Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Rachunek zbiorów

Cele prezentacji

Prezentacje zamieszczane na stronie wykładów stanowią jedynie pomoc dydaktyczną podczas samego wykładu.

- Szerzej każdy z tematów omawiany jest w plikach, zawierających kolejne rozdziały podręcznika, również dostępnych na stronie wykładów.
- Na wykładzie podawane będą liczne przykłady, wspierające rozumienie wprowadzonych pojęć oraz metod.
- Na końcu każdej prezentacji znajduje się ZZZ, czyli lista tego, co należy Zapamiętać-Ze-Zrozumieniem.

Podstawy matematyki

Teoria zbiorów, zwana też po polsku *teorią mnogości* (ang.: *set theory*, niem.: *Mengenlehre*) jest uważana za teorię, na której bazować może całość matematyki.

- Teoria mnogości ma dwa *pojęcia pierwotne*, czyli takie, których się nie definiuje, a jedynie charakteryzuje przez przyjmowane w teorii *aksjomaty*. Są to pojęcia: *zbioru* oraz relacji *bycia elementem* lub inaczej *należenia* (elementu do zbioru).
- Zbiory rozumiemy w sensie *dystrybutywnym*, jako całości złożone z pewnych elementów. Elementy zbioru nie są jego częściami. Każdy zbiór jest wyznaczony przez ogół tworzących go elementów, przy czym ujęcie tych elementów w jedną całość abstrahuje od jakości tych elementów oraz ich uporządkowania.

Notacja

Jeśli przedmiot x jest *elementem* zbioru X, to piszemy $x \in X$. W przeciwnym przypadku piszemy $x \notin X$. Jeśli $x \in X$, to mówimy, że x *należy* do X. Jeśli $x \notin X$, to mówimy, że x *nie należy* do X. Dwie proste metody tworzenia zbiorów to:

- Wyliczenie wszystkich elementów zbioru. *Zbiór* złożony z przedmiotów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczamy przez $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Kolejność wyliczenia elementów zbioru nie ma znaczenia. Np. zbiór złożony z elementów 1, 2, 3 to zbiór $\{1, 2, 3\}$. To ten sam zbiór co zbiór $\{2, 3, 1\}$.
- Podanie wspólnej własności. Zbiór złożony z elementów posiadających własność W oznaczamy przez $\{x : x \text{ ma własność } W\}$. Np. zbiór wszystkich liczb parzystych to zbiór złożony ze wszystkich liczb, które są podzielne bez reszty przez liczbę 2.

Uwaga: nie każda własność wyznacza zbiór!

Rozważmy własność: „nie być swoim elementem”.

1. Niech $z = \{x : x \notin x\}$.
2. Pytamy: czy $z \in z$? Jeśli tak, to z powinien spełniać warunek definicyjny, czyli powinno być: $z \notin z$.
3. Pytamy: czy $z \notin z$? Jeśli tak, to z powinien spełniać zaprzeczenie warunku definicyjnego, czyli powinno być tak, że nie zachodzi $z \notin z$. Skoro tak (podwójna negacja), to $z \in z$.
4. Otrzymaliśmy więc kłopotliwy wynik: jednocześnie $z \in z$ oraz $z \notin z$.
5. Oznacza to, że własność „nie być swoim elementem” nie nadaje się na własność definiującą dobrze określony zbiór.

Unikamy pułapek tego rodzaju, precyzując z góry *uniwersum*, z którego wyróżniamy zbiory przedmiotów, mających pewne własności.

Uniwersum rozważań. Zbiór pusty

Niech U będzie zbiorem. *Zbiór* (wszystkich) elementów zbioru U, które spełniają warunek $\varphi(x)$ oznaczamy przez $\{x \in U : \varphi(x)\}$. Warunek $\varphi(x)$ określa więc jakąś własność przedmiotów, będących elementami zbioru U, która pozwala wyodrębnić z U ogół przedmiotów mających tę własność.

- Niech np. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
  Wtedy $\{x \in U : x \text{ jest liczbą parzystą}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
- *Zbiór pusty* $\emptyset$ to zbiór, który nie ma żadnego elementu. Istnieje dokładnie jeden zbiór pusty, co za chwilę udowodnimy.
- Każdy zbiór złożony z jednego tylko elementu nazywamy *singletonem*.

Równość i zawieranie

Zbiór X jest *identyczny* ze zbiorem Y wtedy i tylko wtedy, gdy X oraz Y posiadają dokładnie te same elementy. Piszemy wtedy $X = Y$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \neq Y$.

$X = Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- dla każdego x, jeśli $x \in X$, to $x \in Y$ oraz
- dla każdego x, jeśli $x \in Y$, to $x \in X$.

- Zbiór X jest *zawarty* w zbiorze Y, gdy każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y. Piszemy wtedy $X \subseteq Y$ i mówimy, że X jest *podzbiorem* Y.
- Jeśli $X \subseteq Y$ oraz $X \neq Y$, to piszemy $X \subset Y$ i mówimy, że X jest *podzbiorem właściwym* Y. Relację $\subseteq$ nazywamy *inkluzją*, a $\subset$ *inkluzją właściwą*.

Rodziny zbiorów

Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X oznaczamy przez $\wp(X)$ (czasami także przez: 2^X). Zbiór $\wp(X)$ nazywamy *zbiorem potęgowym* zbioru X.

- Elementami zbiorów mogą być inne zbiory. Jeśli X jest zbiorem, którego elementami są zbiory, to mówimy czasem, że X jest *rodziną* zbiorów.
- $\wp(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
- $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- $\wp(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
- Jeśli zbiór X ma n elementów, to jego zbiór potęgowy $\wp(X)$ ma 2^n elementów. Czy potrafisz to *udowodnić*?

Rodzina $\wp(\{1, 2, 3\})$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Strzałki oznaczają zawieranie zbiorów. Jakie strzałki trzeba dodać?

Kilka ważnych zbiorów liczbowych

W szkole omawiano różne rodzaje liczb. W kilku pierwszych wykładach będziemy zakładali, że słuchaczom wystarcza skromna intuicyjna wiedza o wybranych rodzajach liczb. Precyzyjne definicje wymienionych niżej zbiorów liczb zostaną podane nieco później:

- Zbiór $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych.
- Zbiór $\mathbb{Z}$ wszystkich liczb całkowitych.
- Zbiór $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych.
- Zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.
- Zbiór $\mathbb{C}$ wszystkich liczb zespolonych.
- Zbiór $\mathbb{A}$ wszystkich liczb algebraicznych.
- Zbiór $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych.

Marginalne uwagi

- W matematycznej teorii mnogości mówimy jedynie o zbiorach.
- To, czy istnieją jakiekolwiek indywidua, jakiekolwiek obiekty fizyczne, jest dla tej teorii nieistotne.
- Nie chcemy jednak pozbawiać się możliwości *stosowania* formalizmu teorii mnogości w odniesieniu do świata fizycznego, doświadczenia potocznego, konstrukcji pojęciowych w ogólności.
- Tak więc, zgadzamy się na to, aby mówić o zbiorach, których elementami są obiekty fizyczne.
- Wtedy taki zbiór jest już jednak obiektem abstrakcyjnym.

Marginalne uwagi

- W tej prezentacji zbiory oznaczamy zwykle dużymi literami alfabetu łacińskiego (A, B, C,..., X, Y, Z), a ich elementy małymi literami tego alfabetu (a, b, c,..., x, y, z), ewentualnie ze wskaźnikami (X_1, x_1, c_2, itp.).
- Nie jest to konsekwentna konwencja, gdyż elementami zbiorów mogą być inne zbiory.
- Jak zobaczymy podczas dalszych wykładów, zbiory mogą być bardzo skomplikowanymi obiektami.
- Na razie, ze względów dydaktycznych, ograniczamy się do prostych przykładów.

Para uporządkowana

Zbiór $\{x, y\}$ nazywamy *parą nieuporządkowaną* złożoną z x oraz y. Zauważmy, że $\{x, y\}$ jest tym samym zbiorem co zbiór $\{y, x\}$. Niech (x, y) oznacza zbiór $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Wtedy (x, y) nazywamy *parą uporządkowaną* o elemencie pierwszym x oraz elemencie drugim y. Innym często używanym oznaczeniem pary uporządkowanej o elemencie pierwszym x oraz elemencie drugim y jest: $\langle x, y\rangle$.

- $(2^3, 7) = (8, 7)$.
- Jeśli obiekt Jeż nie jest tożsamy z obiektem Jerzy, to $(\text{Jerzy}, \text{Jeż}) \neq (\text{Jeż}, \text{Jerzy})$.
- $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$.

Przyjęcie takiej definicji umożliwia łatwy dowód tego, że: $(x, y) = (u, v)$ dokładnie wtedy, gdy $x = u$ oraz $y = v$. Zachodzi mianowicie:

Twierdzenie. Dla dowolnych x, y, u, v: $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = u$ oraz $y = v$.
Dowód. Aby dowieść tej równoważności, musimy pokazać, że:

1. Jeśli $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$, to $x = u$ oraz $y = v$.
2. Jeśli $x = u$ oraz $y = v$, to $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

Drugi z tych warunków jest oczywisty. Dla dowodu pierwszego z nich, załóżmy, że zachodzi $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$. Musimy pokazać, że wtedy $x = u$ oraz $y = v$. Rozważyć należy dwa przypadki:

- *Przypadek 1*. $x = y$. Wtedy $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}\}$. Z tego wynika, że $\{u, v\} \in \{\{x\}\}$, a więc $u = v = x = y$.
- *Przypadek 2*. $x \neq y$. Mamy: $\{u\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Ponieważ $x \neq y$, więc $\{u\} \neq \{x, y\}$. A zatem $\{u\} = \{x\}$, czyli $u = x$. Dalej, mamy: $\{x, y\} \in \{\{u\}, \{u, v\}\}$. Ponieważ $x \neq y$, więc $\{x, y\} = \{u, v\}$. Skoro $x \neq y$ oraz $u = x$, to $y = v$.

Proste operacje na zbiorach

Niech X oraz Y będą podzbiorami uniwersum U. Definiujemy operacje:

- $X \cap Y = \{x \in U : x \in X \text{ oraz } x \in Y\}$
(*przekrój (iloczyn, część wspólna)* X *i* Y)
- $X \cup Y = \{x \in U : x \in X \text{ lub } x \in Y\}$
(*suma* X *i* Y)
- $X - Y = \{x \in U : x \in X \text{ oraz } x \notin Y\}$
(*różnica* X *i* Y; inne oznaczenie: $X \setminus Y$)
- $X' = \{x \in U : x \notin X\}$
(*dopełnienie* X; inne oznaczenie: $-X$)
- $X \div Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$
(*różnica symetryczna* X *i* Y)
- $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ oraz } y \in Y\}$
(*produkt (iloczyn) kartezjański* X *i* Y).

Przykłady

Jeśli $X \cap Y = \emptyset$, to mówimy, że zbiory X oraz Y są *rozłączne*. Rozłączne są np. zbiory: $\{1, 2, 3\}$ oraz $\{4, 5, 6\}$. Nie są rozłączne np. zbiory: $\{1, 2, 3\}$ oraz $\{3, 4, 5, 6\}$

Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $Y = \{1, 3, 5, 7\}$ będą podzbiorami uniwersum $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Wtedy:

- $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
- $X \cap Y = \{1, 3, 5\}$
- $X - Y = \{2, 4\}$
- $Y - X = \{7\}$
- $X' = \{6, 7, 8, 9\} = U - X$
- $Y' = \{2, 4, 6, 8, 9\} = U - Y$
- $X \div Y = \{2, 4, 7\} = Y \div X$

Przykłady

Niech $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ oraz $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Wtedy $X \times Y$ jest zbiorem wszystkich par (x, y) takich, że x jest jednym z elementów zbioru $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, zaś y jest jednym z elementów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ile jest takich par?

Jak przedstawić graficznie następujące podzbiory iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z}$ oraz $y \in \mathbb{N}\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \geqslant \pi\}$

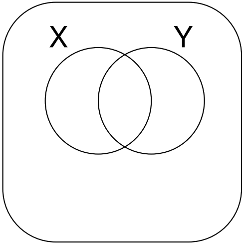
Diagramy Venna

Jest wiele metod graficznej reprezentacji zbiorów, zależności między zbiorami oraz operacji na zbiorach. Najbardziej popularną jest metoda *diagramów Venna*.
Diagramy Venna (dla ustalonej liczby podzbiorów pewnego uniwersum) rysujemy w ten sposób, że:

- Zaznaczamy uniwersum (np. w postaci prostokąta).
- Wewnątrz tego prostokąta zaznaczamy wszystkie rozważane zbiory (np. w postaci, kół, elips, lub innych ładnych kształtów), w ten sposób, aby uzyskać wszystkie możliwe przecięcia (części wspólne) rozważanych figur.

Diagram Venna dla dwóch zbiorów

Diagram Venna dla dwóch podzbiorów ustalonego uniwersum wygląda tak:

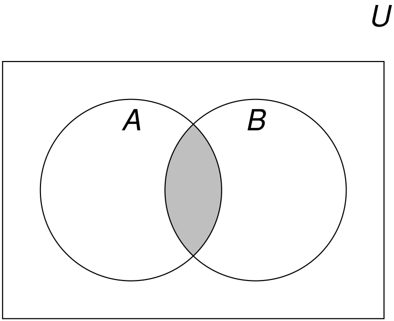


Taka reprezentacja geometryczna pozwala na interpretowanie wyników operacji sumy, iloczynu, różnicy, różnicy symetrycznej, dopełnienia:

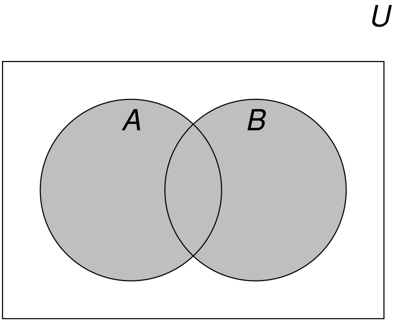
Reprezentacja operacji

- zbiór $X \cup Y$ jest reprezentowany przez sumę obszarów reprezentujących X oraz Y;
- zbiór $X \cap Y$ jest reprezentowany przez część wspólną obszarów reprezentujących X oraz Y;
- zbiór $X - Y$ jest reprezentowany przez tę część obszaru reprezentującego X, która jest poza obszarem reprezentującym Y;
- zbiór $X \div Y$ jest reprezentowany przez sumę tych części obszarów reprezentujących X oraz Y, która leży poza częścią wspólną tych obszarów;
- zbiór X' jest reprezentowany przez obszar dopełniający do pełnego uniwersum obszaru reprezentowanego przez X.

Iloczyn i suma zbiorów

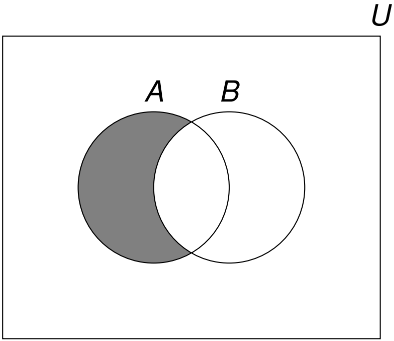


Przekrój $A \cap B$ zbiorów A i B

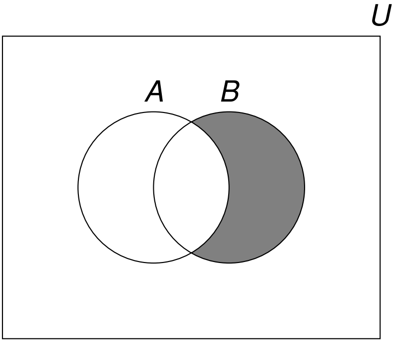


Suma $A \cup B$ zbiorów A i B

Różnica zbiorów

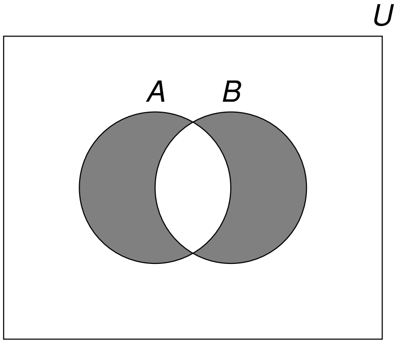


Zbiór $A - B$

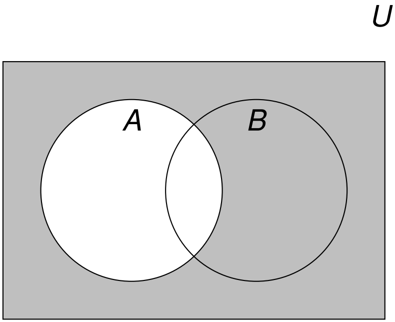


Zbiór $B - A$

Różnica symetryczna zbiorów i dopełnienie zbioru

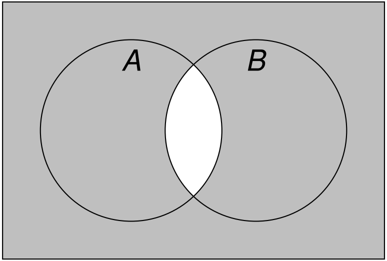


Różnica symetryczna $A \div B$

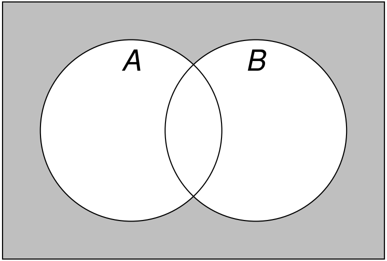


Dopełnienie A' zbioru A

Dopełnienie sumy i iloczynu zbiorów



Dopełnienie $(A \cap B)'$
iloczynu $A \cap B$ zbiorów A i B

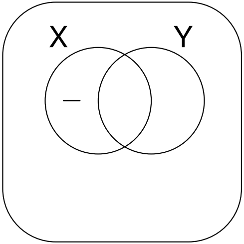


Dopełnienie $(A \cup B)'$
sumy $A \cup B$ zbiorów A i B

Zaznaczanie inkluzji i rozłączności zbiorów

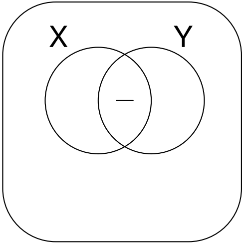
- Powyższe diagramy służyły jedynie do zaznaczenia wyników pewnych operacji na zbiorach.
- Diagramy Venna mogą posłużyć do reprezentowania zachodzenia niektórych relacji między zbiorami, takich jak inkluzja oraz rozłączność zbiorów, a także niepustość zbiorów lub wyniku operacji na zbiorach.
- Podręczniki róznie radzą sobie z tym zagadnieniem. Nasza propozycja jest następująca.
- Warunki prawdziwości zdań stwierdzających zachodzenie pewnych relacji między zbiorami reprezentować można na diagramach Venna w ten sposób, że znak „+” stawiamy w obszarze niepustym, a „–” w obszarze pustym.

Wszystkie X są Y



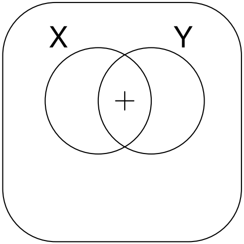
Wszystkie X są Y, czyli $X \subseteq Y$, lub, równoważnie, $X - Y = \emptyset$. Wyrażenie *Wszystkie X są Y* oznacza oczywiście, że każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y.

Żaden X nie jest Y



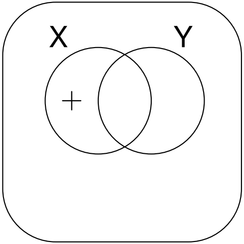
Żaden X nie jest Y, czyli $X \cap Y = \emptyset$. Wyrażenie *Żaden X nie jest Y* oznacza oczywiście, że żaden element zbioru X nie jest elementem zbioru Y.

Niektóre *X* są *Y*



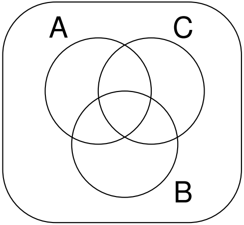
Niektóre X są Y, czyli $X \cap Y \neq \emptyset$. Wyrażenie *Niektóre X są Y* oznacza oczywiście, że co najmniej jeden element zbioru X jest elementem zbioru Y.

Nie wszystkie X są Y

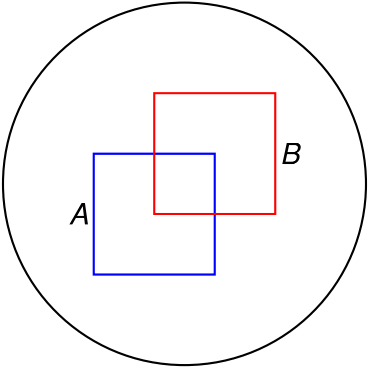


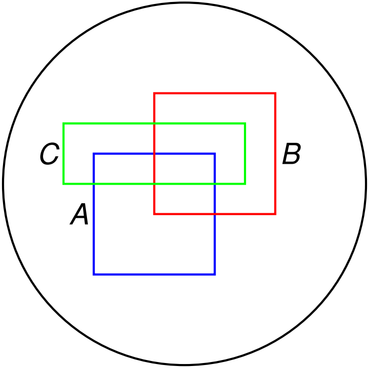
Nie wszystkie X są Y (*Pewien X nie jest Y*), czyli $X - Y \neq \emptyset$. Wyrażenie *Nie wszystkie X są Y* oznacza oczywiście, że pewien element zbioru X nie jest elementem zbioru Y.

Diagramów Venna można używać także dla zaznaczania zachodzenia pewnych relacji między dowolną liczbą zbiorów (ale z pewnymi ograniczeniami dotyczącymi kształtu figur reprezentujących zbiory). Dla trzech zbiorów diagram Venna wygląda tak:



Tak też można

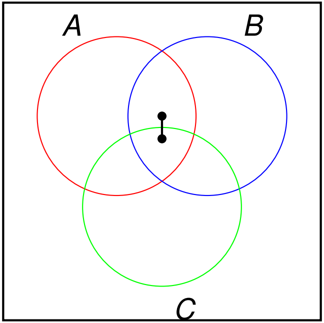




Zaznaczanie niepustości sumy obszarów

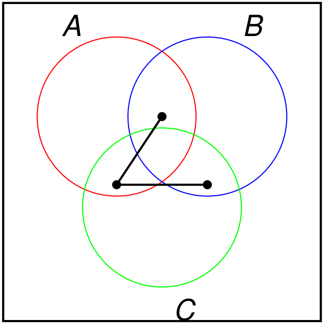
- W przypadku niepustości *sumy* obszarów na diagramach Venna stawiamy znak „$+$" na granicy tych obszarów lub rysujemy kreseczkę przecinającą granicę tych obszarów zakończonej np. kropeczką w każdym składniku rozważanej sumy.
- Ta druga metoda daje się zastosować także w przypadku zaznaczania niepustości sumy więcej niż dwóch obszarów.

$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \neq \emptyset$



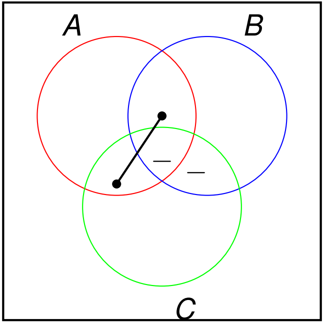
Kreseczka umieszczona na powyższym diagramie reprezentuje niepustość obszaru $A \cap B$, który jest sumą obszarów $A \cap B \cap C$ i $A \cap B \cap C'$.

$(A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B') \cup (A' \cap B \cap C) \neq \emptyset$



Ten diagram reprezentuje sytuację, w której niepusta jest suma: $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B') \cup (A' \cap B \cap C)$.

$(A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B') \cup (A' \cap B \cap C) \neq \emptyset$ i $B \cap C = \emptyset$



Skoro musieliśmy umieścić znak minus w obszarze $B \cap C$, to zamiast niepustości sumy $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B') \cup (A' \cap B \cap C)$ zaznaczamy na diagramie jedynie niepustość sumy $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B')$.

Elementarne części diagramów Venna

Przypuśćmy, że $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są podzbiorami uniwersum U. Wprowadźmy oznaczenia dla dowolnego zbioru $A \subseteq U$:

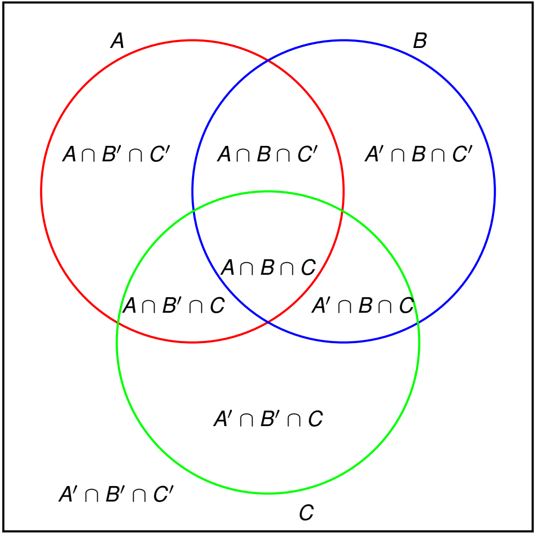
1. $A^0 = A$
2. $A^1 = U - A$

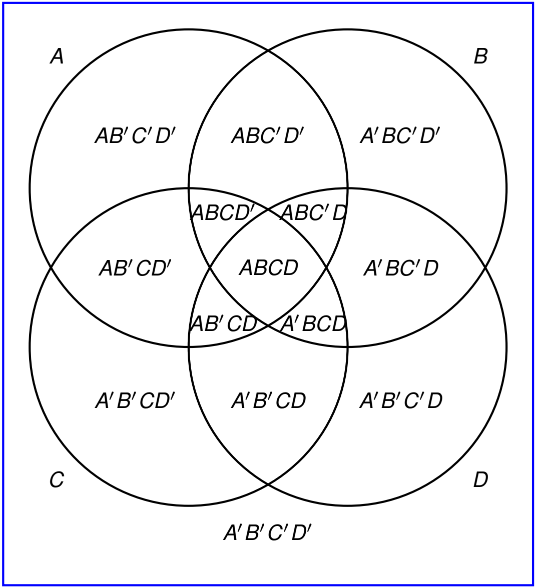
Składową (dla układu zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ w uniwersum U) nazywamy każdy iloczyn o postaci:

$$A_1^{j_1} \cap A_2^{j_2} \cap \ldots \cap A_n^{j_n},$$

gdzie każdy wskaźnik $j_1, j_2, \ldots, j_n$ jest bądź zerem bądź jedynką. Składowe zależą oczywiście od uniwersum U oraz rozważanych podzbiorów A_1, A_2, ..., A_n uniwersum U.
Liczbę wszystkich składowych dla układu n zbiorów łatwo ustalić: jest ona równa 2^n. Czy słuchacze zechcą podać uzasadnienie?

Składowe dla układu trzech zbiorów

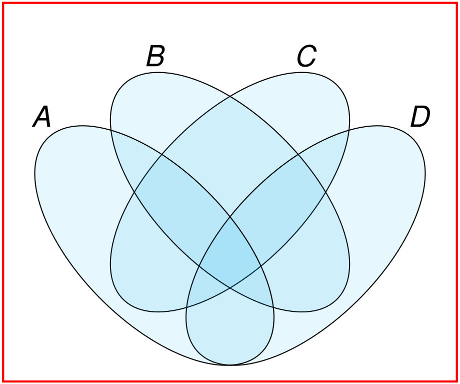




To NIE jest poprawny diagram Venna! Brak $A'BCD'$ i $AB'C'D$.

- Diagram Venna dla czterech zbiorów reprezentowanych przez koła jest niemożliwy.
- W diagramach Venna dla n zbiorów, gdzie $n \geqslant 4$ trzeba używać innych figur geometrycznych reprezentujących zbiory.
- Dla czterech zbiorów mogą to być np. elipsy.
- Im więcej rozważamy zbiorów, tym bardziej skomplikowane są reprezentujące je figury geometryczne.

Diagram Venna dla czterech zbiorów



Mamy 16 składowych, czyli tyle, ile jest potrzebne w przypadku czterech zbiorów. Ćwiczenie: zaznacz w każdym obszarze odpowiednią składową.

Uczciwi, inteligentni, sympatyczni

Co najmniej jeden uczciwy jest sympatyczny. Nie wszyscy są uczciwi. Każdy jest uczciwy lub inteligentny lub sympatyczny. Wszyscy inteligentni są uczciwi lub sympatyczni. Wszyscy uczciwi inteligentni są sympatyczni. Wszyscy sympatyczni są uczciwi lub inteligentni. Żaden uczciwy sympatyczny nie jest inteligentny.

- Czy z powyższych przesłanek wynika logicznie jakiś wniosek dotyczący zależności między inteligentnymi a sympatycznymi?
- Ponadto: co można powiedzieć o uczciwych, którzy nie są sympatyczni (o ile powyższe przesłanki są prawdziwe)?

Rozważanym uniwersum jest tu domyślnie zbiór wszystkich ludzi. Wprowadźmy oznaczenia:

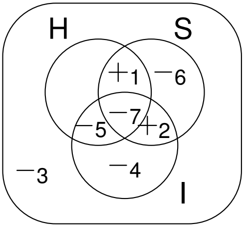
- H — zbiór uczciwych
- I — zbiór inteligentnych
- S — zbiór sympatycznych.

Rozważane przesłanki mają następujące schematy:

1. $H \cap S \neq \emptyset$
2. $H' \neq \emptyset$
3. $(H \cup I \cup S)' = \emptyset$
4. $I \subseteq (H \cup S)$
5. $(H \cap I) \subseteq S$
6. $S \subseteq (H \cup I)$
7. $I \cap (H \cap S) = \emptyset$.

Ważne: najpierw minusy, potem plusy

Zaznaczając na diagramie Venna treść powyższych warunków, najpierw ustalamy, które obszary są puste (co stwierdzają warunki: 3, 4, 5, 6, 7), a potem, które obszary są niepuste (co stwierdzają warunki: 1 i 2):

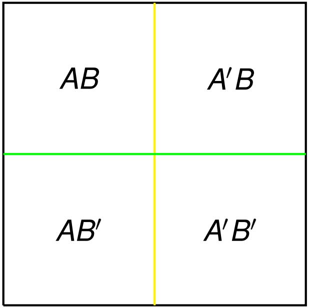


Z powyższego diagramu widać m.in., że (przy prawdziwości przesłanek):

- *Istnieją inteligentni i sympatyczni. Wszyscy inteligentni są sympatyczni. Istnieją sympatyczni, którzy nie są inteligentni, ale są uczciwi.*
- *Jeśli ktoś jest uczciwy, ale nie jest sympatyczny, to nie jest inteligentny. Nie wiadomo jednak, czy istnieją uczciwi niesympatyczni, którzy nie są inteligentni.*

Inną metodą graficzną reprezentacji zależności między zbiorami są *diagramy Carrolla*.

Diagramy Carrolla dla dwóch i trzech zbiorów



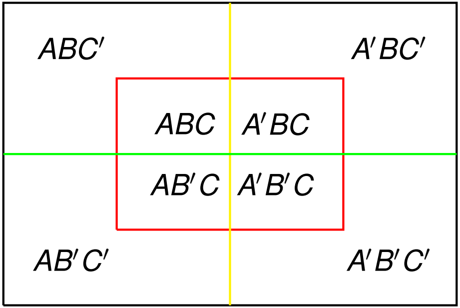
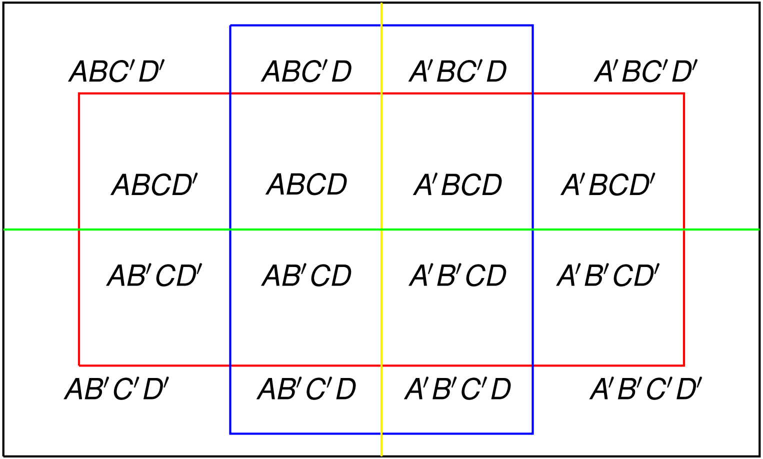


Diagram Carrolla dla czterech zbiorów



Co można udowodnić o zbiorach?

Prawa rachunku zbiorów to twierdzenia, które zachodzą dla dowolnych zbiorów. Każde takie twierdzenie wymaga dowodu.

- W przypadku, gdy jest ono implikacją o poprzedniku φ oraz następniku ψ (czyli ma postać *jeśli* φ*, to* ψ), to jego dowód polega na wyprowadzeniu ψ przy założeniu φ.
- W przypadku, gdy twierdzenie ma postać równoważności, czyli jest postaci φ *wtedy i tylko wtedy, gdy* ψ, to dowód takiej równoważności polega na przeprowadzeniu dowodów obu implikacji: *jeśli* φ*, to* ψ oraz *jeśli* ψ*, to* φ.
- Dla dowodu, że implikacja *jeśli* φ*, to* ψ ***nie jest*** prawem rachunku zbiorów, wystarczy podać przykład zbiorów spełniających warunek φ, lecz nie spełniających warunku ψ.

Przykłady dowodów

Pokażemy, że $x \subseteq y$ jest równoważne z $x - y = \emptyset$. Trzeba zatem udowodnić obie implikacje:

1. *Jeśli $x \subseteq y$, to $x - y = \emptyset$.*
2. *Jeśli $x - y = \emptyset$, to $x \subseteq y$.*

Dla dowodu 1) zakładamy, że $x \subseteq y$. Oznacza to, że każdy element zbioru x jest też elementem zbioru y. To jednak znaczy tyle, że nie ma w x elementów, które byłyby poza zbiorem y. To z kolei jest tym samym, co stwierdzenie, że $x - y = \emptyset$.
Dla dowodu 2) zakładamy, że $x - y = \emptyset$. Oznacza to, że nie ma w x elementów, które byłyby poza zbiorem y. To zaś jest równoznaczne ze stwierdzeniem, że każdy element zbioru x jest też elementem zbioru y, czyli że $x \subseteq y$.

Przykłady dowodów

Jeśli $x \subseteq y$ oraz $y \cap z = \emptyset$, to $x \cap z = \emptyset$.

- Załóżmy, że $x \subseteq y$ oraz $y \cap z = \emptyset$.
- Drugie z tych założeń oznacza, że zbiory y oraz z nie mają żadnego wspólnego elementu.
- Skoro, na mocy pierwszego z poczynionych założeń wszystkie elementy zbioru x znajdują się wśród elementów zbioru y, to żaden z nich nie może być elementem zbioru z.
- To z kolei oznacza, że $x \cap z = \emptyset$.

Przykłady dowodów

Jeśli $x \subseteq y$ oraz $x \cap z \neq \emptyset$, to $y \cap z \neq \emptyset$.

- Załóżmy, że $x \subseteq y$ oraz $x \cap z \neq \emptyset$.
- Z drugiego z tych założeń wynika, że istnieje element $u \in x \cap z$.
- Jednak skoro $u \in x \cap z$, to zarówno $u \in x$, jak i $u \in z$.
- Skoro $u \in x$, a każdy element zbioru x jest też elementem zbioru y (pierwsze założenie!), to również $u \in y$.
- Mamy więc: $u \in z$ oraz $u \in y$, a zatem $u \in y \cap z$, a to oznacza, że $y \cap z \neq \emptyset$.

W pierwszym rozdziale podręcznika podano przykłady praw rachunku zbiorów, których dowody można przeprowadzić podczas konwersatorium.

Szukanie kontrprzykładów

Pokażemy, że pewne implikacje *nie są* prawami rachunku zbiorów.

1. Implikacja: *jeśli* $x \subseteq y$*, to* $y \subseteq x$ nie jest prawem rachunku zbiorów. Jeśli np. $x = \{1, 2\}$, zaś $y = \{1, 2, 3\}$, to zachodzi poprzednik tej implikacji, a nie zachodzi jej następnik.
2. Implikacja: *jeśli* $x \in y$ *oraz* $y \in z$*, to* $x \in z$ nie jest prawem rachunku zbiorów. Można bowiem zbudować zbiory x, y oraz z takie, że $x \in y$ oraz $y \in z$, ale $x \notin z$. Na przykład: $x = \{1, 2\}$, $y = \{3, \{1, 2\}, 4\}$, $z = \{1, \{3, \{1, 2\}, 4\}, 7\}$ są takimi zbiorami.
3. Implikacja: *jeśli* $x \subseteq y$ *oraz* $y \cap z \neq \emptyset$*, to* $x \cap z \neq \emptyset$ nie jest prawem rachunku zbiorów. Można bowiem zbudować zbiory x, y oraz z takie, że $x \subseteq y$ oraz $y \cap z \neq \emptyset$, ale $x \cap z = \emptyset$. Na przykład: $x = \{1, 2, 3\}$, $y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $z = \{4, 5\}$ są takimi zbiorami.

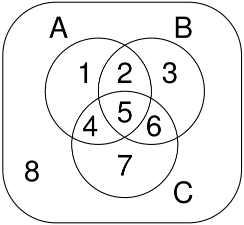
Dowody wykorzystujące diagramy Venna

Pewnych praw rachunku zbiorów można dowodzić, posługując się (dobrze sporządzonymi!) diagramami Venna. Gdy np. mamy dowieść równości, w której zarówno po jej lewej jak i prawej stronie występują jedynie operacje sumy, iloczynu, różnicy, dopełnienia, różnicy symetrycznej, to rysujemy diagramy Venna dla każdej ze stron takiej równości i zaznaczamy (np. obszarem zacieniowanym) zbiór, który jest wynikiem stosowania wymienionych operacji. Jeśli otrzymane reprezentacje graficzne dla lewej i prawej strony równości dają jako zacieniowany ten sam obszar, to uznajemy, że rozważana równość została udowodniona.

Należy jednak wyraźnie podkreślić, że nie jest to metoda, którą można stosować dla dowodzenia całkiem dowolnych praw rachunku zbiorów. W ogólnym przypadku dowody przebiegają tak, jak w podanych wyżej przykładach.

Kontrprzykłady a diagramy Venna

- Można natomiast skutecznie wykorzystywać diagramy Venna (a także diagramy Carrolla) np. dla pokazania, że dana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.
- Znalezienie kontrprzykładu dla równości $A - (B - C) = A \cup (C - B)$ polega na podaniu takich zbiorów A, B i C, że wynik operacji po lewej stronie tej równości nie będzie tożsamy z wynikiem operacji po prawej stronie.
- Można narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości.
- Jeśli wynik wykonanych operacji po lewej stronie nie będzie tożsamy z wynikiem operacji wykonanych po prawej stronie, to podane zbiory stanowią kontrprzykład, że rozważana równość nie jest prawem rachunku zbiorów.



- $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$
- $B - C = \{2, 3\}$, $A - (B - C) = \{1, 4, 5\}$
- $C - B = \{4, 7\}$, $A \cup (C - B) = \{1, 2, 4, 5, 7\}$
- $A - (B - C) = \{1, 4, 5\} \neq \{1, 2, 4, 5, 7\} = A \cup (C - B)$.

Myśl przekornie!

W ramach każdego wykładu zamieszczać będziemy przykłady pytań, które zadawać mogą sobie słuchacze. Prowadzący wykład jest oczywiście gotów do udzielenia odpowiedzi na te pytania, można je również rozważyć podczas konwersatorium.

- Czy można *wszystkie* zbiory zebrać w jeden zbiór?
- Czy dowolna własność wyznacza jakiś zbiór?
- Czy ręka jest zbiorem palców?
- Czy zbiór może mieć *rozmyte granice*?
- Czy liczby są zbiorami?
- Czy można *opisać* rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$?
- Czy można narysować diagram Venna dla *dowolnej* skończonej liczby zbiorów?

Co musisz ZZZ (Zapamiętać-Ze-Zrozumieniem):

- Sposoby określania zbiorów: wyliczenie elementów, podanie własności wspólnej elementom.
- Uniwersum rozważań, zbiór pusty, singleton.
- Równość zbiorów, inkluzja (zawieranie), rozłączność.
- Para uporządkowana.
- Operacje na zbiorach: suma, iloczyn, różnica, dopełnienie, różnica symetryczna, produkt kartezjański.
- Diagramy Venna. Zaznaczanie zależności między zbiorami na tych diagramach.
- Składowe.
- Prawo rachunku zbiorów. Jak pokazujemy, że coś jest prawem? Jak pokazujemy, że coś nie jest prawem?