Metody Dowodzenia Twierdzeń

i Automatyzacja Rozumowań

Zaliczenie Wykładu 24.I.2017

III rok kognitywistyki UAM

Imię i nazwisko:. . . . . Sówki Mądre Główki

1. Dokonaj przekładu z notacji infiksowej na prefiksową oraz narysuj skrócone drzewo składniowe formuły:

$$\neg(p \vee q) \to (\neg\neg r \wedge s)$$

2. Znajdź koniunkcyjną postać normalną formuły:

$$(r \vee s) \to (\neg p \wedge q)$$

3. Ustal czy wniosek:

$$\neg\exists x(R(x) \wedge Q(x))$$

wynika tablicowo z przesłanki:

$$\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to P(x))$$

4. Ustal czy jest rezolucyjnie sprzeczny zbiór formuł:

$$\{\ q \to p,\ \neg r \vee q,\ s \to r,\ \neg(s \to p)\ \}$$

5. Podaj:

1. Definicję zdaniowego zbioru Hintikki.
2. Sformułowanie twierdzenia o dedukcji dla KRZ.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Metody Dowodzenia Twierdzeń
i Automatyzacja Rozumowań
Zaliczenie Wykładu 24.I.2017

III rok kognitywistyki UAM

Imię i nazwisko:. . . . .   Świstaki Zmyślne Bystrzaki

1. Dokonaj przekładu z notacji infiksowej na prefiksową oraz narysuj skrócone drzewo składniowe formuły:

$$\neg(p \to q) \land (s \lor \neg\neg r)$$

2. Znajdź koniunkcyjną postać normalną formuły:

$$\neg(r \to s) \lor (p \land \neg q)$$

3. Ustal czy wniosek:

$$\neg\exists x(R(x) \land Q(x))$$

wynika tablicowo z przesłanki:

$$\forall x(Q(x) \to P(x)) \land \neg\exists x(P(x) \land R(x))$$

4. Ustal czy jest rezolucyjnie sprzeczny zbiór formuł:

$$\{\ \neg q \lor p,\ s \land \neg p,\ r \to q,\ s \to r\ \}$$

5. Podaj:

1. Definicję zdaniowej własności niesprzeczności.
2. Sformułowanie lematu Königa.

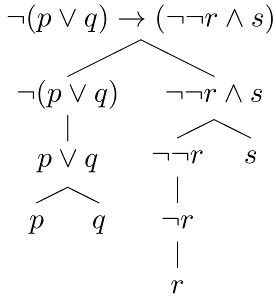
Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

ROZWIĄZANIA

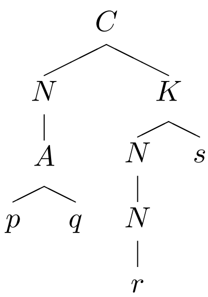
SÓWKI MĄDRE GŁÓWKI

1. Formuła $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg\neg r \wedge s)$ przekształcona do postaci prefiksowej wygląda następująco: $CNApqKNNrs$.

Pełne drzewo składniowe tej formuły (w notacji infiksowej) wygląda następująco:



Skrócone drzewo składniowe tej formuły (w notacji prefiksowej) wygląda następująco:



2. Działamy wedle podanego algorytmu:

$$
\begin{aligned}
&\langle \underline{[(r \vee s) \rightarrow (\neg p \wedge q)]} \rangle \\
&\langle [\neg(r \vee s), \underline{\neg p \wedge q}] \rangle \\
&\langle [\underline{\neg(r \vee s)}, \neg p], [\neg(r \vee s), q] \rangle \\
&\langle [\neg r, \neg p], [\neg s, \neg p], [\underline{\neg(r \vee s)}, q] \rangle \\
&\langle [\neg r, \neg p], [\neg s, \neg p], [\neg r, q], [\neg s, q] \rangle
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że badana formuła nie jest tautologią KRZ, ponieważ nie jest tak, iżby każda alternatywa elementarna wchodząca w skład powyższej koniunkcji zawierała parę literałów komplementarnych.

1. Budujemy tablicę analityczną dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku:

$$\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow P(x))^{\ 1.\wedge}$$

$$\neg\neg\exists x(R(x) \wedge Q(x))^{\ 2.\neg\neg}$$

$$(1_g)\ \neg\exists x(P(x) \wedge Q(x))^{\ 4.*a}$$

$$(1_d)\ \forall x(R(x) \rightarrow P(x))^{\ 5.*a}$$

$$(2)\ \exists x(R(x) \wedge Q(x))^{\ 3.\surd a}$$

$$(3)\ R(a) \wedge Q(a)^{\ 6.\wedge}$$

$$(4)\ \neg(P(a) \wedge Q(a))^{\ 8.\neg\wedge}$$

$$(5)\ R(a) \rightarrow P(a)^{\ 7.\rightarrow}$$

$$(6_g)\ R(a)$$

$$(6_d)\ Q(a)$$

$$\begin{array}{cc} (7_l)\ \neg R(a) & (7_p)\ P(a) \\ \times_{6_g,7_l} & \begin{array}{cc} (8_l)\ \neg P(a) & (8_p)\ \neg Q(a) \\ \times_{7_p,8_l} & \times_{6_d,8_p} \end{array} \end{array}$$

Wszystkie gałęzie tablicy analitycznej są zamknięte, a więc wniosek wynika tablicowo z przesłanki.

4. Pokażemy, że z podanego zbioru formuł można wyprowadzić rezolucyjnie klauzulę pustą, czyli że jest on rezolucyjnie sprzeczny:

1.	$[q \to p]$	
2.	$[\neg r \vee q]$	
3.	$[s \to r]$	
4.	$[\neg(s \to p)]$	
5.	$[\neg q, p]$	β,1
6.	$[\neg r, q]$	β,2
7.	$[\neg s, r]$	β,3
8.	$[s]$	α,4
9.	$[\neg p]$	α,4
10.	$[r]$	RR:7,8
11.	$[\neg q]$	RR:5,9
12.	$[\neg r]$	RR:6,11
13.	$[\,]$	RR:10,12

5.1. Zbiór $\mathbf{H}$ formuł języka KRZ nazywamy *zdaniowym zbiorem Hintikki*, jeśli:

1. Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p, zachodzi co najmniej jedno z dwojga: $p \notin \mathbf{H}$ lub $\neg p \notin \mathbf{H}$.
2. $\bot \notin \mathbf{H}$ oraz $\neg\top \notin \mathbf{H}$.
3. Jeśli $\neg\neg\psi \in \mathbf{H}$, to $\psi \in \mathbf{H}$.
4. Jeśli $\alpha \in \mathbf{H}$, to $\alpha_1 \in \mathbf{H}$ oraz $\alpha_2 \in \mathbf{H}$.
5. Jeśli $\beta \in \mathbf{H}$, to $\beta_1 \in \mathbf{H}$ lub $\beta_2 \in \mathbf{H}$.

5.2. *Twierdzenie o dedukcji dla KRZ*. Dla dowolnego zbioru formuł S języka KRZ oraz formuł φ, ψ tego języka: $S \cup \{\varphi\} \vdash_{ph} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \vdash_{ph} (\varphi \to \psi)$.

Tutaj $\vdash_{ph}$ jest relacją konsekwencji wyznaczoną przez aksjomaty KRZ i regułę odrywania. W dowodzie tego twierdzenia wykorzystujemy jedynie aksjomaty:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

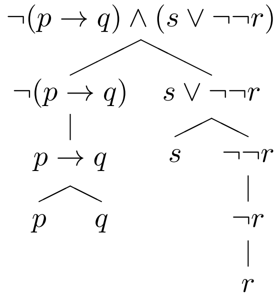
Tak więc, Twierdzenie o Dedukcji zachodzi dla każdego systemu aksjomatycznego, zawierającego te dwa aksjomaty.

ROZWIĄZANIA

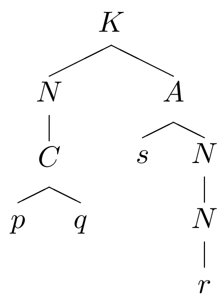
ŚWISTAKI ZMYŚLNE BYSTRZAKI

1. Formuła $\neg(p \to q) \wedge (s \vee \neg\neg r)$ przekształcona do postaci prefiksowej wygląda następująco: $KNCpqAsNNr$.

Pełne drzewo składniowe tej formuły (w notacji infiksowej) wygląda następująco:



Skrócone drzewo składniowe tej formuły (w notacji prefiksowej) wygląda następująco:



2. Działamy wedle podanego algorytmu:

$$
\begin{array}{l}
\langle[\underline{\neg(r \to s) \vee (p \wedge \neg q)}]\rangle \\
\langle[\neg(r \to s), \underline{p \wedge \neg q}]\rangle \\
\langle[\underline{\neg(r \to s)}, p], [\neg(r \to s), \neg q]\rangle \\
\langle[r, p], [\neg s, p], [\underline{\neg(r \to s)}, \neg q]\rangle \\
\langle[r, p], [\neg s, p], [r, \neg q], [\neg s, \neg q]\rangle
\end{array}
$$

Zauważmy, że badana formuła nie jest tautologią KRZ, ponieważ nie jest tak, iżby każda alternatywa elementarna wchodząca w skład powyższej koniunkcji zawierała parę literałów komplementarnych.

3. Budujemy tablicę analityczną dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku:

$$\forall x(Q(x) \to P(x)) \land \neg\exists x(P(x) \land R(x))\ ^{1.\land}$$
$$|$$
$$\neg\neg\exists x(R(x) \land Q(x))^{2.\neg\neg}$$
$$|$$
$$(1_g)\ \forall x(Q(x) \to P(x))\ ^{4.*a}$$
$$|$$
$$(1_d)\ \neg\exists x(P(x) \land R(x))\ ^{5.*a}$$
$$|$$
$$(2)\ \exists x(R(x) \land Q(x))\ ^{3.\surd a}$$
$$|$$
$$(3)\ R(a) \land Q(a)\ ^{6.\land}$$
$$|$$
$$(4)\ Q(a) \to P(a)\ ^{7.\to}$$
$$|$$
$$(5)\ \neg(P(a) \land R(a))\ ^{8.\neg\land}$$
$$|$$
$$(6_g)\ R(a)$$
$$|$$
$$(6_d)\ Q(a)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \diagup \quad \diagdown & \\
(7_l)\ \neg Q(a) & & (7_p)\ P(a) \\
| & & \diagup \quad \diagdown \\
\times_{6_d,7_l} & & \begin{array}{cc} (8_l)\ \neg P(a) & (8_p)\ \neg R(a) \\ | & | \\ \times_{7_p,8_l} & \times_{6_g,8_p} \end{array}
\end{array}$$

Wszystkie gałęzie tablicy analitycznej są zamknięte, a więc wniosek wynika tablicowo z przesłanki.

4. Pokażemy, że z podanego zbioru formuł można wyprowadzić rezolucyjnie klauzulę pustą, czyli że jest on rezolucyjnie sprzeczny:

1.	$[\neg q \vee p]$	
2.	$[s \wedge \neg p]$	
3.	$[r \rightarrow q]$	
4.	$[s \rightarrow r]$	
5.	$[\neg q, p]$	β,1
6.	$[s]$	α,2
7.	$[\neg p]$	α,2
8.	$[\neg r, q]$	β,3
9.	$[\neg s, r]$	β,4
10.	$[r]$	RR:6,9
11.	$[q]$	RR:8,10
12.	$[p]$	RR:5,11
13.	$[\,]$	RR:7,12

5.1. *Zdaniowa własności niesprzeczności*. Niech $\mathcal{C}$ będzie rodziną zbiorów formuł języka KRZ. Mówimy, że $\mathcal{C}$ jest *zdaniową własnością niesprzeczności*, jeśli dla każdego zbioru $S \in \mathcal{C}$:

1. Dla każdej zmiennej zdaniowej p: albo $p \notin S$ albo $\neg p \notin S$.

2. $\bot \notin S$ oraz $\neg\top \notin S$.

3. Jeśli $\neg\neg\psi \in S$, to $S \cup \{\psi\} \in S$.

4. Jeśli $\alpha \in S$, to $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$.

5. Jeśli $\beta \in S$, to $S \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}$ lub $S \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}$.

5.2. *Lemat Königa*. Jeśli drzewo $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

Drzewo D jest *rzędu skończonego* (jest *skończenie generowane*), jeśli każdy jego wierzchołek ma rząd skończony. *Rzędem* wierzchołka x nazywamy moc zbioru wszystkich bezpośrednich potomków x.