładniczy (prawo Moore'a). Produkcja zaś wyników naukowych podwaja się co kilka lat, a więc wolniej, ale też w tempie wykładniczym (badania Solla Price'a i in.). To są już dwa czynniki mocy obliczeniowej. Czynnik trzeci, moc obliczeniowa superalgorytmiczna, mająca skutkować w szczególności, dzięki inwencji matematyków, wzrostem czynnika logicznego czyli algorytmów i programów, jest nieprzewidywalny i niemierzalny co do tempa rozwoju, ale doświadczenia 20. wieku pozwalają w tym względzie na dużą dozę optymizmu.

Najbardziej oporny na doskonalenie jest czynnik społeczny, ale też dlatego w nim są największe rezerwy mocy jeszcze niewykorzystanych. Jeśli rozwiąże się problem taniego i niewyczerpalnego praktycznie zaopatrzenia w energię, jeśli nanotechnologia zapewni obfitość tanich dóbr wszystkim członkom ludzkiej społeczności, jeśli stanie się powszechna w skali wszystkich kontynentów edukacja, i to na wysokim poziomie, jeśli sztuczna inteligencja oraz inżynieria biologiczna spotęgują do niewyobrażalnego dziś poziomu, i to w skali powszechnej, ludzkie potencje intelektualne, to można będzie powiedzieć, że warunki do zyskania przez ludzkość statusu kosmicznego demiurga są w połowie spełnione.

Druga połowa to koordynacja poczynań w skali cywilizacji globalnej. Znając ogromne trudności, na jakie napotyka dziś współpraca międzynarodowa w sprawach jeszcze stosunkowo mało skomplikowanych, jak rokowania w WTO na temat liberalizacji handlu, trudno spodziewać się intensywnej współpracy wszystkich narodów w czymś takim, jak wspólny światowy projekt inżynierii kosmicznej; narazie mamy rywalizację w kosmosie motywowaną przez agresywne nacjonalizmy. Żeby mogło się to zmienić, konieczna jest daleko idąca przemiana państw narodowych w kierunku wydatnego zwiększenia ich inteligencji. Gdy obserwować inteligencję państw, czyli ich skuteczność w rozwiązywaniu własnych problemów, widać, że bywa ona porównywalna z inteligencją troglodytów. Ale nie jest to stan zastygły. Niektóre państwa zaszły stosunkowo daleko w sztuce radzenia sobie ze swymi problemami, i te dostarczają wzorów na wyższy poziom zbiorowej inteligencji. Temat globalnej kooperacji obejmuje też, oczywiście, kwestie moralne, ale jest to osobne wielkie zagadnienie, które w obecnym kontekście można co najwyżej odnotować.

Istotnym sposobem na poprawienie inteligencji państwa jest to, żeby w świadomości obywateli, polityków i elit intelektualnych zaistniała kategoria pojęciowa „inteligentne państwo”, a z nią kryteria inteligencji i wiedza o drogach do ich spełnienia. Pierwszy więc etap całego procesu to budowanie wiedzy w zakresie podstaw informatyki i podstaw nauk społecznych. Wiedzę tę powinni teoretycy przekazywać elitom akademickim, te zaś szerzyłyby ją wśród nauczycieli, dziennikarzy etc., którzy nieśliby ją dalej do szerszej publiczności. Podstawy takie są domeną filozofii w tym jej wydaniu, które określa się jako „filozofia w nauce". Stąd, w wielkim projekcie kosmicznym naszej cywilizacji niepoślednia rola przypada filozofom.

Literatura cytowana

John D. Barrow & Frank J. Tipler, *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford University Press 1996.

Christoph Benzmüller & Manfred Kerber, A Challenge for Mechanized Deduction, ©2001.
www.cs.bham.ac.uk/ mmk/papers/01-IJCAR.html

G. Boolos, *A curious inference*, „Journal of Philosophical Logic” 16, 1987, pp. 1-12.

Marcus Chown, *Sąsiedni wszechświat*, Zysk i S-ka, 2004.

Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica” und verwandter Systeme – I*, „Monatshefte für Mathematik und Physik” 38, 173-198, 1931.

Kurt Gödel, *Über die Länge der Beweisen*, „Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums” Heft 7. Franz Deuticke, Leipzig und Wien 1936.

Andrew Hodges, *Turing*, przekład Justyna Nowotniak, Amber, Warszawa 1997.

Jeffrey Ketland, *Some more curious inferences*, „Analysis” 65.1, January 2005, pp. 18-24.

Witold Marciszewski (red.), *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniami do informatyki i lingwistyki*. PWN, Warszawa 1987.

Witold Marciszewski, *Wolny rynek jako system przetwarzania informacji*, [w:] Michał Heller i Janusz Mączka (red.), *Informacja a rozumienie*, Biblos, Kraków 2005.

Andrzej Mostowski, *Logika matematyczna*, Monografie Matematyczne, Warszawa/Wrocław 1948.

Roger Penrose, *The Emperor’s New Mind. Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*, Oxford University Press, 1989.

Jerzy Pogonowski i Izabela Bondecka-Krzykowska, *Agnostyczny jeż w lesie semantycznym* [w:] Trzęsicki (red.) [2005].

Karl Popper, *Wszechświat otwarty. Argument na rzecz determinizmu*, przekład Adam Chmielewski, Wydawnictwo Znak, Kraków 1996.

Andrzej Skowron, *Automaty* [w:] Marciszewski (red.) [1987, s.203].

Trzęsicki Kazimierz (red.), *Ratione et Studio. Profesorowi Witoldowi Marciszewskiemu w darze*, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, 2005.

Alan Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, „Proc. of the London Math. Society" Series 2, 42, pp. 230-265, 1936.

Alan Turing, *Systems of logic based on ordinals*, „Proc. of the London Math. Society", Series 2, 45, pp.161-228, 1939.