Logika Matematyczna

I rok Językoznawstwa i Informacji Naukowej UAM

Egzamin pisemny 12 czerwca 2004

Imię i nazwisko: .... Humanistki z Powołania

Zadanie 1. Przypuśćmy, że w formule α klasycznego rachunku zdań występuje siedem miliardów różnych zmiennych zdaniowych. Zbadaj, czy jest tautologią czy kontrtautologią tego rachunku następująca formuła:

$$(\bigstar) \quad \neg(((((\alpha) \wedge (\alpha)) \vee (\alpha)) \rightarrow (\alpha)) \equiv (\alpha)).$$

A. Rozwiązanie metodą wprost.

Wystarczy sprawdzić, jaka jest wartość formuły ($\bigstar$) dla dwóch przypadków: gdy wartość α jest równa 0 oraz gdy wartość α jest równa 1. Ale ***uwaga***: nie wiemy, jaka jest budowa składniowa formuły α. Formuła ta może być:

1. tautologią;
2. kontrtautologią;
3. ani tautologią, ani kontrtautologią.

Rozważmy najpierw przypadek 3, tj. przypuśćmy, że α może dla pewnych wartościowań zmiennych zdaniowych mieć wartość 0, a przy pewnych innych mieć wartość 1:[1]

$$\neg((((0 \wedge 0) \vee 0) \rightarrow 0) \equiv 0) = \neg(((0 \vee 0) \rightarrow 0) \equiv 0) = \neg((0 \rightarrow 0) \equiv 0) = \neg(1 \equiv 0) = \neg 0 = 1$$

A zatem, gdy α ma wartość 0, to formuła ($\bigstar$) ma wartość 1.

$$\neg((((1 \wedge 1) \vee 1) \rightarrow 1) \equiv 1) = \neg(((1 \vee 1) \rightarrow 1) \equiv 1) = \neg((1 \rightarrow 1) \equiv 1) = \neg(1 \equiv 1) = \neg 1 = 0$$

A zatem, gdy α ma wartość 1, to formuła ($\bigstar$) ma wartość 0.

Tak więc, w przypadku 3. odpowiedź jest następująca. Gdy α nie jest ani tautologią ani kontrtautologią, to:

- ponieważ formuła ($\bigstar$) ma przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 1, więc nie jest kontrtautologią;
- ponieważ formuła ($\bigstar$) ma przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 0, więc nie jest tautologią.

W przypadku 1, a więc gdy α jest tautologią (tj. α ma wartość 1 przy ***każdym*** wartościowaniu zmiennych zdaniowych), to wartość formuły ($\bigstar$) równa jest 0, jak pokazaliśmy wyżej. Zatem wtedy ($\bigstar$) nie jest tautologią. Nadto, ponieważ wykluczone jest aby α miała wartość 0 przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych zdaniowych, więc formuła ($\bigstar$) nie może mieć wartości 1. Stąd, w przypadku 1 formuła ($\bigstar$) jest kontrtautologią.

W przypadku 2, a więc gdy α jest kontrtautologią (tj. α ma wartość 0 przy ***każdym*** wartościowaniu zmiennych zdaniowych), to wartość formuły ($\bigstar$) równa jest 1, jak pokazaliśmy wyżej. Zatem wtedy ($\bigstar$)

[1] Stosowany tu uproszczony zapis powinien być jasny: w miejsce (α) wstawiamy 0 bądź 1 i wykonujemy rachunki wedle zaleceń z tablic dla spójników prawdziwościowych. Oczywiście, powinniśmy zamiast $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ oraz $\equiv$ używać stosownych ***funkcji prawdziwościowych***, określonych na zbiorze $\{0, 1\}$ i o wartościach w tymże zbiorze. Czytelniczki zechcą wybaczyć to uproszczenie. Przy okazji: czy jasne jest, dlaczego formułę α umieszczamy tu wszędzie w nawiasach? Odpowiedzi szukaj w definicji indukcyjnej formuł języka rachunku zdań, np. w zalecanym w dydaktyce w IJ UAM podręczniku Tadeusza Batoga *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2003[4], którego kilkadziesiąt egzemplarzy dostępnych jest w Bibliotece Instytutu.

nie jest kontrtautologią. Nadto, ponieważ wykluczone jest aby α miała wartość 1 przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych zdaniowych, więc formuła ($\bigstar$) nie może mieć wartości 0. Stąd, w przypadku 2 formuła ($\bigstar$) jest tautologią.

Podsumujmy:

- gdy α jest tautologią, to ($\bigstar$) jest kontrtautologią;
- gdy α jest kontrtautologią, to ($\bigstar$) jest tautologią;
- gdy α nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią, to ($\bigstar$) również nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią.

B. Rozwiązanie metodą nie wprost.

W tym akurat przypadku skrócona metoda $0-1$ nie jest zalecana, ponieważ formuła ($\bigstar$) jest zanegowaną równoważnością i na samym początku rozważań musiałabyś brać pod uwagę dwa przypadki. Ale możesz zastosować metodę drzew semantycznych. Tak jak w punkcie ***A.*** powyżej, istotne będzie odróżnienie trzech przypadków:

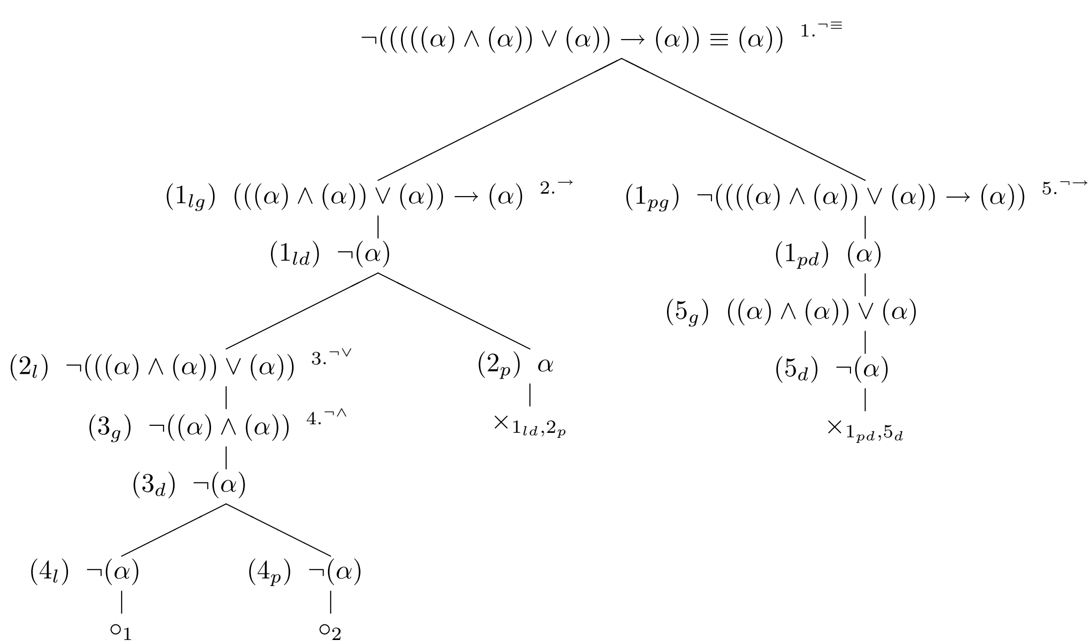
1. α jest tautologią;
2. α jest kontrtautologią;
3. α nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią.

Najpierw jednak zbudujmy drzewa semantyczne potrzebne do uzyskania odpowiedzi na pytanie postawione w zadaniu.

Przypuśćmy, że

$$(\bigstar) \quad \neg(((((\alpha) \wedge (\alpha)) \vee (\alpha)) \to (\alpha)) \equiv (\alpha))$$

ma przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 1. Budujemy drzewo semantyczne tej formuły:



Nie została wykluczona sytuacja, że formuła ($\bigstar$) jest prawdziwa. Drzewo ma dwie gałęzie otwarte i na każdej z nich mamy formułę $\neg(\alpha)$. Zatem, formuła ($\bigstar$) jest prawdziwa przy takich wartościowaniach zmiennych zdaniowych, przy których $\neg(\alpha)$ jest prawdziwa, czyli α jest fałszywa.

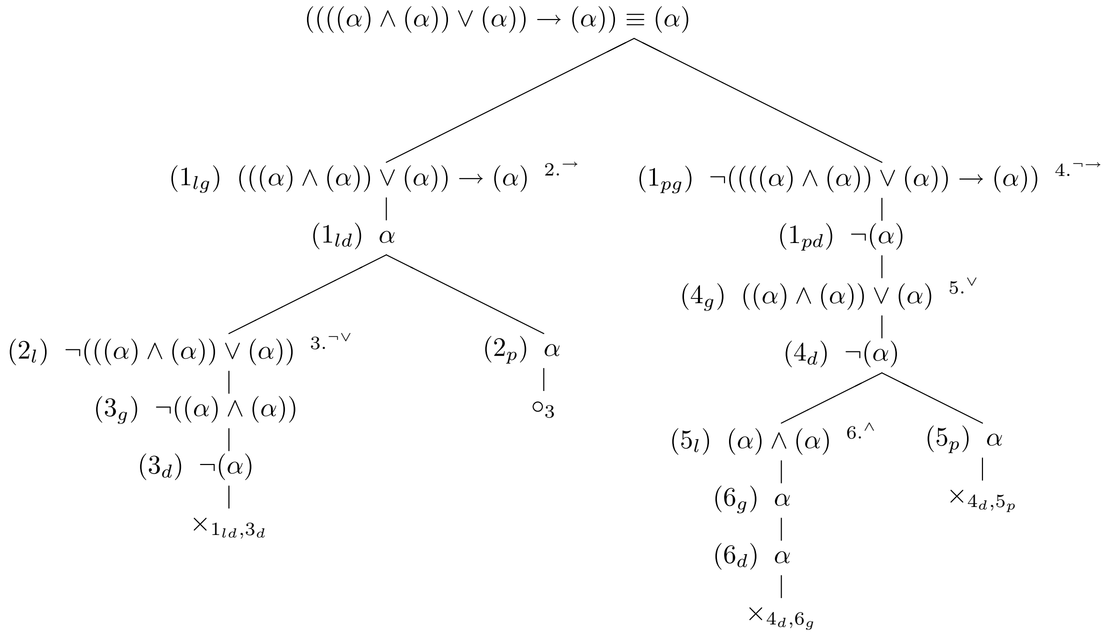
Przypuśćmy z kolei, że

$$(\bigstar) \quad \neg(((((\alpha) \wedge (\alpha)) \vee (\alpha)) \to (\alpha)) \equiv (\alpha))$$

ma przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 0. Wtedy równoważność

$$(\bigstar\bigstar) \quad (((\alpha) \wedge (\alpha)) \vee (\alpha)) \to (\alpha)) \equiv (\alpha)$$

ma (przy tymże wartościowaniu zmiennych zdaniowych) wartość 1. Budujemy drzewo semantyczne formuły $(\bigstar\bigstar)$:



Nie została wykluczona sytuacja, że formuła $(\bigstar\bigstar)$ jest prawdziwa, czyli że formuła $(\bigstar)$ jest fałszywa. Drzewo semantyczne formuły $(\bigstar\bigstar)$ ma gałąź otwartą na której mamy formułę α. Zatem, formuła $(\bigstar\bigstar)$ jest prawdziwa przy takich wartościowaniach zmiennych zdaniowych, przy których α jest prawdziwa. Oznacza to, że formuła $(\bigstar)$ jest fałszywa przy takich wartościowaniach zmiennych zdaniowych, przy których α jest prawdziwa.

Pokazaliśmy zatem, że: jeśli α nie jest ani tautologią ani kontrtautologią (przypadek 3), to również $(\bigstar)$ nie jest ani tautologią ani kontrtautologią, ponieważ drzewa semantyczne dla formuł $(\bigstar)$ oraz $(\bigstar\bigstar)$ mają gałęzie otwarte. Dla każdego wartościowania, dla którego formuła α jest prawdziwa, formuła $(\bigstar)$ jest fałszywa. Dla każdego wartościowania, dla którego formuła $\neg(\alpha)$ jest prawdziwa (czyli α jest fałszywa), formuła $(\bigstar)$ jest prawdziwa.

W przypadku 1, jeśli α jest tautologią (formułą prawdziwą przy ***każdym*** wartościowaniu zmiennych zdaniowych), to gałęzie w drzewie semantycznym formuły $(\bigstar)$ zakończone liśćmi $\circ_1$ oraz $\circ_2$ ***trzeba*** zamknąć, ponieważ ***nie istnieje*** wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym znajdująca się na tych gałęziach formuła $\neg(\alpha)$ byłaby prawdziwa. Wtedy drzewo semantyczne dla formuły $(\bigstar)$ ma wszystkie gałęzie zamknięte, a to oznacza, że formuła $(\bigstar)$ nie jest prawdziwa przy żadnym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, czyli jest kontrtautologią.

W przypadku 2, jeśli α jest kontrtautologią (formułą fałszywą przy ***każdym*** wartościowaniu zmiennych zdaniowych), to gałąź w drzewie semantycznym formuły $(\bigstar\bigstar)$ zakończoną liściem $\circ_3$ ***trzeba*** zamknąć, ponieważ ***nie istnieje*** wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym znajdująca się na tej gałęzi formuła α byłaby prawdziwa. Wtedy drzewo semantyczne dla formuły $(\bigstar\bigstar)$ ma wszystkie gałęzie zamknięte, a to oznacza, że formuła $(\bigstar\bigstar)$ nie jest prawdziwa przy żadnym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, czyli jest kontrtautologią. Ponieważ $(\bigstar\bigstar)$ jest semantycznie równoważna negacji formuły $(\bigstar)$, więc $(\bigstar)$ jest w tym przypadku tautologią.

Podsumujmy:

- gdy α jest tautologią, to ($\bigstar$) jest kontrtautologią;
- gdy α jest kontrtautologią, to ($\bigstar$) jest tautologią;
- gdy α nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią, to ($\bigstar$) również nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią.

Zadanie 2. Przypuśćmy, że ***fałszywe*** są zdania: *Nie wszystkie Pierzaste są Myszaste. Wśród Myszastych są Ogoniaste. Nie ma Ogoniastych.*

Co ***prawdziwie*** można wtedy powiedzieć o związkach między Ogoniastymi a Pierzastymi?

Rozwiązanie.

Są różne metody rozwiązania tego zadania. Wykorzystamy tę, którą podawano na wykładzie: metodę diagramów Venna.

Oznaczmy:

M — zbiór wszystkich Myszastych;

P — zbiór wszystkich Pierzastych;

O — zbiór wszystkich Ogoniastych.

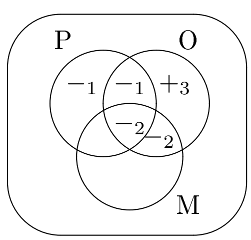
Wiemy, że ***fałszywe*** są zdania:

$$P - M \neq \emptyset$$
$$M \cap O \neq \emptyset$$
$$O = \emptyset$$

Zatem ***prawdziwe*** są zdania:

$$1)\quad P - M = \emptyset$$
$$2)\quad M \cap O = \emptyset$$
$$3)\quad O \neq \emptyset$$

Na diagramie Venna dla zbiorów P, O oraz M zaznaczamy, które obszary są ***puste*** (stawiając w takim obszarze znak „$-$"), a które ***niepuste*** (stawiając w takich obszarach znak „$+$"); indeksy wskazują, na podstawie którego z powyższych zdań umieszczono daną informację:



Z rysunku możemy odczytać, co da się prawdziwie powiedzieć o zależnościach między zakresami nazw *Pierzaste* oraz *Ogoniaste*. Widać mianowicie, że:

- Żaden Pierzasty nie jest Ogoniasty.
- Są Ogoniaste, które nie są Pierzaste.

Zadanie 3. Zbadaj, czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł klasycznego rachunku zdań:

$$\{\ (p \to q) \to r,\ \neg(r \vee s),\ (p \to q) \vee t,\ t \to (r \vee q)\ \}.$$

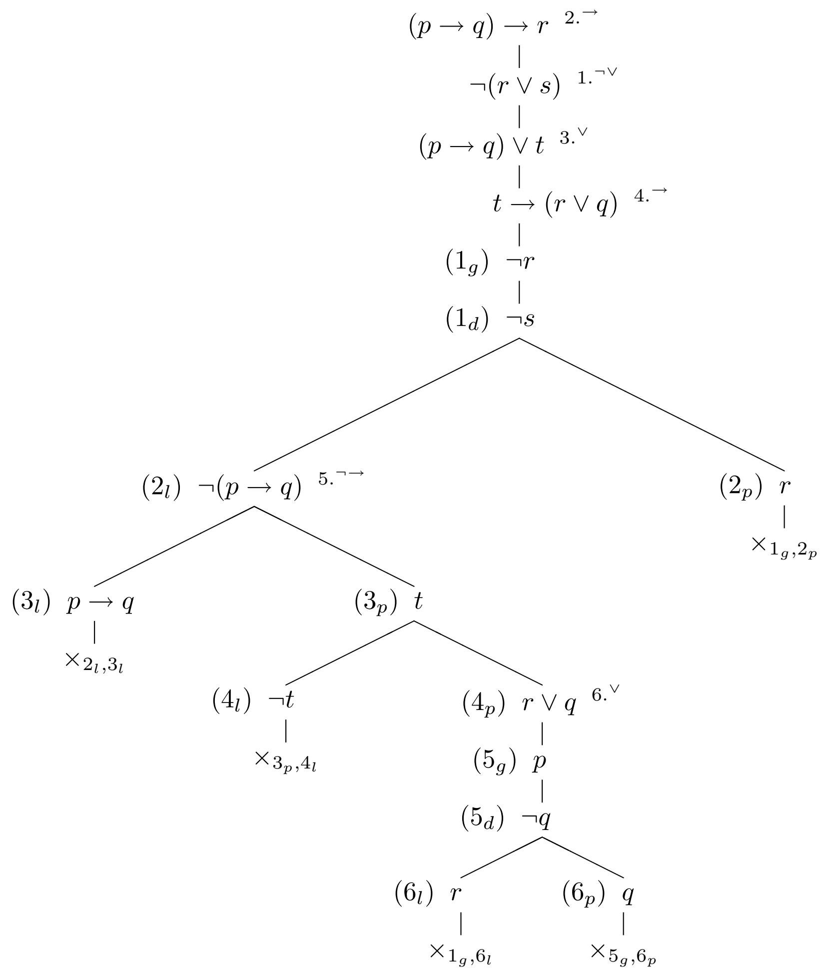
Ułóż poprawny gramatycznie tekst w języku polskim złożony ze zdań o podanych wyżej schematach.

Rozwiązanie.

Przypomnijmy: zbiór X formuł języka rachunku zdań jest ***semantycznie sprzeczny*** dokładnie wtedy, gdy nie istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych przy którym wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1. W przeciwnym przypadku, tj. gdy przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1, mówimy że X jest ***semantycznie niesprzeczny***. Zatem skończony zbiór X jest semantycznie sprzeczny dokładnie wtedy, gdy koniunkcja wszystkich należących doń formuł jest kontrtautologią rachunku zdań. Ustalanie metodą wprost, czy dany skończony zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny sprowadza się więc do sprawdzania, czy koniunkcja wszystkich jego elementów jest fałszywa przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych. W rozważanym tu przypadku trzeba byłoby zbudować tabelkę o 32 wierszach oraz 15 kolumnach, tj. 480 miejsc wypełnić wartościami logicznymi dla rozstrzygnięcia postawionego pytania. Metody nie wprost dają odpowiedź szybciej i jedną z takich metod posłużymy się w rozwiązaniu tego zadania. Zbudujemy mianowicie drzewo semantyczne, w którego pniu umieścimy wszystkie rozważane formuły. Odpowiada to przypuszczeniu, iż wszystkie te formuły są prawdziwe przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Możliwe są dokładnie dwie sytuacje:

- ***drzewo ma wszystkie gałęzie zamknięte***; wtedy wykluczona zostaje możliwość, aby formuły z pnia drzewa były prawdziwe przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych zdaniowych, czyli zbiór tych formuł jest ***semantycznie sprzeczny***;
- ***drzewo ma co najmniej jedną gałąź otwartą***; wtedy wszystkie formuły z pnia drzewa są prawdziwe przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych (które odczytać można z informacji zawartych na gałęzi otwartej), czyli zbiór tych formuł jest ***semantycznie niesprzeczny***.

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy podane formuły:



Wszystkie gałęzie tego drzewa semantycznego są zamknięte. Zatem nie istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych przy którym wszystkie formuły z pnia drzewa byłyby prawdziwe — tworzą one zbiór ***semantycznie sprzeczny***.

Z wykładu lub z podręcznika wiesz, jak odczytywać w języku polskim spójniki logiczne. Wystarczy teraz wstawić za zmienne zdaniowe jakiekolwiek zdania polskie i otrzymać zwięzły, semantycznie sprzeczny, absolutnie nikomu niepotrzebny tekst. Podstawmy np.:

p — Grzmi.

q — Błyska.

r — Pada.

s — Jest zimno.

t — Wieje.

Odczytaj sama otrzymany tekst, proszę. Życzę udanych wakacji.

Zadanie 4. Zbadaj formalne własności relacji R określonej następująco dla dowolnych zbiorów:

$$ARB \;\equiv\; \forall x\, ((x \in A \lor x \in B) \to (x \in A \land x \in B)).$$

Rozwiązanie.

Najpierw pokażemy, że R jest relacją identyczności. Mamy:

$$
\begin{aligned}
ARB &\equiv \forall x\, ((x \in A \vee x \in B) \to (x \in A \wedge x \in B)) \\
&\equiv \forall x\, (x \in A \cup B \to x \in A \cap B) \\
&\equiv A \cup B \subseteq A \cap B.
\end{aligned}
$$

Z ostatniej inkluzji mamy: $A \subseteq A \cap B$ (bo oczywiście $A \subseteq A \cup B$). Podobnie, $B \subseteq A \cap B$. Ale $A \cap B \subseteq A$ oraz $A \cap B \subseteq B$, dla dowolnych zbiorów A oraz B. Stąd $A = A \cap B$ oraz $B = A \cap B$, a zatem $A = B$.

Skoro R jest relacją identyczności, to ma wszystkie własności, które ma identyczność. A zatem R jest:

- zwrotna;
- symetryczna;
- przechodnia.

Nadto, R nie jest spójna (bo nie jest tak, że dla dowolnych ***nieidentycznych*** zbiorów A oraz B mielibyśmy $A = B$ lub $B = A$). Poza tym, R jest antysymetryczna: jeśli $A = B$ oraz $B = A$, to $A = B$.

Zadanie 5. Zbadaj, czy jest tautologią klasycznego rachunku predykatów:

$$(\maltese) \quad \neg((\exists x \forall y\, xPy) \wedge \neg \exists z\, zPz).$$

Napisz poprawną gramatycznie polszczyzną zdanie zbudowane według powyższego schematu przy następującej interpretacji predykatu P w zbiorze obywateli i obywatelek Rzeczpospolitej Polskiej:

$x_1 P x_2 \equiv x_1$ oszukuje x_2.

Jeśli uważasz się już za Humanist(k)ę, to bądź łaskaw(a) zastanowić się, jak najlepiej stylistycznie wyrazić to zdanie.

Rozwiązanie.

Z wykładu (oraz z ewentualnych lektur; nie było zakazu czytania) wiesz, że rachunek predykatów jest, m.in.: ***niesprzeczny*** (tj. z aksjomatów tego rachunku nie można udowodnić pary formuł wzajem sprzecznych), ***pełny*** (tj. tezy tego rachunku są dokładnie tautologiami tego rachunku) oraz ***półrozstrzygalny*** (tj., jeśli jakaś formuła jest tautologią tego rachunku, to istnieje dowód tego faktu, tzn. w skończonej liczbie obliczalnych kroków można fakt ten potwierdzić — np. używając metody drzew semantycznych). Wiesz nadto, że rachunek predykatów ***nie jest rozstrzygalny***: nie istnieje algorytm, który pozwoliłby o dowolnej formule języka tego rachunku rozstrzygać, czy jest ona, czy też nie jest tautologią tego rachunku). Możesz zatem podejrzewać Pogonowskiego o jakieś minimum uczciwości (nie wspominając o dobrych obyczajach akademickich i przytomności umysłu Pogonowskiego): skoro zadał takie pytanie, to zapewne można na nie udzielić odpowiedzi.

Ogół tautologii (lub, co na jedno wychodzi, tez) rachunku predykatów charakteryzować można za pomocą różnorakich środków dowodowych. Na wykładzie wspomniano, że należą do nich, m.in.:

- metoda aksjomatyczna;
- metoda dowodów założeniowych;
- rachunki sekwentów;
- metoda wykorzystująca regułę rezolucji;
- metoda drzew semantycznych.

Ostatnią z wymienionych metod pobieżnie omówiono na wykładzie. Użyjemy jej w rozwiązaniu tego zadania.

Najpierw jednak zauważmy, że formuła ($\maltese$) jest semantycznie równoważna prostszej (bo zawierającej mniej stałych logicznych) formule ($\circledast$):

$$(\circledast) \quad \exists x \forall y\, xPy \to \exists z\, zPz.$$

Jest tak na mocy znanego prawa rachunku zdań:

$$(\neg(p \wedge \neg q)) \equiv (p \rightarrow q).$$

Pokażemy, że formuła $(\circledast)$ jest tautologią rachunku predykatów; oczywiście wtedy automatycznie także formuła (✠) jest tautologią tego rachunku.

Żeby pokazać, iż $(\circledast)$ jest tautologią trzeba wykluczyć istnienie interpretacji, w której $(\circledast)$ byłaby fałszywa. Inaczej mówiąc, trzeba wykluczyć istnienie interpretacji, w której negacja formuły $(\circledast)$ byłaby prawdziwa.

Drzewo semantyczne negacji formuły $(\circledast)$ ma postać następującą:

$$\begin{array}{rc}
 & \neg(\exists x \forall y\, xPy \rightarrow \exists z\, zPz)\ ^{1.\neg\rightarrow} \\
 & | \\
(1_g) & \exists x \forall y\, xPy\ ^{2.\checkmark a} \\
 & | \\
(1_d) & \neg \exists z\, zPz\ ^{3.\star a} \\
 & | \\
(2) & \forall y\, aPy\ ^{4.\star a} \\
 & | \\
(3) & \neg aPa \\
 & | \\
(4) & aPa \\
 & | \\
 & \times_{3,4}
\end{array}$$

Wszystkie (tu: jedyna) gałęzie tego drzewa semantycznego są zamknięte. Zatem negacja formuły $(\circledast)$ nie jest prawdziwa w żadnej interpretacji, a to oznacza, że formuła $(\circledast)$ (a więc także równoważna jej semantycznie formuła (✠)) jest prawdziwa we wszystkich interpretacjach, czyli ***jest tautologią*** rachunku predykatów.

Odczytanie formuły $(\circledast)$ przy interpretacji predykatu P podanej w zadaniu jest nietrudne. Można $(\circledast)$ odczytać w tej interpretacji np. tak:

Jeśli ktoś oszukuje wszystkich, to ktoś sam siebie oszukuje.

Porada dnia. Spróbuj namówić koleżankę (kolegę), która (który) wydaje ci się atrakcyjna (atrakcyjny) do wspólnego przedyskutowania problemów syntaktycznych (a może nawet semantycznych) dotyczących anafory oraz kwantyfikacji. Kto wie, może wyniknie z tego coś ciekawego. Oczywiście, wykluczone jest oszukiwanie.

Natomiast odczytanie formuły (✠) przy tejże interpretacji predykatu P jest, wydaje się, mniej naturalne. Wniosek: czasami prawa logiki przynieść mogą pożytki stylistyczne.

Do zdania egzaminu wystarcza poprawne rozwiązanie co najmniej trzech zadań. Pisz i rysuj wyraźnie. Nie przemilczaj przyjmowanych założeń i czynionych przypuszczeń. Odpowiedzi uzasadniaj.

Zakres egzaminu nie wykracza poza standardy Unii Europejskiej.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Logika Matematyczna

I rok Językoznawstwa i Informacji Naukowej UAM

Egzamin pisemny 12 czerwca 2004

Imię i nazwisko: .... Humanistki z Przekonania

Zadanie 1. Przypuśćmy, że w formule β klasycznego rachunku zdań występuje tyle różnych zmiennych zdaniowych, ile jest liczb pierwszych mniejszych od 10^{999}. Zbadaj, czy jest tautologią czy kontrtautologią tego rachunku następująca formuła:

$$(\bigstar) \quad \neg(((((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta)) \rightarrow (\beta)) \vee (\beta)).$$

A. Rozwiązanie metodą wprost.

Wystarczy sprawdzić, jaka jest wartość formuły $(\bigstar)$ dla dwóch przypadków: gdy wartość β jest równa 0 oraz gdy wartość β jest równa 1. Ale ***uwaga***: nie wiemy, jaka jest budowa składniowa formuły β. Formuła ta może być:

1. tautologią;
2. kontrtautologią;
3. ani tautologią, ani kontrtautologią.

Rozważmy najpierw przypadek 3, tj. przypuśćmy, że β może dla pewnych wartościowań zmiennych zdaniowych mieć wartość 0, a przy pewnych innych mieć wartość 1:[2]

$$\neg((((0 \wedge 0) \equiv 0) \rightarrow 0) \vee 0) = \neg(((0 \equiv 0) \rightarrow 0) \vee 0) = \neg((1 \rightarrow 0) \vee 0) = \neg(0 \vee 0) = \neg 0 = 1.$$

A zatem, gdy β ma wartość 0, to formuła $(\bigstar)$ ma wartość 1.

$$\neg((((1 \wedge 1) \equiv 1) \rightarrow 1) \vee 1) = \neg(((1 \equiv 1) \rightarrow 1) \vee 1) = \neg((1 \rightarrow 1) \vee 1) = \neg(1 \vee 1) = \neg 1 = 0.$$

A zatem, gdy β ma wartość 1, to formuła $(\bigstar)$ ma wartość 0.

Tak więc, w przypadku 3. odpowiedź jest następująca. Gdy β nie jest ani tautologią ani kontrtautologią, to:

- ponieważ formuła $(\bigstar)$ ma przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 1, więc nie jest kontrtautologią;
- ponieważ formuła $(\bigstar)$ ma przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 0, więc nie jest tautologią.

W przypadku 1, a więc gdy β jest tautologią (tj. β ma wartość 1 przy ***każdym*** wartościowaniu zmiennych zdaniowych), to wartość formuły $(\bigstar)$ równa jest 0, jak pokazaliśmy wyżej. Zatem wtedy $(\bigstar)$ nie jest tautologią. Nadto, ponieważ wykluczone jest aby β miała wartość 0 przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych zdaniowych, więc formuła $(\bigstar)$ nie może mieć wartości 1. Stąd, w przypadku 1 formuła $(\bigstar)$ jest kontrtautologią.

[2] Stosowany tu uproszczony zapis powinien być jasny: w miejsce (β) wstawiamy 0 bądź 1 i wykonujemy rachunki wedle zaleceń z tablic dla spójników prawdziwościowych. Oczywiście, powinniśmy zamiast $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ oraz $\equiv$ używać stosownych ***funkcji prawdziwościowych***, określonych na zbiorze $\{0, 1\}$ i o wartościach w tymże zbiorze. Czytelniczki zechcą wybaczyć to uproszczenie. Przy okazji: czy jasne jest, dlaczego formułę β umieszczamy tu wszędzie w nawiasach? Odpowiedzi szukaj w definicji indukcyjnej formuł języka rachunku zdań, np. w zalecanym w dydaktyce w IJ UAM podręczniku Tadeusza Batoga *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2003[4], którego kilkadziesiąt egzemplarzy dostępnych jest w Bibliotece Instytutu.

W przypadku 2, a więc gdy β jest kontrtautologią (tj. β ma wartość 0 przy ***każdym*** wartościowaniu zmiennych zdaniowych), to wartość formuły ($\bigstar$) równa jest 1, jak pokazaliśmy wyżej. Zatem wtedy ($\bigstar$) nie jest kontrtautologią. Nadto, ponieważ wykluczone jest aby β miała wartość 1 przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych zdaniowych, więc formuła ($\bigstar$) nie może mieć wartości 0. Stąd, w przypadku 2 formuła ($\bigstar$) jest tautologią.

Podsumujmy:

- gdy β jest tautologią, to ($\bigstar$) jest kontrtautologią;
- gdy β jest kontrtautologią, to ($\bigstar$) jest tautologią;
- gdy β nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią, to ($\bigstar$) również nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią.

B. Rozwiązanie metodą nie wprost.

W tym akurat przypadku skrócona metoda $0-1$ nie jest zalecana, ponieważ formuła ($\bigstar$) jest zanegowaną alternatywą i na samym początku rozważań musiałabyś brać pod uwagę dwa przypadki. Ale możesz zastosować metodę drzew semantycznych. Tak jak w punkcie ***A.*** powyżej, istotne będzie odróżnienie trzech przypadków:

1. β jest tautologią;
2. β jest kontrtautologią;
3. β nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią.

Najpierw jednak zbudujmy drzewa semantyczne potrzebne do uzyskania odpowiedzi na pytanie postawione w zadaniu.

Przypuśćmy, że

$$(\bigstar) \quad \neg(((((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta)) \rightarrow (\beta)) \vee (\beta))$$

ma przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 1. Budujemy drzewo semantyczne tej formuły:

$$\neg(((((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta)) \rightarrow (\beta)) \vee (\beta)) \quad {}^{1.\neg\vee}$$

$$(1_g) \quad \neg((((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta)) \rightarrow (\beta)) \quad {}^{2.\neg\rightarrow}$$

$$(1_d) \quad \neg(\beta)$$

$$(2_g) \quad ((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta) \quad {}^{3.\equiv}$$

$$(2_d) \quad \neg(\beta)$$

$$(3_{lg}) \quad (\beta) \wedge (\beta) \qquad\qquad (3_{pg}) \quad \neg((\beta) \wedge (\beta)) \quad {}^{4.\neg\wedge}$$

$$(3_{ld}) \quad \beta \qquad\qquad (3_{pd}) \quad \neg(\beta)$$

$$\times_{1_d, 3_{ld}} \qquad\qquad (4_l) \quad \neg(\beta) \qquad (4_p) \quad \neg(\beta)$$

$$\circ_1 \qquad\qquad \circ_2$$

Nie została wykluczona sytuacja, że formuła ($\bigstar$) jest prawdziwa. Drzewo ma dwie gałęzie otwarte i na każdej z nich mamy formułę $\neg(\beta)$. Zatem, formuła ($\bigstar$) jest prawdziwa przy takich wartościowaniach zmiennych zdaniowych, przy których $\neg(\beta)$ jest prawdziwa, czyli β jest fałszywa.

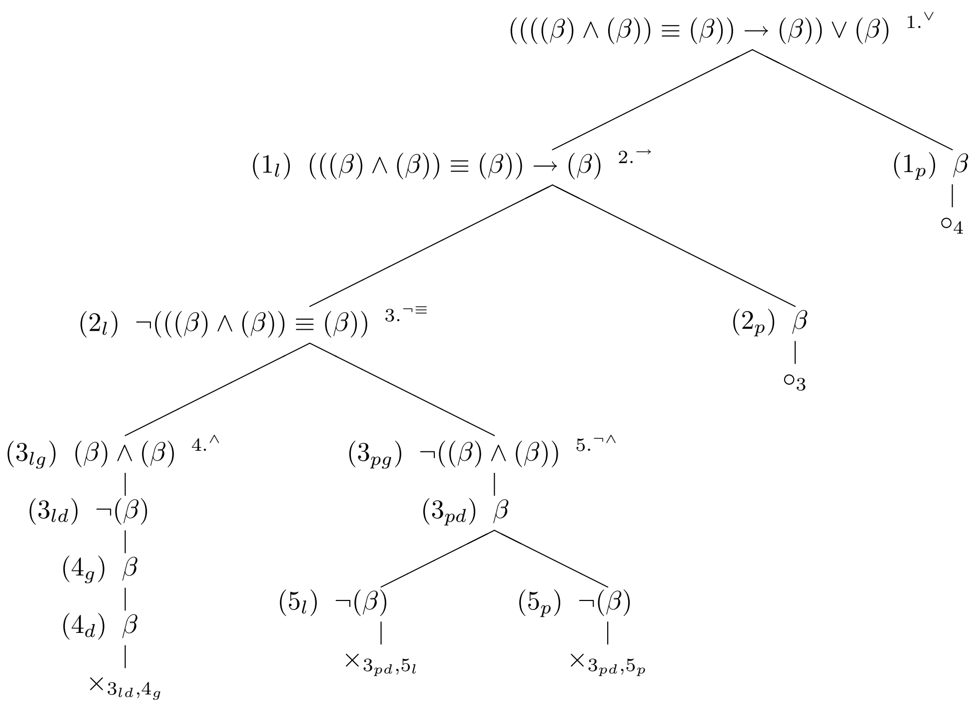
Przypuśćmy z kolei, że

$$(\bigstar) \quad \neg(((((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta)) \rightarrow (\beta)) \vee (\beta))$$

ma przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 0. Wtedy alternatywa

$$(\bigstar\bigstar) \quad ((((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta)) \rightarrow (\beta)) \vee (\beta)$$

ma (przy tymże wartościowaniu zmiennych zdaniowych) wartość 1. Budujemy drzewo semantyczne formuły $(\bigstar\bigstar)$:



Nie została wykluczona sytuacja, że formuła $(\bigstar\bigstar)$ jest prawdziwa, czyli że formuła $(\bigstar)$ jest fałszywa. Drzewo semantyczne formuły $(\bigstar\bigstar)$ ma gałęzie otwarte na których mamy formułę β. Zatem, formuła $(\bigstar\bigstar)$ jest prawdziwa przy takich wartościowaniach zmiennych zdaniowych, przy których β jest prawdziwa. Oznacza to, że formuła $(\bigstar)$ jest fałszywa przy takich wartościowaniach zmiennych zdaniowych, przy których β jest prawdziwa.

Pokazaliśmy zatem, że: jeśli β nie jest ani tautologią ani kontrtautologią (przypadek 3), to również $(\bigstar)$ nie jest ani tautologią ani kontrtautologią, ponieważ drzewa semantyczne dla formuł $(\bigstar)$ oraz $(\bigstar\bigstar)$ mają gałęzie otwarte. Dla każdego wartościowania, dla którego formuła β jest prawdziwa, formuła $(\bigstar)$ jest fałszywa. Dla każdego wartościowania, dla którego formuła $\neg(\beta)$ jest prawdziwa (czyli β jest fałszywa), formuła $(\bigstar)$ jest prawdziwa.

W przypadku 1, jeśli β jest tautologią (formułą prawdziwą przy ***każdym*** wartościowaniu zmiennych zdaniowych), to gałęzie w drzewie semantycznym formuły $(\bigstar)$ zakończone liśćmi $\circ_1$ oraz $\circ_2$ ***trzeba*** zamknąć, ponieważ ***nie istnieje*** wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym znajdująca się na tych gałęziach formuła $\neg(\beta)$ byłaby prawdziwa. Wtedy drzewo semantyczne dla formuły $(\bigstar)$ ma wszystkie gałęzie zamknięte, a to oznacza, że formuła $(\bigstar)$ nie jest prawdziwa przy żadnym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, czyli jest kontrtautologią.

W przypadku 2, jeśli β jest kontrtautologią (formułą fałszywą przy ***każdym*** wartościowaniu zmiennych zdaniowych), to gałązie w drzewie semantycznym formuły $(\bigstar\bigstar)$ zakończone liśćmi $\circ_3$ oraz $\circ_4$ ***trzeba*** zamknąć, ponieważ ***nie istnieje*** wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym znajdująca się na tych gałęziach formuła β byłaby prawdziwa. Wtedy drzewo semantyczne dla formuły $(\bigstar\bigstar)$ ma wszystkie gałęzie zamknięte, a to oznacza, że formuła $(\bigstar\bigstar)$ nie jest prawdziwa przy żadnym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, czyli jest kontrtautologią. Ponieważ $(\bigstar\bigstar)$ jest semantycznie równoważna negacji formuły $(\bigstar)$, więc $(\bigstar)$ jest w tym przypadku tautologią.

Podsumujmy:

- gdy β jest tautologią, to ($\bigstar$) jest kontrtautologią;
- gdy β jest kontrtautologią, to ($\bigstar$) jest tautologią;
- gdy β nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią, to ($\bigstar$) również nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią.

Zadanie 2. Przypuśćmy, że ***fałszywe*** są zdania: *Pewien Myszasty jest Pierzasty. Nie wszystkie Myszaste są Ogoniaste. Myszastych nie ma.*

Co ***prawdziwie*** można wtedy powiedzieć o związkach między Pierzastymi a Ogoniastymi?

Rozwiązanie.

Są różne metody rozwiązania tego zadania. Wykorzystamy tę, którą podawano na wykładzie: metodę diagramów Venna.

Oznaczmy:

M — zbiór wszystkich Myszastych;

P — zbiór wszystkich Pierzastych;

O — zbiór wszystkich Ogoniastych.

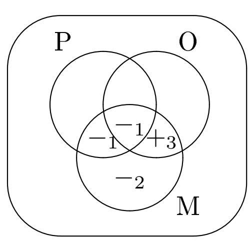
Wiemy, że ***fałszywe*** są zdania:

$$\begin{array}{l} P \cap M \neq \emptyset \\ M - O \neq \emptyset \\ M = \emptyset \end{array}$$

Zatem ***prawdziwe*** są zdania:

$$\begin{array}{ll} 1) & P \cap M = \emptyset \\ 2) & M - O = \emptyset \\ 3) & M \neq \emptyset \end{array}$$

Na diagramie Venna dla zbiorów P, O oraz M zaznaczamy, które obszary są ***puste*** (stawiając w takim obszarze znak „$-$”), a które ***niepuste*** (stawiając w takich obszarach znak „$+$”); indeksy wskazują, na podstawie którego z powyższych zdań umieszczono daną informację:



Z rysunku możemy odczytać, co da się prawdziwie powiedzieć o zależnościach między zakresami nazw *Pierzaste* oraz *Ogoniaste.* Widać mianowicie, że istnieją Ogoniaste, które nie są Pierzaste.

Zadanie 3. Zbadaj, czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł klasycznego rachunku zdań:

$$\{ \; p \to (q \to r), \; r \to (q \to s), \; p, \; \neg(s \vee \neg q) \; \}.$$

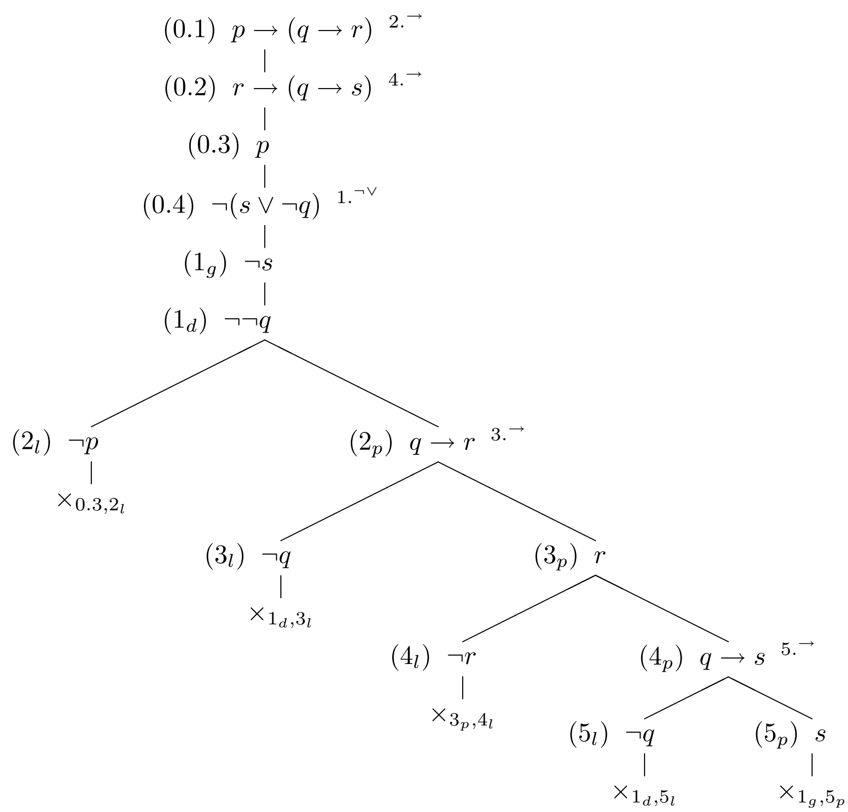
Ułóż poprawny gramatycznie tekst w języku polskim złożony ze zdań o podanych wyżej schematach.

Rozwiązanie.

Przypomnijmy: zbiór X formuł języka rachunku zdań jest ***semantycznie sprzeczny*** dokładnie wtedy, gdy nie istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych przy którym wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1. W przeciwnym przypadku, tj. gdy przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1, mówimy że X jest ***semantycznie niesprzeczny***. Zatem skończony zbiór X jest semantycznie sprzeczny dokładnie wtedy, gdy koniunkcja wszystkich należących doń formuł jest kontrtautologią rachunku zdań. Ustalanie metodą wprost, czy dany skończony zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny sprowadza się więc do sprawdzania, czy koniunkcja wszystkich jego elementów jest fałszywa przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych. W rozważanym tu przypadku trzeba byłoby zbudować tabelkę o 16 wierszach oraz 14 kolumnach, tj. 224 miejsc wypełnić wartościami logicznymi dla rozstrzygnięcia postawionego pytania. Metody nie wprost dają odpowiedź szybciej i jedną z takich metod posłużymy się w rozwiązaniu tego zadania. Zbudujemy mianowicie drzewo semantyczne, w którego pniu umieścimy wszystkie rozważane formuły. Odpowiada to przypuszczeniu, iż wszystkie te formuły są prawdziwe przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Możliwe są dokładnie dwie sytuacje:

- ***drzewo ma wszystkie gałęzie zamknięte***; wtedy wykluczona zostaje możliwość, aby formuły z pnia drzewa były prawdziwe przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych zdaniowych, czyli zbiór tych formuł jest ***semantycznie sprzeczny***;
- ***drzewo ma co najmniej jedną gałąź otwartą***; wtedy wszystkie formuły z pnia drzewa są prawdziwe przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych (które odczytać można z informacji zawartych na gałęzi otwartej), czyli zbiór tych formuł jest ***semantycznie niesprzeczny***.

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy podane formuły:



Wszystkie gałęzie tego drzewa semantycznego są zamknięte. Zatem nie istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych przy którym wszystkie formuły z pnia drzewa byłyby prawdziwe — tworzą one zbiór ***semantycznie sprzeczny***.

Z wykładu lub z podręcznika wiesz, jak odczytywać w języku polskim spójniki logiczne. Wystarczy teraz wstawić za zmienne zdaniowe jakiekolwiek zdania polskie i otrzymać zwięzły, semantycznie sprzeczny, absolutnie nikomu niepotrzebny tekst. Podstawmy np.:

p — Jestem umyta.

q — Jestem uczesana.

r — Jestem czysto ubrana.

s — Jestem przygotowana do zajęć z logiki.

Odczytaj sama otrzymany tekst, proszę. Do zobaczenia na zajęciach.

Zadanie 4. Zbadaj formalne własności relacji R określonej następująco dla dowolnych zbiorów:

$$ARB \;\equiv\; \neg\exists x\,((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)).$$

Rozwiązanie.

Najpierw pokażemy, że R jest relacją identyczności. Mamy:

$$\begin{array}{rcl}
ARB & \equiv & \neg\exists x\,((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \\
& \equiv & \forall x\,\neg((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \\
& \equiv & \forall x\,(\neg(x \in A \wedge x \notin B) \wedge \neg(x \notin A \wedge x \in B)) \\
& \equiv & \forall x\,((x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B)) \\
& \equiv & \forall x\,((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) \\
& \equiv & A \subseteq B \wedge B \subseteq A \\
& \equiv & A = B
\end{array}$$

Skoro R jest relacją identyczności, to ma wszystkie własności, które ma identyczność. A zatem R jest:

- zwrotna;
- symetryczna;
- przechodnia.

Nadto, R nie jest spójna (bo nie jest tak, że dla dowolnych ***nieidentycznych*** zbiorów A oraz B mielibyśmy $A = B$ lub $B = A$). Poza tym, R jest antysymetryczna: jeśli $A = B$ oraz $B = A$, to $A = B$.

Zadanie 5. Zbadaj, czy jest tautologią klasycznego rachunku predykatów:

$$(\maltese) \quad (\neg\exists x \forall y\; xPy) \vee \exists y\; yPy.$$

Napisz poprawną gramatycznie polszczyzną zdanie zbudowane według powyższego schematu przy następującej interpretacji predykatu P w zbiorze obywateli i obywatelek Rzeczpospolitej Polskiej:

$x_1 P x_2 \;\equiv\; x_1$ deprawuje x_2.

Jeśli uważasz się już za Humanist(k)ę, to bądź łaskaw(a) zastanowić się, jak najlepiej stylistycznie wyrazić to zdanie.

Rozwiązanie.

Z wykładu (oraz z ewentualnych lektur; nie było zakazu czytania) wiesz, że rachunek predykatów jest, m.in.: ***niesprzeczny*** (tj. z aksjomatów tego rachunku nie można udowodnić pary formuł wzajem sprzecznych), ***pełny*** (tj. tezy tego rachunku są dokładnie tautologiami tego rachunku) oraz ***półrozstrzygalny*** (tj., jeśli jakaś formuła jest tautologią tego rachunku, to istnieje dowód tego faktu, tzn. w skończonej liczbie obliczalnych kroków można fakt ten potwierdzić — np. używając metody drzew semantycznych). Wiesz nadto, że rachunek predykatów ***nie jest rozstrzygalny***: nie istnieje algorytm, który pozwoliłby o dowolnej formule języka tego rachunku rozstrzygać, czy jest ona, czy też nie jest tautologią tego rachunku). Możesz zatem podejrzewać Pogonowskiego o jakieś minimum uczciwości (nie wspominając o dobrych obyczajach akademickich i przytomności umysłu Pogonowskiego): skoro zadał takie pytanie, to zapewne można na nie udzielić odpowiedzi.

Ogół tautologii (lub, co na jedno wychodzi, tez) rachunku predykatów charakteryzować można za pomocą różnorakich środków dowodowych. Na wykładzie wspomniano, że należą do nich, m.in.:

- metoda aksjomatyczna;
- metoda dowodów założeniowych;
- rachunki sekwentów;
- metoda wykorzystująca regułę rezolucji;
- metoda drzew semantycznych.

Ostatnią z wymienionych metod pobieżnie omówiono na wykładzie. Użyjemy jej w rozwiązaniu tego zadania.

Najpierw jednak zauważmy, że formuła ($\maltese$) jest semantycznie równoważna prostszej (bo zawierającej mniej stałych logicznych) formule ($\circledast$):

$$(\circledast) \quad \exists x \forall y\; xPy \rightarrow \exists y\; yPy.$$

Jest tak na mocy znanego prawa rachunku zdań:

$$(\neg p \vee q) \equiv (p \rightarrow q).$$

Pokażemy, że formuła ($\circledast$) jest tautologią rachunku predykatów; oczywiście wtedy automatycznie także formuła ($\maltese$) jest tautologią tego rachunku.

Żeby pokazać, iż ($\circledast$) jest tautologią trzeba wykluczyć istnienie interpretacji, w której ($\circledast$) byłaby fałszywa. Inaczej mówiąc, trzeba wykluczyć istnienie interpretacji, w której negacja formuły ($\circledast$) byłaby prawdziwa.

Drzewo semantyczne negacji formuły ($\circledast$) ma postać następującą:

$$\begin{array}{rl}
 & \neg(\exists x \forall y\; xPy \rightarrow \exists y\; yPy)\ ^{1.\neg\rightarrow} \\
 & | \\
(1_g) & \exists x \forall y\; xPy\ ^{2.\checkmark a} \\
 & | \\
(1_d) & \neg \exists y\; yPy\ ^{3.\star a} \\
 & | \\
(2) & \forall y\; aPy\ ^{4.\star a} \\
 & | \\
(3) & \neg aPa \\
 & | \\
(4) & aPa \\
 & | \\
 & \times_{3,4}
\end{array}$$

Wszystkie (tu: jedyna) gałęzie tego drzewa semantycznego są zamknięte. Zatem negacja formuły ($\circledast$) nie jest prawdziwa w żadnej interpretacji, a to oznacza, że formuła ($\circledast$) (a więc także równoważna jej semantycznie formuła ($\maltese$)) jest prawdziwa we wszystkich interpretacjach, czyli ***jest tautologią*** rachunku predykatów.

Odczytanie formuły ($\circledast$) przy interpretacji predykatu P podanej w zadaniu jest nietrudne. Można ($\circledast$) odczytać w tej interpretacji np. tak:

Jeśli ktoś deprawuje wszystkich, to ktoś sam siebie deprawuje.

Porada dnia. Spróbuj namówić koleżankę (kolegę), która (który) wydaje ci się atrakcyjna (atrakcyjny) do wspólnego przedyskutowania problemów syntaktycznych (a może nawet semantycznych) dotyczących anafory oraz kwantyfikacji. Kto wie, może wyniknie z tego coś ciekawego. Oczywiście, wykluczone jest deprawowanie.

Natomiast odczytanie formuły (✠) przy tejże interpretacji predykatu P jest, wydaje się, mniej naturalne. Wniosek: czasami prawa logiki przynieść mogą pożytki stylistyczne.

Do zdania egzaminu wystarcza poprawne rozwiązanie co najmniej trzech zadań. Pisz i rysuj wyraźnie. Nie przemilczaj przyjmowanych założeń i czynionych przypuszczeń. Odpowiedzi uzasadniaj.

Zakres egzaminu nie wykracza poza standardy Unii Europejskiej.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl