# Czy masz wyobraźnię matematyczną?

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

PFK 2016

# Wiewiórki i humanizacja matematyki

- Każdy z nas ma wyobraźnię matematyczną.
- Ważne: w jakim zakresie i w jaki sposób z niej korzystamy.
- Nagroda: satysfakcja poznawcza, ozdrowienie ze złudzeń.

- Wykład *Zagadki* (2013–2016):
  www.logic.amu.edu.pl/index.php/Zagadki2016
- Wykład *Poznanie matematyczne* (2016/2017):
  www.logic.amu.edu.pl/index.php/Matcog
- Projekt badawczy *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne* (2016–2018):
  www.logic.amu.edu.pl/index.php/Ncn2015jp

Wykład *Matematyczne podstawy kognitywistyki* (2016/2017).

# Nauka o wzorcach

Początki matematyki biorą się z reprezentacji (wybranych aspektów) świata. Konstruowanie takich reprezentacji pozwala ujawnić występujące w nich wzorce – swoiste regularności.

Wzorce mogą być numeryczno-arytmetyczne (związane z ustalaniem stałości liczebności kolekcji), algebraiczne (związane z własnościami działań na obiektach, symetrie), porządkowe (związane z rozmieszczeniem obiektów względem danych relacji), mogą dotyczyć kształtu, przestrzeni, pozycji, odległości (konstrukcje geometryczne, topologiczne), mogą dotyczyć ruchu i zmiany (pojęcia analizy matematycznej, geometrii i topologii różniczkowej), mogą wreszcie dotyczyć samych rozumowań matematycznych (pojęcia logiki matematycznej), obliczalności (pojęcia teorii rekursji oraz różnych działów informatyki), częstości (rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna), itd.

# Nauka o rozwiązywaniu problemów

Praktyka badawcza matematyki to, przede wszystkim, dowodzenie twierdzeń, a ponadto, m.in.: uogólnianie, abstrahowanie, tworzenie pojęć, stawianie hipotez, przedstawianie nowych (lepszych, prostszych, bardziej eleganckich) dowodów już znanych twierdzeń, wyobrażanie sobie, szukanie kontrprzykładów, prowadzenie rozumowań przez analogię (prowadzących np. do rozważania nowych dziedzin matematycznych), rozpatrywanie szczególnych przypadków, klasyfikowanie, szukanie nowych aksjomatów, sięganie po motywacje płynące z nauk empirycznych, poszukiwanie nowych punktów widzenia, przeprowadzanie (niekiedy żmudnych) rachunków, myślenie przekorne, itd.

Na początku każdego z takich działań mamy do czynienia z problemem poznawczym. W jego rozwiązaniu korzystamy z dostępnych, sprawdzonych już w działaniu metod, ale także z tworzonych na nowo heurystyk.

# Kontekst odkrycia

- Dowodzenie (kontekst uzasadnienia) jest potwierdzaniem intuicji (kontekst odkrycia). Publikowany wynik matematyczny nie ukazuje kontekstu odkrycia (styl Gaussa).
- Sądzimy, że sensowna jest stratyfikacja intuicji matematycznych:
  - Proto-intuicje, związane z naszym uposażeniem poznawczym.
  - Intuicje wykształcone przez przemoc symboliczną szkoły.
  - Zaawansowane intuicje profesjonalnych matematyków.

Myślenie szybkie i wolne:

- *Butelka z korkiem*.
- *Sznurek dookoła Ziemi*.
- *Wędrówki niedźwiedzia*.
- *Wyścig profesorów*.

# Mrówka na linie

- Mamy doskonale (nieskończenie) elastyczną linę o długości, powiedzmy, 1km. Lina rozciąga się z jednostajną prędkością 1km/sec.
- Lewy koniec liny jest nieruchomy. Po jednej sekundzie cała lina ma zatem 2km długości, po dwóch sekundach 3km długości, itd.
- Z lewego końca liny startuje mała mrówka, poruszając się wzdłuż liny ze stałą prędkością (względem samej liny), powiedzmy, 1cm/sec.

- Czy mrówka dotrze do prawego końca liny w skończonym czasie, czy też będzie dreptała w nieskończoność, nigdy nie docierając do prawego końca liny? Metaforycznie: czy mrówka skazana jest na koszmar nieśmiertelności czy też żyje (=drepcze) od naturalnego poczęcia do naturalnego końca?
- Uwaga: rozważamy problem *matematyczny* (pomijamy liczne realia).

# Mrówka, musisz!

***Jaką część długości całej liny przebywa mrówka w każdej kolejnej sekundzie?***

| W ciągu sekundy | mrówka pokonuje | część całej długości |
|---|---|---|
| pierwszej | 1cm z 1km | $\frac{1}{100000}$ |
| drugiej | 1cm z 2km | $\frac{1}{200000}$ |
| trzeciej | 1cm z 3km | $\frac{1}{300000}$ |
| $n$-tej | 1cm z $n$km | $\frac{1}{n \cdot 100000}$ |

- Czy istnieje liczba $n$ taka, że suma tych części: $\frac{1}{100000} + \frac{1}{200000} + \frac{1}{300000} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 100000}$ osiągnie lub przewyższy 1, czyli całą długość liny?
- Szukamy $n$ takiej, dla której: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant 100000$.

# Brawo, mrówka!

- Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest ***rozbieżny*** (choć bardzo leniwie). Mamy bowiem:
  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots >$
  $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots =$
  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$
- Istnieje zatem $n$ taka, że $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant 100000$.
- Mrówka dojdzie do prawego końca liny w skończonym czasie!

- *Liczby harmoniczne*: $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Stała Eulera-Mascheroniego:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = 0,5772156649501\ldots$$

Czy istnieje szereg *najwolniej rozbieżny*?

# Nadciąga Ciemność

Ogólne rozwiązanie problemu otrzymujemy całkując stosowne równanie różniczkowe. Warto jednak zauważyć, że konkluzję uzyskaliśmy wykonując jedynie działania na ułamkach.

- Dla przyjętych danych, mrówka osiągnie prawy koniec liny w czasie ok. $2.8 \times 10^{43429}$ sekund. Wiek Wszechświata szacuje się na $4 \times 10^{17}$ sekund.
- Przestrzeń Wszechświata rozszerza się. Prędkość światła pozostaje stała. Jednak owo rozszerzanie ponoć przyspiesza. Ciemno będzie?

- *Róg Gabriela*, *jeep problem*, *maksymalny nawis*, *optymalny wybór* – przykłady wykorzystujące rozbieżność szeregu harmonicznego.
- *Spirale*, *supertasks*, *gra Smullyana* – inne igraszki z nieskończonością.

# Czekając na Leśniczego

- Czarownica złapała Jasioła i Mgłosię. Każde z nich ma w odosobnieniu rzucić monetą i podać wynik rzutu drugiego. Jeśli oboje pomylą się, zostaną pożarci. Jeśli co najmniej jedno odgadnie wynik drugiego, przeżyją dany dzień. Jasiołowi udało się szepnąć Mgłosi, co powinni mówić, aby odwlekać pożarcie. Jaką strategię zaproponował?

- *Konkurs piękności*. Każda z grupy osób ma wybrać w sekrecie liczbę od 0 do 20. Wygrają te osoby, których liczba jest najbliższa dwóch trzecich średniej arytmetycznej wszystkich podanych liczb. Kto wygra?
- *Dzielenie łupów*. Piraci $A$, $B$, $C$ dzielą łup 100 sztuk złota. Proponują podział w porządku swojej rangi ($A > B > C$). Jeśli propozycja nie zostaje przyjęta większością głosów, jej autor ląduje za burtą (i proponuje następny rangą, głos ważniejszego decyduje). Jak podzielą się łupem (ceniąc własne życie bardziej od złota)?

# Głodna czarownica, przekora, przekupstwo

Mgłosia ma podać swój wynik (jako wynik Jasioła), a Jasioł wynik odwrotny do swojego (jako wynik Mgłosi):

| Wynik M: | Wynik J: | M mówi: | J mówi: | Trafia: |
|---|---|---|---|---|
| O | O | O | R | M |
| R | R | R | O | M |
| R | O | R | R | J |
| O | R | O | O | J |

- *Konkurs piękności*. Jeśli wszyscy wybiorą tę samą liczbę, to wszyscy wygrywają. A co pokazały eksperymenty?
- *Dzielenie łupów*. $A$ powinien pozyskać głos $C$ (powstrzymajmy się od komentarza politycznego).

# Łyżwiarki i parasole

- *Mucha i kropla miodu*. Mucha na zewnątrz powierzchni bocznej szklanki, kropla miodu wewnątrz. Podaj najkrótszą drogę dreptania muchy do kropli.
- *System dróg*. Czy cztery miasta leżące w wierzchołkach kwadratu można połączyć siecią dróg o sumie długości mniejszej od podwojonej długości przekątnej kwadratu?
- *Obłe otoczaki*. Nazwijmy *średniczką* figury mającej środek symetrii dowolny odcinek łączący jej brzegi, przechodzący przez ów środek symetrii. Czy figura o wszystkich średniczkach równych jest kołem?
- *Ósemki na płaszczyźnie*. Ile rozłącznych ósemek narysować można na płaszczyźnie?
- *Paradoks Bertranda*. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

# Niekonwencjonalni cykliści

- *Mucha i kropla miodu*. Rozwijamy powierzchnię boczną walca i korzystamy z twierdzenia Herona.
- *System dróg*. Zob. *drzewo Steinera*.
- *Obłe otoczaki*. Niekoniecznie: zob. *wielokąty Reuleaux*. Konstrukcja *trójkąta Reuleaux*: z wierzchołków trójkąta równobocznego zakreśl łuki o promieniu równym długości boku trójkąta.

- *Ósemki na płaszczyźnie*. Każdej ósemce przyporządkujmy parę punktów o obu współrzędnych wymiernych, po jednym takim punkcie wewnątrz każdej z pętli tej ósemki. Wtedy żadne dwie ósemki nie mogą mieć wspólnej takiej pary punktów. Par liczb wymiernych jest przeliczalnie wiele.
- *Paradoks Bertranda*. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{4}$, w zależności od wybranej miary (czyli ustalenia przestrzeni probabilistycznej).

# Erro ergo disco

- Większość błędów pozostaje ukryta.
- Nie jest możliwe podanie kompletnego katalogu możliwych błędów.
- Sławne błędy matematyczne przyczyniają się do rozwoju matematyki.

- Błędy uczniów.
- Błędy nauczycieli.
- Fermatowcy, Goldbachiści, Trysekciarze,...
- Czy określenie *crank* jest zniesławieniem?

# Patologie oznaką zdrowia i krzepy

- Patologie znienacka atakujące.
- Patologie konstruowane specjalnie.
- Oswajanie patologii.
- Balansowanie między naturalnością a ogólnością.

- *„Dziwne" funkcje*: np. ciągłe, lecz nieróżniczkowalne w żadnym punkcie; funkcje, których wykres wypełnia kwadrat, itd.
- *Zbiór Cantora*: jest nieprzeliczalny, zwarty, doskonały, nigdziegęsty, ma zerową miarę Lebesgue'a.
- *Zbiory Vitalego*: selektory relacji $R \subseteq [0,1]^2$, $xRy \equiv x - y \in \mathbb{Q}$.
- *Zbiory Bernsteina*: podzbiory przestrzeni polskiej, które mają niepuste przecięcie z każdym nieprzeliczalnym zbiorem borelowskim oraz z dopełnieniem takiego zbioru.

# Koncepcja matematyki ucieleśnionej

- Metafory bazujące.
- Podstawowa metafora nieskończoności.
- Śmiałe stwierdzenie Lakoffa i Núñeza: wszystkie pojęcia matematyczne tworzone są poprzez konstrukcję metafor pojęciowych.

- Uważamy, że propozycje Lakoffa i Núñeza w ograniczonym zakresie tłumaczą genezę oraz funkcjonowanie matematyki: odnoszą się do matematyki prezentowanej w podręcznikach, upraszczając rekonstrukcję kontekstu odkrycia w matematyce.
- Wskazujemy na nieścisłości w ich ujęciu, błędy matematyczne i historyczne, niekompletność opisu, brak uzasadnienia niektórych stwierdzeń.

## Kreatywność a podstawa programowa

- Czy szkoła niszczy naturalną kreatywność dziecka?
- Trudna historia reform w dydaktyce matematyki.

- Brak rudymentarnych kompetencji matematycznych jako choroba społeczna.
- Czy możliwa jest *terapia matematyczna dorosłych*?

# Kilka odnośników


- Davis, J.P., Hersh, R. 1994. *Świat matematyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Kahneman, D. 2012. *Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym*. Media Rodzina, Poznań.
- Lakatos, I. 1976. *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge.
- Lakoff, G., Núñez, R.E. 2000. *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books, New York.
- Polya, G. 2014. *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol.I: *Induction and Analogy in Mathematics*, Vol. II: *Patterns of Plausible Inference*. Martino Publishing, Mansfield Centre, CT.