

# Funkcje rekurencyjne (6)

## (JiNoI III)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM  
[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)  
[pogon@amu.edu.pl](mailto:pogon@amu.edu.pl)

4 kwietnia 2007

Plan na dziś:

- Definicja maszyny Turinga;
- Przykłady obliczeń.

Wreszcie podamy pierwszą z matematycznych reprezentacji pojęcia **obliczalności**. Ograniczymy się przy tym do podstawowych definicji oraz kilku przykładów obliczeń.

Należy pamiętać, że ten kurs ma charakter wyłącznie **propedeutyyczny** — tak był dotąd traktowany, a wedle nieoficjalnych jeszcze projektów nowego programu studiów **Językoznawstwa i Nauk o Informacji**, ma być całkiem zniesiony. Wykładu na temat maszyn Turinga szukać trzeba wtedy będzie w innych miejscach. Może istotnie studentom JiNoI zbyteczna jest jakakolwiek wiedza o matematycznych podstawach informatyki?

Będziemy korzystać z definicji oraz przykładów zamieszczonych w:

- I.A. Ławrow, L.L. Maksimowa *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004. Z języka rosyjskiego przełożył Jerzy Pogonowski.

Dalsza, przykładowa, literatura:

- Hopcroft, J.E., Ullman, J.D. 1994. *Wprowadzenie do teorii automatów, języków i obliczeń*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kościelski, A. 1997. *Teoria obliczeń. Wykłady z matematycznych podstaw informatyki*. Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław.
- Moczurad, M. 2002. *Wybrane zagadnienia z teorii rekursji*. Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Murawski, R. 2000<sup>3</sup>. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.



Alan Turing



Pomnik w Manchester



**Uwaga.** Definicje, które zostaną za chwilę podane, „przystosowane” są do maszyn Turinga, które liczą wartości pewnych funkcji. Przy tym, korzystamy z faktu, że liczby naturalne (a także ich ciągi) mogą być kodowane poprzez ciągi binarne.

Można także patrzeć na maszyny Turinga jako na konstrukcje, które pozwalają rozpoznawać **języki formalne**, czyli ciągi słów utworzone ze znaków pewnego alfabetu.

Rozważane będą **deterministyczne** maszyny Turinga.

Definicje maszyn Turinga, spotykane w literaturze, mogą różnić się pewnymi drobnymi szczegółami (np. liczbą stanów końcowych).

*Maszyna Turinga*  $T$  określona jest całkowicie przez:

- (a) *alfabet zewnętrzny*  $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  (gdzie  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ );
- (b) *alfabet stanów wewnętrznych*  $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$ ;
- (c) *program*, tj. zbiór wyrażeń  $T(i, j)$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 0, \dots, n$ ), z których każde może mieć jedną z następujących postaci:
  - $q_i a_j \rightarrow q_k a_l$ ,
  - $q_i a_j \rightarrow q_k a_l R$
  - $q_i a_j \rightarrow q_k a_l L$

gdzie  $0 \leq k \leq m$ ,  $0 \leq l \leq n$ .

Stan  $q_0$  jest wyróżniony — jest stanem *końcowym*.

Stan  $q_1$  też jest wyróżniony — jest stanem *początkowym*.

Symbole  $a_0$  i  $a_1$  także są wyróżnione —  $a_0$  jest symbolem tzw. *pustej* klatki taśmy. Symbole  $a_0$  i  $a_1$  wystarczają do zapisania *każdej* informacji.

Wyrażenia  $T(i, j)$  nazywają się *rozkazami*.

Słowem maszynowym lub konfiguracją nazywamy słowo postaci:

$$Aq_k a_l B$$

gdzie  $0 \leq k \leq m$ ,  $0 \leq l \leq n$ ,  $A$  oraz  $B$  — są słowami (być może pustymi) w alfabecie  $\mathcal{A}$ .

Piszemy  $a_i^x$  jako skrót wyrażenia  $\underbrace{a_i a_i \dots a_i}_{x \text{ razy}}$ .

Proszę zauważyć, że maszyna Turinga jest pewnym **obiektem matematycznym**. Wszelkie określenia w rodzaju: „praca maszyny”, „maszyna zatrzymuje się”, itd. także mają ściśle zdefiniowany sens **matematyczny**.



Niech dane będą maszyna  $T$  oraz słowo maszynowe  $M = Aq_i a_j B$ , gdzie  $0 \leq i \leq m$ . Przez  $M'_T$  oznaczmy słowo otrzymane z  $M$  według następujących reguł:

- (1) dla  $i = 0$  niech  $M'_T = M$ ;
- (2) dla  $i > 0$ :
  - (a) jeśli  $T(i, j)$  jest postaci  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l$ , to  $M'_T = Aq_k a_l B$ ;
  - (b) jeśli  $T(i, j)$  jest postaci  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l R$ , to:
    - $(B_1)$  jeśli  $B$  nie jest słowem pustym, to  $M'_T = Aa_l q_k B$ ,
    - $(B_2)$  jeśli  $B$  jest słowem pustym, to  $M'_T = Aa_l q_k a_0$ ;
  - (c) jeśli  $T(i, j)$  jest postaci  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l L$ , to:
    - $(C_1)$  jeśli  $A = A_1 a_s$  dla pewnych  $A_1$  oraz  $a_s$ , to  $M'_T = A_1 q_k a_s a_l B$ ,
    - $(C_2)$  jeśli  $A$  jest słowem pustym, to  $M'_T = q_k a_0 a_l B$ .

Przyjmijmy  $M_T^{(0)} = M$ ,  $M_T^{(n+1)} = (M_T^{(n)})'$ .

- Mówimy, że maszyna  $T$  *przetwarza* słowo maszynowe  $M$  w słowo  $M_1$ , jeżeli dla pewnego  $n$ :  $M_T^{(n)} = M_1$ . Piszemy wtedy  $M \xRightarrow{T} M_1$ .
- Piszemy  $M \xRightarrow{T} M_1$ , jeśli maszyna  $T$  przetwarza  $M$  w  $M_1$  i nie jest przy tym wykorzystywany warunek  $(C_2)$  powyższej definicji.
- Piszemy natomiast  $M \mapsto_T M_1$ , jeśli maszyna  $T$  przetwarza  $M$  w  $M_1$ , a przy tym nie są wykorzystywane warunki  $(B_1)$  oraz  $(C_2)$  powyższej definicji.

Zobaczymy za chwilę działanie bardzo prostej maszyny Turinga, na przykładzie programu zawartego w książce:



Wychodzimy z tej prezentacji i oglądamy działanie programu.

Mówimy, że maszyna  $T$  *oblicza*  $n$ -argumentową częściową funkcję liczbową  $f$ , gdzie  $\delta_f \subseteq \mathcal{N}^n$ ,  $\rho_f \subseteq \mathcal{N}$ , jeśli spełnione są następujące warunki:

- (a) jeśli  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \delta_f$ , to maszyna  $T$  *zatrzymuje się*, tj. przetwarza słowo  $q_1 0 1^{x_1} 0 \dots 1^{x_n} 0$  w pewne słowo  $A q_0 B$ , a przy tym słowo  $A q_0 B$  zawiera  $f(x_1, \dots, x_n)$  wystąpień symbolu 1;
- (b) jeśli  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin \delta_f$ , to maszyna rozpoczynając działanie od słowa  $M = q_1 0 1^{x_1} 0 \dots 1^{x_n} 0$  *pracuje w nieskończoność*, tj.  $q_0$  nie występuje w  $M_T^{(n)}$  dla żadnego  $n$ .

$\delta_f$  oraz  $\rho_f$  oznaczają dziedzinę oraz przeciwdziedzinę  $f$ , odpowiednio.

Mówimy, że maszyna  $T$  *prawidłowo oblicza* funkcję  $f$ , jeśli spełnione są warunki:

- (a) jeśli  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \delta_f$ , to

$$q_1 0 1^{x_1} 0 \dots 1^{x_n} 0 \xRightarrow{T} q_0 0 1^{f(x_1, \dots, x_n)} 0 0 \dots 0;$$

- (b) jeśli  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin \delta_f$ , to maszyna, rozpoczynając działanie od słowa  $q_1 0 1^{x_1} 0 \dots 1^{x_n} 0$  pracuje w nieskończoność.

Funkcję  $f$  nazywamy *obliczalną* (*prawidłowo obliczalną*), jeśli istnieje maszyna, która oblicza (prawidłowo oblicza) funkcję  $f$ .

## Dwa przykłady operacji na maszynach Turinga.

Niech  $T_1, T_2, T_3$  będą maszynami Turinga z tym samym alfabetem zewnętrznym  $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ , z alfabetami stanów wewnętrznymi:

$$Q_1 = \{q_0, q_1, \dots, q_r\}, \quad Q_2 = \{q_0, q_1, \dots, q_s\}, \quad Q_3 = \{q_0, q_1, \dots, q_t\}$$

oraz programami  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ , odpowiednio.

*Złożeniem*  $T_1 \cdot T_2$  maszyn  $T_1$  i  $T_2$  nazywamy maszynę  $T$ , której program jest sumą zbiorów:

$$S_{q_{r+1}}^{q_0} \Pi_1 \cup S_{q_{r+1} \dots q_{r+s}}^{q_1 \dots q_s} \Pi_2,$$

gdzie  $S_{q_i}^{q_j} \Pi$  oznacza zbiór rozkazów otrzymanych z  $\Pi$  poprzez zamianę wszystkich wystąpień  $q_j$  na  $q_i$ .

Rozwidleniem maszyn  $T_1, T_2, T_3$  względem  $(q_i, q_j)$ ,

(symbolicznie  $T_1 \left\{ \begin{array}{l} q_i = T_2 \\ q_j = T_3 \end{array} \right.$ ), gdzie  $q_i, q_j \in Q_1$ ,

nazywamy maszynę  $T$ , której program otrzymujemy w sposób następujący:

- z  $\Pi_1$  usuwamy rozkazy  $T_1(i, k)$  oraz  $T_1(j, k)$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$ , otrzymany w ten sposób zbiór oznaczamy przez  $\Pi'_1$ ;
- wtedy

$$\Pi = \Pi'_1 \cup S_{q_i q_{r+1} \dots q_{r+s+1}}^{q_1 q_2 \dots q_s} \Pi_2 \cup S_{q_j q_{r+s} \dots q_{r+s+t-2}}^{q_1 q_2 \dots q_t} \Pi_3.$$

Złożenia i rozwidlenia maszyn Turinga to zatem pewne operacje na tych maszynach. Przy obliczaniu różnych funkcji czasem wygodnie jest pracować z maszynami Turinga będącymi wynikami operacji na innych, prostszych maszynach Turinga. Dla przykładu, funkcje definiowane przez [schemat rekursji prostej](#) z funkcji prawidłowo obliczalnych w sensie Turinga określać można przez złożenie i rozwidlenie stosownych maszyn Turinga.

Pokażemy teraz, że maszyny Turinga mogą być kodowane przez liczby naturalne. Niech  $p_n$  oznacza  $n$ -tą liczbę pierwszą.

Niech  $A = a_{s_0} \dots a_{s_k}$  będzie słowem w alfabecie  $\{a_0, a_1, a_2 \dots\}$ .  
Przyjmijmy:

$$k_l(A) = \prod_{t=0}^k p_t^{s_k-t}, \quad k_r(A) = \prod_{t=0}^k p_t^{s_t}.$$

Jeśli  $M = Aq_i a_j B$  jest słowem maszynowym, to przyjmijmy:

$$\nu(M) = 2^{k_l(A)} \cdot 3^i \cdot 5^j \cdot 7^{k_r(B)}.$$



Numerem rozkazu  $T(i, j)$  nazwiemy liczbę:

$$\mu(T(i, j)) = p_{c(i, j)}^{p_0^k \cdot p_1^l \cdot p_2^s},$$

gdzie  $c(x, y) = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$  jest *funkcją numerującą Cantora* oraz:

$$\begin{aligned} s = 0, & \quad \text{jeśli } T(i, j) \text{ jest postaci } q_i a_j \rightarrow q_k a_l, \\ s = 1, & \quad \text{jeśli } T(i, j) \text{ jest postaci } q_i a_j \rightarrow q_k a_l L, \\ s = 2, & \quad \text{jeśli } T(i, j) \text{ jest postaci } q_i a_j \rightarrow q_k a_l R. \end{aligned}$$

Numerem  $\lambda(T)$  *maszyny*  $T$  nazwiemy iloczyn wszystkich numerów rozkazów  $T(i, j)$  maszyny  $T$ .

Tak więc, *maszyny* oraz ich *programy* (a także ich *dane*) możemy traktować tak, jak liczby naturalne! Zobaczmy później, jak ważne ma to konsekwencje.

1. Jaką funkcję  $f(x)$  oblicza maszyna  $T$  o następującym programie:

- $q_10 \rightarrow q_20R$ ,
- $q_11 \rightarrow q_01$ ,
- $q_20 \rightarrow q_01$ ,
- $q_21 \rightarrow q_21R$  ?

**Odpowiedź.**  $f(x) = x + 1$ .

Aby tę odpowiedź uzasadnić, należy **udowodnić**, że maszyna Turinga  $T$  przetwarza słowo  $q_101^x0$  w słowo  $Aq_0B$  takie, że w  $Aq_0B$  występuje  $x + 1$  razy symbol 1.

Rozważmy **przykładowe** obliczenie. Weźmy słowo  $1^3$ .  
Do tablicy idzie ochotnik. Śmiało.

2. Skonstruować maszynę Turinga  $T$ , która **prawidłowo** oblicza funkcję  $f(x) = x + 1$ .

**Odpowiedź.** Na przykład:

$$\begin{aligned} q_1 0 &\rightarrow q_2 0 R, & q_1 1 &\rightarrow q_0 1, \\ q_2 0 &\rightarrow q_3 1 L, & q_2 1 &\rightarrow q_2 1 R, \\ q_3 0 &\rightarrow q_0 0, & q_3 1 &\rightarrow q_3 1 L. \end{aligned}$$

Aby tę odpowiedź uzasadnić, należy **udowodnić**, że:

$$q_1 0 1^x 0 1 0 \xrightarrow{T} q_0 0 1^{x+1} 0 0 \dots 0.$$

Rozważmy **przykładowe** obliczenie. Weźmy słowo  $1^3$ .  
Do tablicy idzie ochotnik.

3. Skonstruować maszynę Turinga  $T$ , która prawidłowo oblicza funkcję  $o(x) = 0$ .

**Odpowiedź.** Na przykład:

$$\begin{aligned} q_1 0 &\rightarrow q_2 0 R, \\ q_2 0 &\rightarrow q_3 0 L, & q_2 1 &\rightarrow q_2 1 R, \\ q_3 0 &\rightarrow q_0 0, & q_3 1 &\rightarrow q_3 0 L. \end{aligned}$$

Aby tę odpowiedź uzasadnić, należy **udowodnić**, że dla dowolnego słowa  $A$  mamy:

$$q_1 0 A 0 \xRightarrow{T} q_0 0 0 0 \dots 0.$$

Rozważmy **przykładowe** obliczenie. Weźmy słowo 1011.  
Do tablicy idzie ochotnik.

4. Skonstruować maszynę Turinga  $T$  prawidłowo obliczającą funkcję  $f(x, y) = x + y$ .

**Odpowiedź.** Na przykład:

$$\begin{array}{ll}
 q_1 0 \rightarrow q_2 0 R, & \\
 q_2 0 \rightarrow q_3 1 R, & q_2 1 \rightarrow q_2 1 R, \\
 q_3 0 \rightarrow q_4 0 L, & q_3 1 \rightarrow q_3 1 R, \\
 & q_4 1 \rightarrow q_5 0 L, \\
 q_5 0 \rightarrow q_0 0, & q_5 1 \rightarrow q_5 1 L.
 \end{array}$$

Aby tę odpowiedź uzasadnić, należy **udowodnić**, że dla wszystkich  $x$  oraz  $y$ :

$$q_1 0 1^x 0 1^y 0 \xRightarrow{T} q_0 0 1^{x+y} 0 0 \dots 0.$$

Rozważmy **przykładowe** obliczenie. Obliczmy  $2 + 3$ .  
Do tablicy idzie ochotnik.

5. Skonstruować maszynę Turinga  $T$  obliczającą funkcję  $f(x) = x \div 1$ , gdzie  $x \div 1 = x - 1$  dla  $x > 0$  oraz  $0 \div 1 = 0$ .

**Odpowiedź.** Na przykład:

$$\begin{aligned} q_1 0 &\rightarrow q_2 0 R, \\ q_2 0 &\rightarrow q_0 0 L, & q_2 1 &\rightarrow q_3 1 R, \\ q_3 0 &\rightarrow q_4 0 L, & q_3 1 &\rightarrow q_3 1 R, \\ & & q_4 1 &\rightarrow q_5 0 L, \\ q_5 0 &\rightarrow q_0 0, & q_5 1 &\rightarrow q_5 1 L. \end{aligned}$$

Aby tę odpowiedź uzasadnić, należy **udowodnić**, że dla każdego  $x > 0$ :

$$q_1 0 1^x 0 1 0 \xRightarrow{T} A q_0 B$$

dla pewnych  $A, B$  takich, że symbol 1 występuje  $x - 1$  razy w  $A q_0 B$  oraz że  $q_1 0 0 0 \xRightarrow{T} C q_0 D$ , dla pewnych  $C, D$  nie zawierających symbolu 1.

Rozważmy **przykładowe** obliczenie. Obliczmy  $2 \div 1$ .

Do tablicy idzie ochotnik.

6. Skonstruować maszynę Turinga  $T$  prawidłowo obliczającą funkcję  $sg(x)$ ; gdzie  $sg(x) = 1$  dla  $x > 0$  oraz  $sg(0) = 0$ .

**Odpowiedź.** Na przykład:

$$\begin{aligned} q_1 0 &\rightarrow q_2 0 R, \\ q_2 0 &\rightarrow q_0 0 L, & q_2 1 &\rightarrow q_3 1 R, \\ q_3 0 &\rightarrow q_4 0 L, & q_3 1 &\rightarrow q_3 0 R, \\ q_4 0 &\rightarrow q_4 0 L, & q_4 1 &\rightarrow q_0 0 L. \end{aligned}$$

**Ćwiczenie.** Co należy udowodnić, aby uzasadnić tę odpowiedź?  
Wykonaj przykładowe obliczenie.

Jak „mocne” są maszyny Turinga?

Języki przez nie rozpoznawane to języki rekurencyjnie przeliczalne.

Jest jasne, że nie każdy język może być rozpoznany przez maszynę Turinga: wszystkich języków nad ustalonym skończonym alfabetem jest **kontinuum**, a maszyn Turinga z tym alfabetem jest tylko **przeliczalnie** wiele.

**Problem stopu**. Problem, czy dowolna maszyna Turinga dla dowolnych danych zakończy obliczenie, jest problemem **nierozstrzygalnym**.

Maszyny Turinga są dość trudnym narzędziem w **praktycznych** obliczeniach. Są jednak przydatne w rozważaniach **metateoretycznych**.

A bez takich rozważań, jak wiadomo, byłabyś **dzieckiem we mgle**.

Bo skąd możesz wiedzieć, że coś robisz **poprawnie**, jeśli nie wiesz, **co** właściwie robisz?



**Busy Beaver.** Jest skończenie wiele zatrzymujących się maszyn Turinga o  $n$  stanach nad alfabetem binarnym. Funkcja przyporządkowująca liczbie  $n$  największą liczbę symboli 1, która pozostaje na taśmie po zakończeniu pracy maszyny Turinga o  $n$  stanach i zaczynającej pracę z taśmą, na której są tylko symbole 0, jest dobrze określona. **Nie** jest ona jednak obliczalna przez żadną maszynę Turinga.

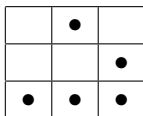
Gdybyśmy mieli jakiś systematyczny sposób na otrzymywanie wartości tej funkcji, to można byłoby rozstrzygać prawie każdy problem matematyczny.

Busy Beaver dla  $n = 6$  wyprodukował  $10^{865}$  symboli 1, zatrzymując się po  $10^{1730}$  krokach.

**Teza Churcha-Turinga.** Każda funkcja, która jest (w intuicyjnym sensie) obliczalna, jest obliczalna przez pewną maszynę Turinga. To oczywiście **nie** jest twierdzenie matematyczne. Także twierdzenie do niego odwrotne, głoszące, iż każda funkcja obliczalna przez pewną maszynę Turinga jest (w intuicyjnym sensie) obliczalna, **nie** jest twierdzeniem matematycznym. To, że te dwie klasy funkcji są identyczne (a także pokrywają się z klasami wyznaczonymi przez inne matematyczne reprezentacje obliczalności) nazywa się **Tezą Churcha-Turinga**.

**Test Turinga.** To procedura zaproponowana przez Turinga. Masz dwóch (niewidocznych) interlokutorów: człowieka oraz komputer. Jeśli nie potrafisz wskazać, który z nich jest komputerem, to należy uznać, iż maszyna przeszła test na bycie podmiotem **inteligentnym**.

**Gra Conwaya.** Popularna „gra w życie” ma taką samą moc obliczeniową, jak uniwersalna maszyna Turinga. A oto **glider**, jeden z bohaterów tej gry (a także symbol subkultury hakerów):



**Chinese Room.** To problem zaproponowany przez **Johna Searle'a**. Nie znasz chińskiego. Masz do dyspozycji kompletne reguły przekładu z chińskiego na twój język oraz z twojego języka na chiński. Zamknięto cię w pokoju, do którego dostarczane są pytania po chińsku. Posługując się tylko wspomnianymi regułami, udzielasz odpowiedzi. Czy oznacza to, że **rozumiesz** język chiński?

Ten problem wiąże się zatem z pytaniem o to, jaka część naszej wiedzy ma charakter algorytmiczny.

# Koniec

Od następnego wykładu będziemy pracować z funkcjami rekurencyjnymi.

Na jednym z dalszych wykładów wspomnimy (czysto informacyjnie) o innych jeszcze matematycznych reprezentacjach pojęcia obliczalności:

- algorytmach Markowa;
- obliczalności według Herbranda – Gödla;
- rachunku lambda;
- numeracjach Kleene'go i Posta.

## Koniec



I tym wesołym akcentem możemy dzisiejsze zajęcia zakończyć.