MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

WYKŁAD 10: WYBRANE TWIERDZENIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Dzisiejszy wykład ma dwa zasadnicze cele:

1. Sformułowanie i udowodnienie kilku twierdzeń dotyczących operacji różniczkowania.

2. Wykorzystanie dotąd wprowadzonych pojęć i twierdzeń do badania przebiegu zmienności funkcji (rzeczywistej jednej zmiennej).

Przypomnimy niektóre pojęcia, znane słuchaczom ze szkoły: np. ekstrema lokalne funkcji. Podamy warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremum. Znajdowanie ekstremów lokalnych to ważne zagadnienie z punktu widzenia zastosowań: w praktyce bardzo często interesujemy się, kiedy jakaś wielkość, opisująca badaną zależność, przyjmuje wartość minimalną lub maksymalną.

1 Ekstrema lokalne

Załóżmy, że funkcja f o wartościach rzeczywistych jest określona w jakimś otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$, czyli w pewnym przedziale otwartym $(x_0 - a, x_0 + a)$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0:

1. *maksimum lokalne*, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $f(x) \leqslant f(x_0)$;

2. *minimum lokalne*, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Maksima oraz minima lokalne nazywamy *ekstremami lokalnymi* funkcji. Określone wyżej ekstrema nazywa się czasem *ekstremami niewłaściwymi*. Ponadto, mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0:

1. *maksimum lokalne właściwe*, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż:

   jeżeli $|x - x_0| < \delta$, to $f(x) < f(x_0)$;

2. *minimum lokalne właściwe*, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż:

   jeżeli $|x - x_0| < \delta$, to $f(x) > f(x_0)$.

W analogiczny sposób definiujemy ekstrema lokalne funkcji o wartościach rzeczywistych, określonych w dowolnych przestrzeniach metrycznych.
PRZYKŁADY.

1. Funkcja $f(x) = -x^2 + 5$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0 = 0$.
2. Funkcja $f(x) = |x - 2|$ ma minimum lokalne w punkcie $x_0 = 2$.
3. Funkcja $f(x) = \sin x$ nie ma ekstremum lokalnego w przedziale $(-\frac{\pi}{2}), \frac{\pi}{2})$.
4. Funkcja $f(x) = \cos x$ ma maksimum lokalne w każdym punkcie $x = 2 \cdot n \cdot \pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz minimum lokalne w każdym punkcie $x = (2 \cdot n + 1) \cdot \pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum podaje następujące twierdzenie:
TWIERDZENIE. *Jeśli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna w punkcie x_0 oraz posiada ekstremum lokalne w punkcie x_0, to $f'(x_0) = 0$.*
DOWÓD. Załóżmy, że f ma maksimum lokalne w punkcie x_0. Na mocy definicji maksimum lokalnego, istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $|h| < \delta$ zachodzi nierówność $f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$, co jest równoznaczne z tym, że $f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant 0$. Rozważamy dwa przypadki:

1. $h > 0$. Wtedy: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0$, a zatem

   $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \leqslant 0$.

2. $h < 0$. Wtedy: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$, a zatem

   $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \geqslant 0$.

Obie te nierówności dają łącznie $f'(x_0) = 0$. Dla przypadku, gdy w x_0 funkcja f ma minimum lokalne dowód przebiega w analogiczny sposób.

Ekstrema lokalne odpowiadają zatem pewnym wyróżnionym wartościom funkcji. Przebieg zmienności funkcji charakteryzują inne jeszcze pojęcia, np.: jej *punkty przegięcia*, jej *punkty nieciągłości*, przedziały, w których jest ona *monotoniczna*, *wypukła*, *wklęsła*, jej *asymptoty*. Podamy teraz stosowne definicje, charakteryzując później wprowadzone pojęcia odpowiednimi twierdzeniami.

2 Punkty przegięcia i asymptoty

O monotoniczności, wklęsłości, wypukłości funkcji mówiliśmy już poprzednio – słuchacze zechcą przypomnieć sobie stosowne definicje.

Przypominamy też, że równanie stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie x_0 ma jedną z następujących postaci (co wynika bezpośrednio z definicji ilorazu różnicowego funkcji w punkcie x_0):

1. $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, gdy $|f'(x_0)| < \infty$
2. $y = x_0$, gdy $|f'(x_0)| = \infty$.

Następne dwa pojęcia dotyczą tego, jak – intuicyjnie mówiąc – wije się i zakręca wykres funkcji.

1. *Punkt przegięcia*. Załóżmy, że funkcja f ma pochodną $f'(x_0)$ w punkcie x_0. Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 *punkt przegięcia*, gdy: albo $|f'(x_0)| = \infty$ albo $|f'(x_0)| < \infty$ oraz istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $0 < |h| < \delta$ zachodzi jeden z następujących przypadków:

   (a) $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \leqslant f(x_0 + h)$ dla $h > 0$ oraz $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \geqslant f(x_0 + h)$ dla $h < 0$
   (w tym przypadku mówimy, że krzywa $y = f(x)$ *przewija się spod stycznej nad styczną*).

   (b) $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \geqslant f(x_0 + h)$ dla $h > 0$ oraz $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \leqslant f(x_0 + h)$ dla $h < 0$
   (w tym przypadku mówimy, że krzywa $y = f(x)$ *przewija się znad stycznej pod styczną*).

2. *Asymptoty*. Rozważamy kilka rodzajów asymptot: *ukośne* (w tym: *poziome*) oraz *pionowe*, *pionowe lewostronne* oraz *pionowe prawostronne*).

(a) Załóżmy, że funkcja f jest określona w przedziale niewłaściwym (c, ∞), gdzie $c \in \mathbb{R}$. Mówimy, że prosta $y = a \cdot x + b$ jest *asymptotą ukośną funkcji f przy $x \to +\infty$*, gdy $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - a \cdot x - b) = 0$. Mówimy, że prosta $y = a \cdot x + b$ jest *asymptotą ukośną funkcji f przy $x \to -\infty$*, gdy $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - a \cdot x - b) = 0$.

(b) Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ punktu x_0, za wyjątkiem punktu x_0. Mówimy, że funkcja f ma *asymptotę pionową $x = x_0$ w punkcie x_0*, gdy: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

(c) Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0)$ punktu x_0. Mówimy, że funkcja f ma *lewostronną asymptotę pionową $x = x_0$ w punkcie x_0*, gdy:
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

(d) Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu $(x_0, x_0 + \delta)$ punktu x_0. Mówimy, że funkcja f ma *prawostronną asymptotę pionową $x = x_0$ w punkcie x_0*, gdy:
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Pod koniec wykładu dowiemy się, jak wyznaczać punkty przegięcia oraz asymptoty.

PRZYKŁADY.

1. Punkt $x_0 = 0$ jest punktem przegięcia krzywej o równaniu $f(x) = x^3$.
2. Funkcja $f(x) = x^2$ nie ma punktów przegięcia.
3. Asymptotami funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ są proste o równaniach $y = 0$ oraz $x = 0$.
4. Asymptotami funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + x$ są proste o równaniach $y = x$ oraz $x = 0$.

3 Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenia o wartości średniej – oprócz tego, że są interesujące same w sobie – pozwalają na wykorzystanie pochodnych w badaniu przebiegu zmienności funkcji.

3.1 Twierdzenie Rolle'a

TWIERDZENIE ROLLE'A. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie należącym do przedziału (a,b), a ponadto $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $x_0 \in (a,b)$ taki, że $f'(x_0) = 0$.*

DOWÓD. Gdyby funkcja f była stała w przedziale $[a,b]$, to mielibyśmy automatycznie $f'(x) = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Rozważamy zatem przypadek, gdy f nie jest stała w przedziale $[a,b]$. Wtedy f przyjmuje w (a,b) wartości różne od $f(a)$: większe lub mniejsze od $f(a)$. Rozważmy tę pierwszą możliwość (drugi przypadek jest analogiczny). Ponieważ f jest z założenia ciągła w przedziale $[a,b]$, więc osiąga swój kres górny w $[a,b]$. Oznacza to, że istnieje punkt $x_0 \in [a,b]$ taki, że $f(x_0) = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$. Skoro f przyjmuje wartości większe od $f(a)$, to $x_0 \in (a,b)$. Oznacza to, że f ma w x_0 maksimum lokalne. Z udowodnionego powyżej twierdzenia (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego) mamy więc: $f'(x_0) = 0$.

W interpretacji geometrycznej twierdzenie Rolle'a głosi, że przy założeniu równości wartości funkcji na końcach przedziału wewnątrz tego przedziału istnieje punkt x_0 taki, że styczna do krzywej $f(x)$ przechodząca przez punkt $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi odciętych.

3.2 Twierdzenie Lagrange'a

TWIERDZENIE LAGRANGE'A. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie należącym do przedziału (a,b), a ponadto $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $x_0 \in (a,b)$ taki, że:*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DOWÓD. Niech $t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Wtedy funkcja $g(x) = f(x) - t \cdot x$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a. Istnieje zatem punkt $x_0 \in (a,b)$ taki, że $g'(x_0) = 0$. Ponieważ $g'(x) = f'(x) - t$, więc: $0 = g'(x_0) = f'(x_0) - t$, czyli $f'(x_0) = t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

W interpretacji geometrycznej teza powyższego twierdzenia głosi, że styczna do krzywej $f(x)$ przechodząca przez punkt $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do siecznej łączącej punkty $(a, f(a))$ oraz $(b, f(b))$.

3.3 Twierdzenie Cauchy'ego

TWIERDZENIE CAUCHY'EGO. *Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[a,b]$ oraz różniczkowalne w każdym punkcie należącym do przedziału (a,b), a ponadto*

$g'(x) \neq 0$ *dla* $x \in (a, b)$*, to istnieje punkt* $x_0 \in (a, b)$ *taki, że:*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

DOWÓD. Niech $t = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Wtedy funkcja $h(x) = f(x) - t \cdot g(x)$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a. Istnieje zatem punkt $x_0 \in (a, b)$ taki, że $h'(x_0) = 0$. Ponieważ $h'(x) = f'(x) - t \cdot g'(x)$, więc $f'(x_0) - t \cdot g'(x_0) = 0$, co oznacza, że: $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = t = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

To twierdzenie będzie wykorzystane przy badaniu tzw. symboli nieoznaczonych.

3.4 Monotoniczność funkcji

Pojęcie pochodnej pozwala na podanie warunków wystarczających i koniecznych monotoniczności funkcji, co ustala następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE. *Załóżmy, że funkcja* f *jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału* (a, b)*. Wtedy*:

1. f *jest niemalejąca w* (a, b) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $f'(x) \geqslant 0$ *w* (a, b).
2. f *jest nierosnąca w* (a, b) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $f'(x) \leqslant 0$ *w* (a, b).

Ponadto, jeśli $f'(x) > 0$ *w* (a, b)*, to* f *jest ściśle rosnąca w* (a, b)*, natomiast jeśli* $f'(x) < 0$ *w* (a, b)*, to* f *jest ściśle malejąca w* (a, b).

DOWÓD. Udowodnimy punkt 1 (dowód części 2 otrzymać można z tego dowodu, rozważając funkcję $-f$).

Załóżmy najpierw, że $f'(x) \geqslant 0$ w (a, b). Niech $a < x_1 < x_2 < b$. Na mocy twierdzenia Lagrange'a istnieje punkt $x_0 \in (a, b)$ taki, że:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x_0).$$

Ponieważ $f'(x_0) \geqslant 0$, więc: $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, czyli f jest niemalejąca w (a, b). Gdy zamiast $f'(x) \geqslant 0$ w (a, b) założymy, że $f'(x) > 0$ w (a, b), to $f'(x_0) > 0$, a to oznacza, że $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli f jest rosnąca w (a, b).

Załóżmy z kolei, że f jest niemalejąca w (a, b) i niech $x_0 \in (a, b)$. Wtedy mamy:

1. Jeśli $h > 0$, to $f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant 0$.
2. Jeśli $h < 0$, to $f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant 0$.

Dla dostatecznie małego (co do wartości bezwzględnej) $h \neq 0$ mamy więc zawsze $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$. W konsekwencji:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0.$$

3.5 Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego

Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego podaje następujące twierdzenie:
TWIERDZENIE. *Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0. Wtedy:*

1. *Jeżeli istnieje $\delta > 0$ taka, że $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie x_0.*

2. *Jeżeli istnieje $\delta > 0$ taka, że $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie x_0.*

DOWÓD. Udowodnimy przypadek pierwszy, pozostawiając słuchaczom przyjemność samodzielnego (lub wspólnego z koleżanką/kolegą) zmierzenia się z uzasadnieniem przypadku drugiego.

Niech zachodzą założenia punktu 1. Wtedy, na mocy przed chwilą udowodnionego twierdzenia, funkcja f jest niemalejąca w przedziale $(x_0 - \delta, x_0)$ oraz nierosnąca w przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$.

1. Dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $0 < h < x_0 - x$ otrzymujemy nierówność: $f(x) \leqslant f(x_0 - h)$. Ponieważ f jest ciągła w punkcie x_0, więc $f(x) \leqslant \lim_{h \to 0^+} f(x_0 - h) = f(x_0)$

2. Dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ oraz $0 < h < x - x_0$ otrzymujemy nierówność: $f(x) \geqslant f(x_0 - h)$. W konsekwencji: $f(x_0) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h) \geqslant f(x)$.

Pokazaliśmy zatem, że $f(x) \leqslant f(x_0)$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, co oznacza, że funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie x_0.

4 Symbole nieoznaczone i reguła de l'Hospitala

Z omówionych wyżej twierdzeń o wartości średniej mamy wiele pożytków. Między innymi, pozwalają one uzasadnić regułę postępowania z wyrażeniami, zawierającymi granice, których obliczenie nie jest – na pierwszy rzut oka – oczywiste.

Tak jest np. w sytuacjach, gdy otrzymujemy wyrażenie ułamkowe, w którym licznik oraz mianownik dążą do zera, lub licznik i mianownik dążą do nieskończoności. Procedurę postępowania w takich przypadkach opisuje *reguła de l'Hospitala*. Zachodzą mianowicie następujące twierdzenia:

1. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[x_0, x_0 + \delta]$, gdzie $\delta > 0$ oraz różniczkowalne we wszystkich punktach przedziału otwartego $(x_0, x_0 + \delta)$. Załóżmy też, że $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oraz $g(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Jeżeli istnieje granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje również granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi równość:
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy przedział $[x_0, x_0 + \delta]$ przedziałem $[x_0 - \delta, x_0]$, a granice prawostronne przy $x \to x_0^+$ granicami lewostronnymi przy $x \to x_0^-$.

2. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w przedziale niewłaściwym (a, ∞), gdzie $a > 0$ oraz różniczkowalne we wszystkich punktach tego przedziału. Załóżmy też, że $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ oraz $g(x) \neq 0$ dla $x \in (a, \infty)$. Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje także granica $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz zachodzi równość:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$, gdzie $\delta > 0$ oraz różniczkowalne we wszystkich punktach tego przedziału. Załóżmy też, że $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = \infty$ oraz $g(x) \neq 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Jeśli istnieje granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje również granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi równość:
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy przedział $(x_0, x_0 + \delta)$ przedziałem $(x_0 - \delta, x_0)$, a granice prawostronne przy $x \to x_0^+$ granicami lewostronnymi przy $x \to x_0^-$.

4. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[x_0, x_0 + \delta]$, gdzie $\delta > 0$ i mają ciągłe pochodne aż do rzędu $n-1$ w tym przedziale oraz ich n-te pochodne są skończone w każdym punkcie przedziału otwartego $(x_0, x_0 + \delta)$. Załóżmy też, że dla $0 \leqslant k \leqslant n-1$ mamy $g^{(k)}(x) \neq 0$ dla $x \in (x_0, x_0+\delta)$ oraz że zachodzą równości:
$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0.$$
Jeśli istnieje granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, to istnieje też granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz zachodzi równość:
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$
Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy przedział $[x_0, x_0 + \delta]$ przedziałem $[x_0 - \delta, x_0]$, a granice prawostronne przy $x \to x_0^+$ granicami lewostronnymi przy $x \to x_0^-$.

Dla przykładu, udowodnimy pierwsze z tych twierdzeń. Dowody pozostałych znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, tom I, część 2, strony 43–47 oraz 69.

DOWÓD 1. Przeprowadzimy dowód dla przypadku granic prawostronnych. Ponieważ $f(x_0) = g(x_0) = 0$, więc:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$
Na mocy udowodnionego wcześniej twierdzenia Cauchy'ego w przedziale (x_0, x) istnieje taki punkt t_x, dla którego:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)}.$$
Skoro $t_x \in (x_0, x)$, to: jeśli x dąży do x_0, to t_x również dąży do x_0. Mamy więc:
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)}.$$

Omówione wyżej przejścia od liczenia granicy ilorazu funkcji do liczenia granicy ilorazu ich pochodnych (przy zakładanych założeniach) nazywamy *regułą de* *l'Hospitala*. W powyższych twierdzeniach używaliśmy terminu *symbol nieoznaczony* dla sytuacji, gdy obliczane granice mają postać $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

UWAGA PRAKTYCZNA. Przez *symbole nieoznaczone* rozumiemy wyrażenia następujących postaci:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

Reguła de l'Hospitala pokazuje, jak radzić sobie z symbolami $\frac{0}{0}$ oraz $\frac{\infty}{\infty}$. Pozostałe sytuacje możemy zredukować do tych dwóch, poprzez przekształcenia:

1. Dla $\infty - \infty$ stosujemy przekształcenie:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}},$$

   prowadzące do symbolu $\frac{0}{0}$, do którego stosujemy regułę de l'Hospitala.

2. Dla $0 \cdot \infty$ stosujemy przekształcenie:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

   prowadzące do symbolu $\frac{\infty}{\infty}$, do którego stosujemy regułę de l'Hospitala.

3. Dla symboli 0^0, 1^∞ oraz ∞^0 stosujemy przekształcenie:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)},$$

   prowadzące do przypadku rozważanego w punkcie 2.

PRZYKŁADY.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$. Mamy do czynienia z symbolem $\frac{0}{0}$. Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \sqrt{x}}{1+x} = 0.$$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x^2}$. Mamy do czynienia z symbolem $\frac{\infty}{\infty}$. Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln(\ln x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x \cdot \ln x}}{2 \cdot x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2 \cdot x^2 \cdot \ln x} = 0.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 \cdot \ln x)$. Mamy do czynienia z symbolem $0 \cdot \infty$. Korzystając z przekształcenia zalecanego w UWADZE PRAKTYCZNEJ oraz z reguły de l'Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{x\to 0}(x^2 \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x^2})'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

5 Wzór Taylora

Podamy teraz wzór, który pozwala przedstawiać funkcje (spełniające stosowne warunki różniczkowalności) za pomocą *wielomianu* o współczynnikach zależnych od kolejnych pochodnych rozważanej funkcji oraz pewnej, dostatecznie małej, *reszty*. Dociekliwi słuchacze zapytać mogą: po co potrzebujemy takiego wzoru? Uproszczoną odpowiedzią jest stwierdzenie, że wielomiany to bardzo „grzeczne” funkcje, których badanie nie nastręcza większych trudności, o czym słuchacze mieli okazję przekonać się już w szkole.

WZÓR TAYLORA. *Załóżmy, że funkcja f o wartościach rzeczywistych jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz ma w tym punkcie skończoną pochodną n-tego rzędu. Wtedy dla dostatecznie małych $|h|$ zachodzi wzór:*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0) + (\frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} \cdot \varepsilon_n(x_0,h)),$$

gdzie funkcja ε_n spełnia warunek: $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_n(x_0,h) = 0$.

UWAGA. Podany w twierdzeniu wzór nazywa się *wzorem Taylora z resztą Peana*, przy czym

$$R_n(x_0,h) = \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} \cdot \varepsilon_n(x_0,h)$$

nazywa się *resztą Peana*. Opracowano inne jeszcze wersje tego wzoru, różniące się od powyższej postacią owej (dostatecznie małej, zaniedbywalnej) reszty.

Dowód wzoru Taylora znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, tom I, część 2, strony 70–71. W tam przedstawionym dowodzie korzysta się z zasady indukcji matematycznej oraz reguły de l'Hospitala. Istnieją też inne metody uzasadnienia tego wzoru, na przykład algebraiczne. Wzór Taylora podaje się w różnych stylizacjach, np. często w następującej postaci. Załóżmy, że funkcja $f[a,b] \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne aż do $n+1$-tego rzędu w przedziale $[a,b]$ (na krańcach przedziału bierzemy pod uwagę pochodne jednostronne). Wtedy dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi ***wzór Taylora***:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} (\frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a)) + R_n(x,a),$$

gdzie $\lim\limits_{x\to a} \frac{R_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0$. Podkreślmy raz jeszcze, że wzór Taylora pozwala na przybliżanie wartości funkcji wielomianami, których współczynniki wyznaczone są przez pochodne wyjściowej funkcji.

Podamy jeszcze – również bez dowodu – dwa twierdzenia, wykorzystujące powyższy wzór oraz bardzo ważne w zastosowaniach, używane przy badaniu przebiegu zmienności funkcji.

1. TWIERDZENIE TAYLORA. *Załóżmy, że funkcja f ma w przedziale $[x_0, x_0 + h]$, gdzie $h > 0$ (lub, odpowiednio, w przedziale $[x_0 + h, x_0]$ dla $h < 0$) ciągłą pochodną $f^{(n-1)}$ oraz ma skończoną pochodną $f^{(n)}$ wewnątrz tego przedziału. Dla każdej liczby naturalnej $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ istnieje liczba rzeczywista $t \in (0, 1)$ taka, że:*

   $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(x_0) + R_n(x_0, h)$,

   gdzie $R_n(x_0, h) = \frac{h^n}{(n-1)!\cdot k} \cdot (1-t)^{n-k} \cdot f^{(n)}(x_0 + t \cdot h)$. *Wielkość* $R_n(x_0, h)$ *nazywamy* resztą Schlömilcha. *Dwa szczególne przypadki to*:

   (a) Dla $k = n$ otrzymujemy *resztę Lagrange'a*
   $R_n(x_0, h) = \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0 + t \cdot h)$.

   (b) Dla $k = 1$ otrzymujemy *resztę Cauchy'ego*
   $R_n(x_0, h) = \frac{h^n}{(n-1)!} \cdot (1-t)^{n-1} \cdot f^{(n)}(x_0 + t \cdot h)$.

2. TWIERDZENIE MACLAURINA. *Załóżmy, że funkcja f ma w przedziale $[0, x]$, gdzie $x > 0$ (lub, odpowiednio, w przedziale $[x, 0]$ dla $h < 0$) ciągłą pochodną $f^{(n-1)}$ oraz ma skończoną pochodną $f^{(n)}$ wewnątrz tego przedziału. Dla każdej liczby naturalnej $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ istnieje liczba rzeczywista $t \in (0, 1)$ taka, że:*

   $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + R_n(x),$$

   gdzie $R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!\cdot k} \cdot (1-t)^{n-k} \cdot f^{(n)}(t \cdot x)$.

Dowody tych twierdzeń znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, tom I, część 2, strony 70–76.

PRZYKŁADY.

1. *Funkcja wykładnicza e^x.* Zastosowanie twierdzenia Maclaurina (z resztą Lagrange'a) daje następujące przedstawienie tej funkcji:

   $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \frac{e^{t\cdot x}}{n!} \cdot x^n,$$

gdzie $0 < t < 1$.

2. *Funkcja logarytmiczna* $\ln(1+x)$. Zastosowanie twierdzenia Maclaurina (z resztą Lagrange'a) daje następujące przedstawienie tej funkcji:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n \cdot (1 + t \cdot x)^n},$$

gdzie $0 < t < 1$ oraz $x > -1$.

3. *Funkcja trygonometryczna* $\sin x$. Zastosowanie twierdzenia Maclaurina (z resztą Lagrange'a) daje następujące przedstawienie tej funkcji:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot \sin(t \cdot x + n \cdot \frac{\pi}{2}),$$

gdzie $0 < t < 1$.

4. *Funkcja trygonometryczna* $\cos x$. Zastosowanie twierdzenia Maclaurina (z resztą Lagrange'a) daje następujące przedstawienie tej funkcji:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot \cos(t \cdot x + n \cdot \frac{\pi}{2}),$$

gdzie $0 < t < 1$.

Równości takie pozwalają na obliczanie przybliżonych wartości funkcji dla małych wartości argumentu x.

Ponieważ ostatni wyraz powyższych sum w każdym z rozważanych przypadków dąży do zera przy n dążącym do ∞, więc otrzymujemy także przedstawienia powyższych funkcji w postaci szeregów nieskończonych:

1. *Funkcja wykładnicza* e^x.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2. *Funkcja logarytmiczna* $\ln(1+x)$.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3. *Funkcja trygonometryczna* $\sin x$.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n + 1)!} \cdot x^{2 \cdot n + 1}$$

4. *Funkcja trygonometryczna* $\cos x$.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n)!} \cdot x^{2 \cdot n}$$

Dodajmy jeszcze, dla zainteresowanych słuchaczy, że z omawianych wyżej twierdzeń wynika również, że jeśli szereg $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ma promień zbieżności $R > 0$, to dla $|x| < R$ zachodzi równość:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Ponadto, z twierdzeń tych wynika, że funkcja f posiadająca pochodne wszystkich rzędów (wspólnie ograniczone przez pewną stałą) w punktach pewnego przedziału domkniętego może zostać przedstawiona w postaci szeregu potęgowego:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Te wnioski mają duże znaczenie praktyczne w analizie matematycznej.

5.1 Zastosowania wzoru Taylora

Sformułujemy teraz kilka twierdzeń, które mają bardzo praktyczne zastosowania w badaniu przebiegu zmienności funkcji, a których dowody korzystają ze wzoru Taylora. Wykorzystamy te wyniki dla przedstawienia ogólnego schematu postępowania w tego typu badaniach.

1. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum sformułowany przy użyciu drugiej pochodnej*. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 skończoną drugą pochodną $f''(x_0)$. Jeżeli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) \neq 0$, to f ma w x_0 ekstremum lokalne. Przy tym jest to:

   (a) maksimum lokalne, gdy $f''(x_0) < 0$

   (b) minimum lokalne, gdy $f''(x_0) > 0$.

2. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum sformułowany przy użyciu pochodnych wyższych rzędów*. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 skończoną pochodną $f^{(n)}(x_0)$, dla pewnego $n > 1$. Jeśli ponadto $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, to:

(a) Gdy n jest parzysta, to f ma w x_0 ekstremum lokalne. Przy tym jest to:

i. maksimum lokalne, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$

ii. minimum lokalne, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

(b) Gdy n jest nieparzysta, to f nie ma w x_0 ekstremum lokalnego.

3. *Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia*. Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 skończoną drugą pochodną $f''(x_0)$ oraz ma w x_0 punkt przegięcia, to $f''(x_0) = 0$.

4. *Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia sformułowany przy użyciu drugiej pochodnej*. Załóżmy, że funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 skończoną drugą pochodną $f''(x_0)$. Jeżeli istnieje $\delta > 0$ taka, że zachodzi jedno z dwojga:

   (a) $f''(x_0) \geqslant 0$ dla $x_0 - \delta < x \leqslant x_0$ oraz $f''(x_0) \leqslant 0$ dla $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$

   (b) $f''(x_0) \leqslant 0$ dla $x_0 - \delta < x \leqslant x_0$ oraz $f''(x_0) \geqslant 0$ dla $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$

   to krzywa $y = f(x)$ ma w punkcie o odciętej x_0 punkt przegięcia. W pierwszym z tych przypadków krzywa przewija się znad stycznej pod styczną, a w drugim z nich przewija się spod stycznej nad styczną.

5. *Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia sformułowany przy użyciu pochodnych wyższych rzędów*. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 skończoną pochodną $f^{(n)}(x_0)$, dla pewnego $n > 2$. Jeśli ponadto $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, to:

   (a) Gdy n jest parzysta, to krzywa $y = f(x)$ ma w punkcie o odciętej x_0 punkt przegięcia. Przy tym:

   i. gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, to krzywa przewija się spod stycznej nad styczną

   ii. gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$, to krzywa przewija się znad stycznej pod styczną.

   (b) Gdy n jest nieparzysta, to krzywa $y = f(x)$ nie ma w punkcie o odciętej x_0 punktu przegięcia.

6. *Ciągłość funkcji wypukłej*. Załóżmy, że funkcja f jest wypukła w pewnym otoczeniu punktu x_0. Wtedy f jest ciągła w tym punkcie. Twierdzenie to zachowuje ważność, gdy wypukłość zamienimy na wklęsłość.

7. *Wypukłość funkcji a monotoniczność pochodnej*. Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a, b) jest wypukła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest niemalejąca w (a, b). Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a, b) jest wklęsła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest nierosnąca w (a, b).

8. *Wypukłość funkcji a położenie stycznej*. Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a, b) jest wypukła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$ styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0 leży poniżej tej krzywej, bądź jest odcinkami identyczna z tą krzywą. Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a, b) jest wklęsła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$ styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0 leży powyżej tej krzywej, bądź jest odcinkami identyczna z tą krzywą.

9. *Warunek konieczny i wystarczający wypukłości funkcji*. Załóżmy, że funkcja f ma skończoną drugą pochodną f'' w przedziale otwartym (a, b). Wtedy:

   (a) f jest wypukła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in (a, b)$.

   (b) f jest wklęsła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \leqslant 0$ dla wszystkich $x \in (a, b)$.

10. *Asymptoty ukośne*. Załóżmy, że funkcja f jest określona w przedziale niewłaściwym $(c, +\infty)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Prosta $y = a \cdot x + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f przy $x \to +\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ oraz $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - a \cdot x) = b$. To twierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy zamienimy przedział $(c, +\infty)$ na przedział $(-\infty, c)$ oraz napiszemy wszędzie $x \to -\infty$ zamiast $x \to +\infty$.

Oczywiście słuchacze nie są zmuszeni do przyjmowania na wiarę tych twierdzeń. Ich dowody znaleźć można np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, tom I, część 2, na stronach 87–101. Nasz kurs ma charakter wyłącznie usługowy: zależy nam, aby słuchacze mogli skutecznie posługiwać się pewnymi dobrze opracowanymi technikami matematycznymi. Podajemy więc dowody jedynie wybranych twierdzeń, dla ukazania ich zasadności i wzbudzenia w słuchaczach przekonania, że cały czas poruszamy się po dobrze wytyczonym i bezpiecznym szlaku. Słuchacze zechcą wybaczyć, że ukrywamy przed nimi niektóre groźne przepaście otaczające ten szlak i czyhające na tych, którzy z niego zboczą.

W ogólności, zalecamy wszystkim (a więc również studentom kognitywistyki) stosowanie się do maksymy wybitnego matematyka Williama Kingdona Clifforda (1845–1879), który w 1877 roku napisał w swoim eseju *The Ethics of Belief*:

It is wrong always, everywhere, and for anyone,
to believe anything upon insufficient evidence.

6 Badanie przebiegu zmienności funkcji

Dysponujemy już stosunkowo bogatym aparatem pojęciowym, który pozwala charakteryzować przebieg zmienności dowolnej funkcji o wartościach rzeczywistych.

6.1 Procedura badania przebiegu funkcji

Ogólny schemat badania przebiegu zmienności funkcji przedstawia się następująco:

1. Określamy dziedzinę oraz przeciwdziedzinę funkcji.
2. Badamy granice funkcji w punktach krańcowych jej przedziałów określoności.
3. Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji oraz jej wartość dla argumentu równego 0 (czyli wyznaczamy miejsca przecięcia się wykresu funkcji z osiami współrzędnych).
4. Wyznaczamy asymptoty funkcji.
5. Obliczamy pierwszą i drugą pochodną funkcji.
6. Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji.
7. Ustalamy przedziały monotoniczności funkcji.
8. Ustalamy przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji.
9. Wyznaczamy punkty przegięcia funkcji.

Wyniki powyższych ustaleń przedstawiamy w stosownej tabeli, na podstawie której szkicujemy następnie wykres funkcji.

Jak słuchacze już wiedzą, ogólnie (bądź odpłatnie) dostępne są programy, które pozwalają realizować powyższą procedurę. Odnośniki do niektórych takich programów podaliśmy w wykładzie trzecim. Przypomnijmy je raz jeszcze:

1. https://www.geogebra.org/
2. https://www.medianauka.pl/portal:matematyka
3. http://www.matemaks.pl/index.html
4. http://www.scilab.org/
5. http://fooplot.com/
6. https://rechneronline.de/function-graphs/

6.2 Przykłady

Samodzielne badanie przebiegu zmienności funkcji jest znakomitym testem, sprawdzającym rozumienie oraz umiejętność wykorzystania uzyskanej wiedzy matematycznej.

6.2.1 Funkcja wielomianowa

Rozważmy prosty przykład funkcji wielomianowej (Niedziałowski, Kowalczyk, Obczyński 2013, strony 162–163):

$$f(x) = 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + x + 2.$$

Dziedziną funkcji f jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Wyznaczamy granice funkcji w nieskończoności:
$\lim\limits_{x \to -\infty} 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + x + 2 = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + x + 2 = +\infty.$

Oczywiście f jest funkcją ciągłą na całym zbiorze $\mathbb{R}$, więc f nie ma asymptot pionowych. Ponadto, z ciągłości f oraz z obliczeń granic funkcji w nieskończoności wynika, że f nie ma asymptot poziomych. Pozostaje zbadać, czy f ma asymptoty ukośne:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1 + \frac{2}{x}) = +\infty.$$

Tak więc, funkcja nie ma asymptot ukośnych. W ogólności: każda funkcja wielomianowa, która nie jest funkcją liniową nie ma asymptot ukośnych.

Dla $x = 0$ funkcja f przyjmuje wartość $f(0) = 2$. Znalezienie wartości x, dla której $f(x) = 0$ wykracza, o ile nam wiadomo, poza program szkoły średniej. W tym miejscu powiemy jedynie, że dla funkcji wielomianowych stopnia mniejszego od 5 istnieją ogólne wzory, pozwalające znajdować miejsca zerowe takich funkcji. Słuchacze wiedzą, jak to robić w przypadku wielomianów stopnia pierwszego i drugiego. Dla funkcji wielomianowych stopnia trzeciego i czwartego można stosować owe ogólne wzory, natomiast tego typu wzór nie istnieje dla funkcji wielomianowych stopnia większego od cztery. Opracowano różne inne metody wyznaczania miejsc zerowych wielomianów stopni wyższych od czterech. Omawianie tej problematyki wykracza poza zakres naszego usługowego wykładu. W przypadku badanej tutaj funkcji wielomianowej stwierdzimy jedynie, że ma ona co najmniej jedno rzeczywiste miejsce zerowe (co wynika z jej granic w nieskończoności). Wykonane poniżej obliczenia pozwolą ponadto stwierdzić, że jest to jej jedyne rzeczywiste miejsce zerowe. Rozważany wielomian ma jeszcze dwa pierwiastki zespolone (omówienie tej sprawy również wykracza poza zakres naszego usługowego wykładu).

Obliczamy pierwszą i drugą pochodną funkcji f:
$f'(x) = (3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + x + 2)' = 9 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 1$.
$f''(x) = (9 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 1)' = 18 \cdot x - 10$.

Przy pomocy pierwszej pochodnej wyznaczamy przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji.

Ustalając, że $9 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 1 = 0$ dla $x = \frac{1}{9}$ lub $x = 1$ (co potrafimy zrobić na podstawie wiadomości wyniesionych ze szkoły, nawet wyrwani z głębokiego snu) widzimy, że $f'(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{9}$ lub $x = 1$. Ponadto:

1. Dla $x \in (-\infty, \frac{1}{9}) \cup (1, +\infty)$ mamy $f'(x) > 0$.
2. Dla $x \in (\frac{1}{9}, 1)$ mamy $f'(x) < 0$.
3. A zatem funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, \frac{1}{9})$ oraz $(1, +\infty)$, natomiast jest malejąca w przedziale $(\frac{1}{9}, 1)$.
4. W konsekwencji, funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie $x = \frac{1}{9}$ oraz minimum lokalne w punkcie $x = 1$. Łatwo otrzymujemy, że: $f(\frac{1}{9}) = \frac{499}{243}$ oraz $f(1) = 1$.

Przy pomocy drugiej pochodnej wyznaczamy przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji oraz jej punkty przegięcia.

Widać, że $f''(x) = 0$ dla $x = \frac{5}{9}$. Ponadto (co też łatwo widać):

1. Dla $x < \frac{5}{9}$ mamy $f''(x) < 0$, czyli funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-\infty, \frac{5}{9})$.
2. Dla $x > \frac{5}{9}$ mamy $f''(x) > 0$, czyli funkcja f jest wypukła w przedziale $(\frac{5}{9}, +\infty)$.

3. W konsekwencji, punkt $x = \frac{5}{9}$ jest punktem przegięcia funkcji f. Łatwo otrzymujemy, że: $f(\frac{5}{9}) = \frac{371}{243}$.

Możemy zebrać w tabeli poczynione wyżej ustalenia:

x	$-\infty$	$(-\infty, \frac{1}{9})$	$\frac{1}{9}$	$(\frac{1}{9}, \frac{5}{9})$	$\frac{5}{9}$	$(\frac{5}{9}, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow\frown$	$\frac{499}{243}$	$\searrow\frown$	$\frac{371}{243}$	$\searrow\smile$	1	$\nearrow\smile$	$+\infty$

Na podstawie tej tabeli słuchacze mogą teraz naszkicować wykres rozważanej funkcji, do czego zachęcam. Można następnie porównać swój rysunek z wykresem otrzymanym w którymś z polecanych na wcześniejszych wykładach programów rysowania wykresów funkcji.

6.2.2 Funkcja wymierna

Rozważmy prosty przykład funkcji wymiernej (Niedziałowski, Kowalczyk, Obczyński 2013, strony 165–167):

$$f(x) = \frac{2 \cdot x}{2 - x^2}.$$

Ponieważ wyrażenie w mianowniku nie może przyjmować wartości 0, więc nasza funkcja jest określona poza punktami, dla których $2 - x^2 = 0$, czyli poza punktami $x = -\sqrt{2}$ oraz $x = \sqrt{2}$. Tak więc, dziedziną badanej funkcji jest zbiór: $(-\infty, \sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

Trzeba obliczyć granice funkcji na krańcach jej przedziałów określoności (zaznaczamy z jakiego typu granicami mamy do czynienia):

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2 \cdot x}{2 - x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{\frac{2}{x} - x} =^{[\frac{2}{+\infty}]} 0$

2. $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^-} \frac{2 \cdot x}{2 - x^2} =^{[\frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{0^-}]} +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^+} \frac{2 \cdot x}{2 - x^2} =^{[\frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{0^+}]} -\infty$

4. $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} \frac{2 \cdot x}{2 - x^2} =^{[\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{0^+}]} +\infty$

5. $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} \frac{2 \cdot x}{2 - x^2} =^{[\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{0^-}]} -\infty$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot x}{2 - x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\frac{2}{x} - x} =^{\left[\frac{2}{-\infty}\right]} 0.$

Widzimy zatem, że proste o równaniach $x = -\sqrt{2}$ oraz $x = \sqrt{2}$ są asymptotami pionowymi funkcji f. Dodatkowo, widać też z tych obliczeń, że prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą funkcji f.

Obliczamy pierwszą i drugą pochodną badanej funkcji, korzystając ze wzorów na pochodną ilorazu funkcji:

$f'(x) = (\frac{2 \cdot x}{2 - x^2})' = \frac{2 \cdot (2 + x^2)}{(2 - x^2)^2}$

$f''(x) = (\frac{2 \cdot (2 + x^2)}{(2 - x^2)^2})' = \frac{4 \cdot x \cdot (x^2 + 6)}{(2 - x^2)^3}$

Pierwsza pochodna funkcji f jest – jak widać – dodatnia we wszystkich punktach należących do dziedziny funkcji f. A zatem f jest funkcją rosnącą w każdym z przedziałów $(-\infty, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, +\infty)$.

Mamy $f''(x) = 0$ tylko dla $x = 0$. Ponadto, warunek $f''(x) > 0$ jest kolejno równoważny następującym warunkom:

1. $\frac{4 \cdot x \cdot (x^2 + 6)}{(2 - x^2)^3} > 0$
2. $4 \cdot x \cdot (x^2 + 6) \cdot (2 - x^2) > 0$
3. $x \cdot (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) < 0$

Wnioskujemy z tego, że $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$. W konsekwencji, $f''(x) < 0$ dla $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. Tak więc:

1. W przedziałach $(-\infty, -\sqrt{2})$ oraz $(0, \sqrt{2})$ funkcja jest wypukła.
2. W przedziałach $(-\sqrt{2}, 0)$ oraz $(\sqrt{2}, +\infty)$ funkcja jest wklęsła.
3. Funkcja ma więc punkt przegięcia w $x = 0$.

Możemy zebrać w tabeli poczynione wyżej ustalenia:

x	$-\infty$	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, 0)$	0	$(0, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, +\infty)$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\times$	$+$	$+$	$+$	$\times$	$+$	
$f''(x)$		$+$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$	$-$	
$f(x)$	0	$_0 \nearrow^{+\infty} \smile$	$\times$	$_{-\infty} \nearrow \frown$	0	$\nearrow^{+\infty} \smile$	$\times$	$_{-\infty} \nearrow^0 \frown$	0

Na podstawie tej tabeli słuchacze mogą teraz naszkicować wykres rozważanej funkcji, do czego zachęcam. Można następnie porównać swój rysunek z wykresem otrzymanym w którymś z polecanych na wcześniejszych wykładach programów rysowania wykresów funkcji.

6.2.3 Rozkład normalny

Bardzo ważna w zastosowaniach (jako funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej, o czym słuchacze dowiedzą się na zajęciach ze statystyki) jest funkcja:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Zbadamy przebieg zmienności tej funkcji.

Jej dziedziną jest oczywiście cały zbiór $\mathbb{R}$. Jest również widoczne, że funkcja ta nie przyjmuje wartości 0 dla żadnego $x \in \mathbb{R}$, a więc nie ma miejsc zerowych. Dla argumentu $x = 0$ funkcja f przyjmuje następującą wartość:

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}}.$$

Wyznaczamy granice funkcji w nieskończoności:
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$
Obliczamy pierwszą i drugą pochodną badanej funkcji:
$f'(x) = (\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}})' = \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$
$f''(x) = (\frac{-1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}})' = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (x^2 - 1).$
Jest widoczne, że:

1. $f'(x) = 0$ dla $x = 0$.
2. Dla $x \in (-\infty, 0)$ mamy $f'(x) > 0$, a więc funkcja f jest rosnąca w przedziale niewłaściwym $(-\infty, 0)$.
3. Dla $x \in (0, +\infty)$ mamy $f'(x) < 0$, a więc funkcja f jest malejąca w przedziale niewłaściwym $(-\infty, 0)$.
4. Funkcja f ma zatem maksimum lokalne w punkcie $x = 0$.
5. $f''(x) = 0$ dla $x = 1$ lub $x = -1$.
6. Ponieważ dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ mamy $f''(x) > 0$, więc funkcja f jest wypukła w przedziałach niewłaściwych $(-\infty, -1)$ oraz $(1, +\infty)$.
7. Ponieważ dla $x \in (-1, 1)$ mamy $f''(x) < 0$, więc funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-1, 1)$.

8. Funkcja f ma zatem punkty przegięcia dla $x = -1$ oraz $x = 1$.

Ponieważ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, więc prosta $y = 0$ jest asymptotą badanej funkcji. Jest to jej jedyna asymptota.

Możemy zebrać w tabeli poczynione wyżej ustalenia:

x	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow\smile$	$\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot e}}$	$\nearrow\frown$	$\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}$	$\searrow\frown$	$\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot e}}$	$\searrow\smile$	0

Na podstawie tej tabeli słuchacze mogą teraz naszkicować wykres rozważanej funkcji, do czego zachęcam. Można następnie porównać swój rysunek z wykresem otrzymanym w którymś z polecanych na wcześniejszych wykładach programów rysowania wykresów funkcji.

6.2.4 Krzywa logistyczna

Na poprzednim wykładzie wspomnieliśmy o *trendzie logistycznym*, charakterystycznym dla sytuacji, gdy pewna wielkość z początku szybko rośnie, ale po osiągnięciu pewnego poziomu rośnie już wolniej, po czym stabilizuje się. Wspomnieliśmy, że sytuacji takiej odpowiada funkcja:

$$f(x) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c\cdot x}},$$

gdzie $a, b, c > 0$ są pewnymi parametrami. Zbadamy przebieg zmienności tej funkcji. Załóżmy, że badamy ją w przedziale $[0, \infty)$, a zatem to jest jej dziedzina.

Dla $x = 0$ wartość funkcji f jest równa:

$$f(0) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c\cdot 0}} = \frac{a}{1 + b},$$

a więc krzywa ta ma punkt wspólny z osią rzędnych: jest to punkt o współrzędnych $(0, \frac{a}{1+b})$.

Łatwo widać, że funkcja przyjmuje jedynie wartości dodatnie, a więc nie ma ona miejsc zerowych.

Obliczając granicę tej funkcji przy x dążącym do ∞ widzimy, że: $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{1+b\cdot e^{-c\cdot x}} = a$, ponieważ mianownik rozważanego ułamka dąży do 1 przy x dążącym do ∞.

Obliczamy pierwszą oraz drugą pochodną rozważanej funkcji:

$f'(x) = \frac{a\cdot b\cdot c\cdot e^{-c\cdot x}}{(1+b\cdot e^{-c\cdot x})^2}$

$f''(x) = a \cdot b \cdot c^2 \cdot e^{-c \cdot x} \cdot \frac{b \cdot e^{-c \cdot x} - 1}{(1 + b \cdot e^{-c \cdot x})^3}$.

Ponieważ $f'(x) > 0$ w rozważanej dziedzinie, więc funkcja f jest rosnąca w tej dziedzinie. Nie ma zatem ekstremum lokalnego.

Mamy $f''(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \cdot e^{-c \cdot x} = 1$, czyli $e^{-c \cdot x} = \frac{1}{b}$. To zachodzi wtedy, gdy $e^{c \cdot x} = b$, czyli gdy $x = \frac{\ln b}{c}$. Zauważmy, że:

1. Dla $x \in [0, \frac{\ln b}{c})$ mamy $f''(x) > 0$, czyli funkcja f jest wypukła w tym przedziale.

2. Dla $x \in (\frac{\ln b}{c}, \infty) f''(x) < 0$, czyli funkcja f jest wklęsła w tym przedziale.

3. Punkt $(\frac{\ln b}{c}, \frac{a}{2})$ jest punktem przegięcia funkcji f.

Ponieważ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot x}} = a$, więc $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot x}} \cdot \frac{1}{x} = 0$. Wynika z tego, że prosta o równaniu $y = a$ jest asymptotą badanej funkcji. Jest to jej jedyna asymptota (dla funkcji rozważanej w $[0, \infty)$; jeśli rozważamy krzywą logistyczną dla argumentów z $\mathbb{R}$, to asymptotą poziomą jest też prosta o równaniu $y = 0$).

Tabela zmienności funkcji f wygląda zatem następująco:

x	0	$(0, \frac{\ln b}{c})$	$\frac{\ln b}{c}$	$(\frac{\ln b}{c}, \infty)$	∞
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{a}{1+b}$	$\nearrow\smile$	$\frac{a}{2}$	$\nearrow\frown$	a

Na podstawie tej tabeli słuchacze mogą teraz naszkicować wykres rozważanej funkcji, do czego zachęcam. Można następnie porównać swój rysunek z wykresem otrzymanym w którymś z polecanych na wcześniejszych wykładach programów rysowania wykresów funkcji.

7 Zachęta do refleksji

1. Czy w danym przedziale funkcja może mieć tylko skończoną liczbę ekstremów lokalnych (punktów nieciągłości, punktów przegięcia, punktów, w których nie jest różniczkowalna)?

2. Dotąd omawiano pojęcia: granicy, ciągłości i różniczkowalności funkcji jednej zmiennej. W tym przypadku argumenty „dążą" do wybranej wielkości po „drogach" wewnątrz jednowymiarowego kontinuum. A co z funkcjami *wielu* zmiennych (np. dwóch)? Cóż miałoby znaczyć, że ciąg punktów (x_n, y_n) *dąży* do punktu (a, b)?

3. Skoro funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych wyznacza pewną powierzchnię, to czy istnieje odpowiednik pojęcia *stycznej* w tym przypadku?

8 Podsumowanie

To, co należy zapamiętać z niniejszego wykładu:

1. Ekstrema lokalne funkcji.
2. Reguła de l'Hospitala.
3. Wzór Taylora.
4. Procedura badania przebiegu zmienności funkcji.

9 Wybrane pozycje bibliograficzne

Kuratowski, K. 1976. *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Musielak, H., Musielak, J. 2004. *Analiza matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Niedziałowski, K., Kowalczyk, R., Obczyński, C. 2013. *Granice i pochodne. Metody rozwiązywania zadań*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.