DODATEK 4:
DOWODY NIEKTÓRYCH TWIERDZEŃ
DOTYCZĄCYCH
SYSTEMU ZAŁOŻENIOWEGO KLASYCZNEGO RACHUNKU ZDAŃ

Twierdzenie 8.1. O RÓWNOWAŻNOŚCI SYSTEMU ZAŁOŻENIOWEGO KRZ Z SYSTEMEM AKSJOMATYCZNYM KRZ.

- (1) Każda teza aksjomatycznego systemu KRZ jest tezą założeniowego systemu KRZ.
- (2) Każda teza założeniowego systemu KRZ jest tezą aksjomatycznego systemu KRZ.
- (3) Każda reguła wyprowadzalna w aksjomatycznym systemie KRZ jest też wyprowadzalna w założeniowym systemie KRZ.
- (4) Każda reguła wyprowadzalna w założeniowym systemie KRZ jest też wyprowadzalna w aksjomatycznym systemie KRZ.

DOWÓD.

(1). Trzeba najpierw pokazać, że każdy aksjomat KRZ (z zestawu podanego na wykładach 5–7) jest tezą systemu założeniowego. Potraktujmy to jako proste ćwiczenie dla słuchaczy. Zauważmy, że każdy aksjomat ma postać implikacji (a więc łatwo rozpocząć dowód założeniowy) oraz że niektóre aksjomaty są bezpośrednimi konsekwencjami reguł pierwotnych systemu założeniowego.

Ponieważ reguła odrywania RO jest jedną z reguł pierwotnych systemu założeniowego, więc, skoro aksjomaty KRZ są tezami systemu założeniowego, to również każda teza systemu aksjomatycznego KRZ jest tezą systemu założeniowego KRZ.

(2). Dla dowodu, że każda teza systemu założeniowego KRZ jest też tezą systemu aksjomatycznego KRZ zauważmy, że dla dowolnego zbioru formuł X, zbiór $C_{krz}(X)$ jest domknięty na każdą regułę pierwotną systemu założeniowego.

Wynika stąd, że dla dowolnej liczby k:

$$(\dagger) \quad \text{Jeśli } \alpha \in C^k_{jas}(\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}), \text{ to } \alpha \in C_{krz}(\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}).$$

Przez indukcję po n, wykorzystując $(\dagger)$ oraz twierdzenie o dedukcji wprost, pokazać można, że:

$$(\ddagger) \quad \text{Jeśli } \alpha \in T^n_{jas}, \text{ to } \alpha \in C_{krz}(Ax).$$

Dowód punktu (2) otrzymujemy z $(\ddagger)$ oraz definicji tezy systemu założeniowego.

(3). Dowód jest natychmiastowy, na mocy faktu, że reguła odrywania RO jest jedną z reguł pierwotnych systemu założeniowego.

(4). Dla dowodu, wystarczy pokazać, że wszystkie reguły pierwotne systemu założeniowego są wyprowadzalne w systemie aksjomatycznym KRZ. Również to pozostawiamy jako nietrudne ćwiczenie dla słuchaczy.

Wniosek 8.1. Dla dowolnych zbiorów formuł X, Y, Z oraz dowolnej formuły α zachodzą następujące warunki:

- (1) $\vdash_{jas}$ jest zwrotna: $X \vdash_{jas} X$
- (2) $\vdash_{jas}$ jest przechodnia: jeśli $X \vdash_{jas} Y$ oraz $Y \vdash_{jas} Z$, to $X \vdash_{jas} Z$
- (3) $\vdash_{jas}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu:
  jeśli $X \vdash_{jas} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \vdash_{jas} Y$
- (4) $\vdash_{jas}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu:
  jeśli $X \vdash_{jas} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \vdash_{jas} Z$.

DOWÓD. Są to bezpośrednie wnioski z twierdzenia 8.1., które m.in. ustala równość: $\vdash_{krz} = \vdash_{jas}$.

Twierdzenie 8.2. O TRAFNOŚCI SYSTEMU ZAŁOŻENIOWEGO KRZ.

Każda teza systemu założeniowego KRZ jest tautologią KRZ.

DOWÓD. Twierdzenie jest natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 8.1. oraz twierdzenia o trafności systemu aksjomatycznego KRZ.

Twierdzenie 8.3. O PEŁNOŚCI SYSTEMU ZAŁOŻENIOWEGO KRZ.

Każda tautologia KRZ jest tezą systemu założeniowego KRZ.

DOWÓD. Twierdzenie jest natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 8.1. oraz twierdzenia o pełności systemu aksjomatycznego KRZ.

Twierdzenie 8.4. TWIERDZENIE O DEDUKCJI NIE WPROST.

Jeśli $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{jas} \{\gamma, \neg\gamma\}$, to $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$.

DOWÓD. Skorzystamy z dowodu silniejszego twierdzenia, udowodnionego przez Stanisława Surmę w artykule TWIERDZENIA O DEDUKCJI NIEWPROST, opublikowanym w 1967 roku w tomie **XX** *Studia Logica* (151–166). Surma pokazuje mianowicie, że twierdzenie o dedukcji nie wprost jest równoważne aksjomatyce klasycznego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań, tj. rachunku opartego na aksjomatach:

- (a_1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- (a_2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- (a_3) $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha)$.

Sprawdzenie, że powyższe formuły są tezami systemu założeniowego, niech będzie kolejnym (nietrudnym) ćwiczeniem dla słuchaczy.

Skorzystamy również z twierdzenia udowodnionego już przez Stanisława Jaśkowskiego (ON THE RULES OF SUPPOSITIONS IN FORMAL LOGIC, Warszawa, 1934), a głoszącego, że twierdzenie o dedukcji wprost jest równoważne formułom (a_1) i (a_2).

Przechodzimy do dowodu twierdzenia 8.4. Załóżmy, że:

$$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{jas} \{\gamma, \neg\gamma\}.$$

Na mocy powyższego wyniku Jaśkowskiego, możemy korzystać z twierdzenia o dedukcji wprost. Mamy zatem:

- $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \neg\alpha \rightarrow \gamma$
- $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \neg\alpha \rightarrow \neg\gamma$.

Stąd oraz z założenia (a_3) (w którym dokonujemy podstawienia: $\beta/\gamma\ \gamma/\alpha$) otrzymujemy: $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$. To kończy dowód 8.4.

Twierdzenie 8.5. TWIERDZENIE O ZWARTOŚCI.

Zbiór X formuł języka KRZ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien jego skończony podzbiór jest sprzeczny.

DOWÓD. Ponieważ dowolny nadzbiór zbioru sprzecznego jest sprzeczny, więc implikacja $\Leftarrow$ jest oczywista. Dowód implikacji $\Rightarrow$ wykorzystuje finitystyczność operatora C_{jas}.

Twierdzenie o zwartości zachodzi oczywiście również dla aksjomatycznego ujęcia KRZ.

* * *

UWAGA. Podane wyżej dowody są jedynie szkicami, zawierającymi duże uproszczenia. Precyzyjne dowody, uwzględniające własności reguły podstawiania, znaleźć można np. w cytowanej na wykładzie monografii W.A. Pogorzelskiego.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl