Matematyczne Podstawy Kognitywistyki
Zaliczenie Wykładu: 26.01.2022
Kognitywistyka UAM, 2021–2022

Imię i nazwisko: .... Mróweczka Iskiereczka

1. [3 punkty] Wyznacz elementy minimalne, maksymalne, największy i najmniejszy względem inkluzji w zbiorze wszystkich niepustych co najwyżej czteroelementowych podzbiorów zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2. [4 punkty] (a) Co to znaczy, że relacja R określona w zbiorze X jest asymetryczna? (b) Podaj przykład relacji, która ma tę własność i relacji, która jej nie ma. (c) Rozstrzygnij czy jest asymetryczna relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $\llcorner x \lrcorner < \ulcorner y \urcorner$. Tutaj $\llcorner\ \lrcorner$ jest funkcją podłogi, a $\ulcorner\ \urcorner$ jest funkcją sufitu.

3. [4 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$A - (B - C) = A \cup (C - B).$$

4. [4 punkty] Wyznacz (w możliwie najprostszej postaci) pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x \cdot e^x}}{e^x}.$$

5. [5 punktów] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i przeprowadź dowód:

1. Udowodnij, że zbiór wszystkich jednoelementowych podzbiorów zbioru wszystkich parzystych liczb naturalnych jest nieskończony w sensie Dedekinda.

2. Udowodnij przez indukcję matematyczną, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Liczba punktów	Ocena
< 11	2
11–12	3
13–14	3+
15–16	4
17–18	4+
19–20	5

Jerzy Pogonowski, Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM, pogon@amu.edu.pl

ROZWIĄZANIA

MRÓWECZKA ISKIERECZKA

1. Zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ma pięć elementów, a więc ma $2^5 = 32$ podzbiorów. Niepustych i co najwyżej czteroelementowych jego podzbiorów jest 30, ponieważ nie bierzemy pod uwagę zbioru pustego $\emptyset$ i całego zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. W rodzinie niepustych i co najwyżej czteroelementowych podzbiorów zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$:

1. Jest pięć zbiorów minimalnych względem inkluzji. Są to wszystkie podzbiory jednoelementowe: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$. Żaden inny zbiór z rozważanej rodziny nie jest podzbiorem żadnego z tych zbiorów.

2. Jest pięć zbiorów maksymalnych względem inkluzji. Są to wszystkie podzbiory czteroelementowe: $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{0, 1, 3, 4\}$, $\{0, 2, 3, 4\}$. Żaden inny zbiór z rozważanej rodziny nie jest nadzbiorem żadnego z tych zbiorów.

3. Nie istnieje element najmniejszy względem inkluzji, gdyż nie istnieje w rozważanej rodzinie zbiór, który byłby zawarty we wszystkich pozostałych zbiorach tej rodziny.

4. Nie istnieje element największy względem inkluzji, gdyż nie istnieje w rozważanej rodzinie zbiór, który zawierałby wszystkie pozostałe zbiory tej rodziny.

2. (a) Relacja $R \subseteq X \times X$ jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli xRy, to nie zachodzi yRx.

(b) Asymetryczna jest np. relacja mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych, nie jest zaś asymetryczna np. relacja równości w tym zbiorze.

(c) Przypominamy definicje funkcji podłogi i sufitu:

1. $\llcorner z \lrcorner$ to największa liczba całkowita, która jest mniejsza lub równa z;

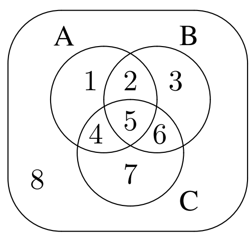
2. $\ulcorner z \urcorner$ to najmniejsza liczba całkowita, która jest większa lub równa z.

Relacja R zdefiniowana warunkiem xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $\llcorner x \lrcorner < \ulcorner y \urcorner$ nie jest asymetryczna, ponieważ istnieją $x \in \mathbb{R}$ oraz $y \in \mathbb{R}$ takie, że xRy oraz yRx. Mamy np. dla $x = \frac{6}{5}$ i $y = \frac{7}{5}$: $\llcorner x \lrcorner < \ulcorner y \urcorner$ oraz $\llcorner y \lrcorner < \ulcorner x \urcorner$, ponieważ: $\llcorner \frac{6}{5} \lrcorner = 1$, $\llcorner \frac{7}{5} \lrcorner = 1$, $\ulcorner \frac{6}{5} \urcorner = 2$, $\ulcorner \frac{7}{5} \urcorner = 2$.

Widać zatem, że: $1 = \llcorner \frac{6}{5} \lrcorner < \ulcorner \frac{7}{5} \urcorner = 2$ oraz $1 = \llcorner \frac{7}{5} \lrcorner < \ulcorner \frac{6}{5} \urcorner = 2$.

3. Znalezienie kontrprzykładu dla równości $A-(B-C) = A\cup(C-B)$ polega na podaniu takich zbiorów A, B i C, że wynik operacji po lewej stronie tej równości nie będzie tożsamy z wynikiem operacji po prawej stronie.

Można narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości. Jeśli wynik wykonanych operacji po lewej stronie nie będzie tożsamy z wynikiem operacji wykonanych po prawej stronie, to podane zbiory stanowią kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po lewej stronie równości:
$B - C = \{2, 3\}$
$A - (B - C) = \{1, 4, 5\}$
Wyznaczamy wynik operacji wykonanych po prawej stronie równości:
$C - B = \{4, 7\}$
$A \cup (C - B) = \{1, 2, 4, 5, 7\}$
Widzimy zatem, że:
$A - (B - C) = \{1, 4, 5\} \neq \{1, 2, 4, 5, 7\} = A \cup (C - B)$.
Podane zbiory A, B i C stanowią zatem kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.

4. Obliczając pochodną funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x \cdot e^x}}{e^x}$ korzystamy ze wzorów na pochodną: ilorazu funkcji, iloczynu funkcji, funkcji złożonej, funkcji wykładniczej i funkcji pierwiastkowej. Jest to zatem zadanie, w którym słuchacze mogą wykazać się znajomością różniczkowania wielu rodzajów funkcji. Ponadto, zadanie można rozwiązać różnymi sposobami.

Sposób pierwszy. Obliczamy pochodną:

$$f'(x) = (\frac{\sqrt{x \cdot e^x}}{e^x})' =$$

$$= \frac{(\sqrt{x \cdot e^x})' \cdot e^x - \sqrt{x \cdot e^x} \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{1}{(e^x)^2} \cdot (\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot e^x}} \cdot (x \cdot e^x)' \cdot e^x - \sqrt{x \cdot e^x} \cdot e^x) =$$

$$= \frac{1}{(e^x)^2} \cdot e^x \cdot \frac{(x \cdot e^x)' - 2 \cdot \sqrt{x \cdot e^x} \cdot \sqrt{x \cdot e^x}}{2 \cdot \sqrt{x \cdot e^x}} =$$

$$= \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot e^x}} \cdot ((x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' - 2 \cdot x \cdot e^x) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot e^x \cdot \sqrt{x \cdot e^x}} \cdot (e^x - x \cdot e^x) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot e^x \cdot \sqrt{x \cdot e^x}} \cdot e^x \cdot (1 - x) =$$

$$= \frac{1 - x}{2 \cdot \sqrt{x \cdot e^x}}.$$

Sposób drugi. Najpierw zauważmy, że $\frac{\sqrt{x \cdot e^x}}{e^x} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{e^x}}{e^x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{e^x}}$, co pozwala nieco uprościć proces obliczania pochodnej (w tym sensie, że nie musimy liczyć pochodnej iloczynu $x \cdot e^x$). Jeśli zatem $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{e^x}}$, to:

$$f'(x) = (\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{e^x}})' =$$

$$= \frac{(\sqrt{x})' \cdot \sqrt{e^x} - \sqrt{x} \cdot (\sqrt{e^x})'}{(\sqrt{e^x})^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \sqrt{e^x} - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{e^x}} \cdot e^x}{e^x} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot e^x} \cdot (\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} \cdot e^x}{\sqrt{e^x}}) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot e^x} \cdot \frac{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot e^x}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{e^x}} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot e^x} \cdot \frac{e^x - x \cdot e^x}{\sqrt{x \cdot e^x}} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot e^x} \cdot e^x \cdot \frac{1 - x}{\sqrt{x \cdot e^x}} =$$

$$= \frac{1 - x}{2 \cdot \sqrt{x \cdot e^x}}.$$

5.1. Zbiór X jest nieskończony w sensie Dedekinda wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym Y, czyli gdy istnieje bijekcja $f : X \to Y$, gdzie $Y \subseteq X$ oraz $X \neq Y$.

Zbiór wszystkich jednoelementowych podzbiorów zbioru wszystkich parzystych liczb naturalnych to zbiór: $X = \{\{2 \cdot n\} : n \in \mathbb{N}\} = \{\{0\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \ldots\}$. Niech $Y = \{\{2 \cdot n\} : n \in X\} = \{\{0\}, \{4\}, \{8\}, \{12\}, \ldots\}$. Wtedy f jest surjekcją, czyli dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $y = f(x)$, ponieważ każdy element $\{y\}$ jest postaci $\{2 \cdot 2 \cdot n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, f jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, czyli jeśli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$, gdyż jeśli $\{m\} \neq \{n\}$, to również $\{2 \cdot m\} \neq \{2 \cdot n\}$. Tak więc f jest bijekcją X na Y. Wreszcie, $Y \subseteq X$ oraz $X \neq Y$, gdyż np. $\{2\} \in X - Y$.

5.2. Dowód indukcyjny tego, że:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

przebiega następująco:

Krok początkowy. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest 1. Lewa strona rozważanej równości ma wtedy postać 3^0, a to jest równe 1. Prawa strona rozważanej równości ma wtedy postać $\frac{3^1-1}{2}$, a to jest równe $\frac{2}{2} = 1$. Tak więc, równość zachodzi dla majmniejszej liczby z rozważanego zakresu.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne dla $k \geqslant 1$:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2}.$$

Mamy udowodnić, że przy tym założeniu zachodzi:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{k-1} + 3^k = \frac{3^{k+1} - 1}{2}.$$

Suma $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{k-1} + 3^k$ jest, na mocy założenia indukcyjnego, równa: $\frac{3^k-1}{2} + 3^k$. Obliczamy: $\frac{3^k-1}{2} + 3^k = \frac{3^k-1+2\cdot 3^k}{2} = \frac{3 \cdot 3^k - 1}{2} = \frac{3^{k+1}-1}{2}$.

Udowodniliśmy zatem, że jeśli $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{k-1} = \frac{3^k-1}{2}$, to $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{k-1} + 3^k = \frac{3^{k+1}-1}{2}$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważana nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.

Łatwo zauważyć, że dowodzona równość jest szczególnym przypadkiem znanego ze szkoły wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. W edukacji uniwersyteckiej kładziemy nacisk na umiejętność dowodzenia twierdzeń, a nie na zapamiętywanie wzorów.