Wstęp do Matematyki (3)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Ważne typy relacji

Wprowadzenie

Kombinacje własności relacji definiują ważne typy relacji, m.in.:

- równoważności
- podobieństwa
- opozycje
- różne typy porządków.

Relacje tych typów używane są powszechnie np. do opracowywania danych i przetwarzania informacji.

Typy relacji

Mówimy, że relacja $R \subseteq U \times U$ jest:

- *relacją równoważności*, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia
- *relacją podobieństwa* (*tolerancji*), gdy jest zwrotna i symetryczna
- *relacją opozycji*, gdy jest przeciwzwrotna i symetryczna
- *preporządkiem*, gdy jest zwrotna i przechodnia
- *częściowym porządkiem*, gdy jest antysymetrycznym preporządkiem
- *ostrym częściowym porządkiem*, gdy jest asymetryczna i przechodnia
- *liniowym porządkiem*, gdy jest spójnym porządkiem częściowym
- *ostrym liniowym porządkiem*, gdy jest spójnym ostrym porządkiem częściowym
- *dobrym porządkiem*, gdy jest porządkiem częściowym i dla każdego niepustego zbioru $X \subseteq U$ istnieje element x taki, że dla wszystkich $y \in X$ zachodzi xRy.

Typy relacji

Niech R będzie relacją w uniwersum U i niech $X \subseteq U$. Mówimy, że X jest:

- *zbiorem R-spójnym*, gdy xRy dla wszystkich $x, y \in X$
- *R-klasą*, gdy X jest $\subseteq$-maksymalnym zbiorem R-spójnym
- *zbiorem R-rozproszonym*, gdy dla żadnych $x, y \in X$ nie zachodzi xRy
- *zbiorem R-pochłaniającym*, gdy dla każdego $y \in U$ istnieje $x \in X$ taki, że xRy
- *R-łańcuchem*, gdy $R \cap X^2$ jest liniowym porządkiem.

Zamiast terminu „R-pochłaniający" używamy też terminu „R-gęsty". Jeśli R jest częściowym porządkiem w U, to zbiory R-rozproszone nazywa się też R-antyłańcuchami.

Typy relacji

Mówimy, że rodzina $\mathbf{X}$ niepustych podzbiorów uniwersum U jest:

- *pokryciem* U, gdy $\bigcup \mathbf{X} = U$
- *podziałem* U, gdy $\mathbf{X}$ jest pokryciem U i elementy $\mathbf{X}$ są parami rozłączne.

- *Skrzyżowaniem* podziałów $\mathbf{X} = \{X_i : i \in I\}$ oraz $\mathbf{Y} = \{Y_j : j \in J\}$ uniwersum U nazywamy rodzinę $\{X_i \cap Y_j : i \in I, j \in J\}$.
- Podziały $\mathbf{X} = \{X_i : i \in I\}$ oraz $\mathbf{Y} = \{Y_j : j \in J\}$ uniwersum U są *niezależne*, gdy ich skrzyżowanie jest podziałem U.

Jeśli $R \subseteq X \times X$ i $A \subseteq X$, to *obcięciem* relacji R do zbioru A nazywamy relację $R \restriction A = R \cap (A \times A)$.

Równoważności

Jeśli R jest relacją równoważności w uniwersum U, to:

- $[x]_R = \{y : xRy\}$ nazywamy *klasą równoważności elementu $x \in U$* (albo: *klasą abstrakcji elementu x względem relacji R*)
- $U/R = \{[x]_R : x \in U\}$, czyli rodzinę klas abstrakcji względem relacji R wszystkich elementów U nazywamy *zbiorem ilorazowym* (uniwersum U względem relacji R).

Wtedy:

- U/R jest zbiorem wszystkich R-klas relacji R.
- U/R jest podziałem U.

Jeśli $\mathbf{A}$ jest podziałem U, to równoważnością jest relacja: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $x, y \in A$ dla pewnego $A \in \mathbf{A}$.

Równoważności: przykłady

Przykłady relacji równoważności

- Dla dowolnego zbioru X, relacja i_X jest równoważnością.
- Dla dowolnego zbioru X, relacja równoliczności określona na $\wp(X)$ jest równoważnością.
- Niech $f : X \to Y$. Wtedy $ker(f) = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$ jest równoważnością na X (*jądro funkcji f*).
- Przypuśćmy, że znamy zbiór wszystkich liczb całkowitych $\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ oraz relację podzielności liczb. Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n relacja $\equiv_n \subseteq \mathbb{Z}^2$ określona wzorem:
  $x \equiv_n y$ wtedy i tylko wtedy, gdy n dzieli bez reszty różnicę $x - y$
  jest relacją równoważności.
  Dla każdego n mamy: $\mathbb{Z}/\equiv_n = \{[0]_{\equiv_n}, [1]_{\equiv_n}, [2]_{\equiv_n}, \ldots, [n-1]_{\equiv_n}\}$.

Równoważności: przykłady

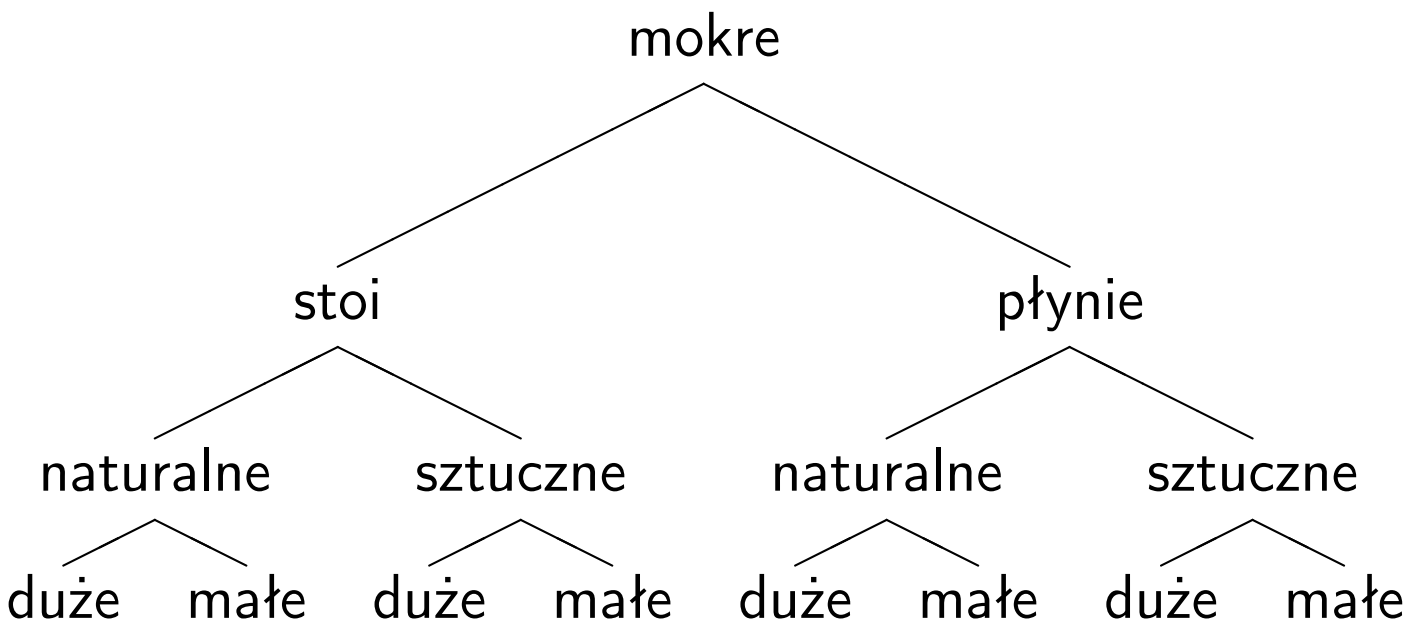
Rozważmy trzy podziały pewnych mokrych obiektów:

	płynie	stoi	naturalne	sztuczne	duże	małe
der Fluß	TAK		TAK		TAK	
der Bach	TAK		TAK			TAK
der Kanal	TAK			TAK	TAK	
der Graben	TAK			TAK		TAK
die See		TAK	TAK		TAK	
der Tümpel		TAK	TAK			TAK
der Teich		TAK		TAK	TAK	
das Becken		TAK		TAK		TAK

Jaki proponujesz czwarty podział, aby odróżnić *die See* od *der See*?

Równoważności: przykłady

Te trzy podziały reprezentować można też poprzez *drzewo*:



Rozważane trzy podziały są niezależne. Ich skrzyżowaniem jest podział na zbiory jednoelementowe.

Równoważności

Niektóre ważne konstrukcje z wykorzystaniem równoważności.

Pokażemy, jak — poprzez tworzenie zbiorów ilorazowych odpowiednich równoważności — konstruuje się zbiory wszystkich liczb:

- *całkowitych* $\mathbb{Z}$
- *wymiernych* $\mathbb{Q}$
- *rzeczywistych* $\mathbb{R}$.

Zbiorem, od którego zaczynamy te konstrukcje jest zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Istnienie tego zbioru gwarantuje *aksjomat nieskończoności* formułowany w *teorii mnogości Zermelo-Fraenkla*.
Zakłada się także, że określone są operacje: $+$ *dodawania* i *mnożenia* $\cdot$ liczb naturalnych. Ich definicje podaje *aksjomatyczna arytmetyka Peana*.

Konstrukcja liczb całkowitych

Określamy relację $\approx_1 \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$:
$(x, y) \approx_1 (u, v)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x + v = u + y$.

Jest to relacja równoważności na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Zauważmy, że:

- $[(0, 0)]_{\approx_1} = \{(x, x) : x \in \mathbb{N}\}$
- jeśli $x \geqslant y$, to $[(x, y)]_{\approx_1} = [(x - y, 0)]_{\approx_1}$
- jeśli $x \leqslant y$, to $[(x, y)]_{\approx_1} = [(0, y - x)]_{\approx_1}$
  (operacja odejmowania $-$ jest tu dobrze określona!).

Wprowadzamy *oznaczenia*: $\mathbf{k} = [(k, 0)]_{\approx_1}$, $\text{—}\mathbf{k} = [(0, k)]_{\approx_1}$. Wtedy:
$\mathbb{N}/\approx_1 = \{\mathbf{k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\text{—}\mathbf{k} : k \in \mathbb{N}\}$.

Definiujemy zbiór wszystkich liczb *całkowitych*: $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\approx_1$.

Konstrukcja liczb całkowitych

Odwzorowanie $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ określone wzorem $\varphi_1(k) = [(k, 0)]_{\approx_1}$ jest iniekcją. Trzeba jeszcze określić działania arytmetyczne na liczbach całkowitych, ich *dodawanie* $\oplus_1$ oraz *mnożenie* $\odot_1$:

- $[(x, y)]_{\approx_1} \oplus_1 [(u, v)]_{\approx_1} = [x + u, y + v]_{\approx_1}$
- $[(x, y)]_{\approx_1} \odot_1 [(u, v)]_{\approx_1} = [x \cdot u + y \cdot v, u \cdot y + x \cdot v]_{\approx_1}$

Wreszcie, trzeba pokazać, że:

- te definicje są *poprawne* (wynik działania nie zależy od wyboru elementu z klasy abstrakcji)
- $\oplus_1$ i $\odot_1$ „rozszerzają" $+$ i $\cdot$ ze zbioru $\mathbb{N}$ na zbiór $\mathbb{Z}$:
  - $\varphi_1(m) \oplus_1 \varphi_1(n) = \varphi_1(m + n), \quad \varphi_1(m) \odot_1 \varphi_1(n) = \varphi_1(m \cdot n)$

Humanistyczny termin „rozszerzają" zastąpimy później matematycznym terminem „homomorfizm".

Konstrukcja liczb wymiernych

Określamy relację $\approx_2 \subseteq (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{\mathbf{0}\})) \times (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{\mathbf{0}\}))$ wzorem:
$(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \approx_2 (\mathbf{m}, \mathbf{n})$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{k} \odot_1 \mathbf{n} = \mathbf{m} \odot_1 \mathbf{l}$.
Jest to relacja równoważności. *Definiujemy* zbiór wszystkich liczb *wymiernych*: $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{\mathbf{0}\}))/\approx_2$ oraz działania arytmetyczne na liczbach wymiernych, $\oplus_2$ (*dodawanie*) i $\odot_2$ (*mnożenie*):

- $[(\mathbf{k}, \mathbf{l})]_{\approx_2} \oplus_2 [(\mathbf{m}, \mathbf{n})]_{\approx_2} = [((\mathbf{k} \odot_1 \mathbf{n}) \oplus_1 (\mathbf{m} \odot_1 \mathbf{l}), \mathbf{l} \odot_1 \mathbf{n})]_{\approx_2}$
- $[(\mathbf{k}, \mathbf{l})]_{\approx_2} \odot_2 [(\mathbf{m}, \mathbf{n})]_{\approx_2} = [(\mathbf{k} \cdot_1 \mathbf{m}, \mathbf{l} \cdot_1 \mathbf{n})]_{\approx_2}$.

Następnie pokazujemy, że te definicje są *poprawne* (wynik działania nie zależy od wyboru elementu z klasy abstrakcji) oraz że dla iniekcji $\varphi_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ zachodzą:

- $\varphi_2(\mathbf{m}) \oplus_2 \varphi_2(\mathbf{n}) = \varphi_2(\mathbf{m} \oplus_1 \mathbf{n}), \quad \varphi_2(\mathbf{m}) \odot_2 \varphi_2(\mathbf{n}) = \varphi_2(\mathbf{m} \odot_1 \mathbf{n})$.

Konstrukcja liczb wymiernych

Uwaga. Zwykle używa się tego samego symbolu $+$ dla dodawania:

- liczb naturalnych
- liczb całkowitych
- liczb wymiernych.

Podobnie, dla mnożenia w tych zbiorach używa się tego samego symbolu: $\cdot$.

Z czysto formalnego punktu widzenia jest to *niepoprawne*. To świństewko notacyjne jest usprawiedliwione tym, że operacje $+$ i $\cdot$ określone dla liczb naturalnych „rozszerzają" się jednoznacznie (homomorficznie) do odpowiednich operacji na liczbach całkowitych i wymiernych.

W dalszym ciągu będziemy postępowali zgodnie ze wspomnianym zwyczajem, także dla innych funkcji i relacji w $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$.

Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Niech $\mathcal{SEQ}$ będzie zbiorem wszystkich *ciągów podstawowych liczb wymiernych*, tj. zbiorem:
$\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} :$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $m_0 \in \mathbb{N}$ taka,
że dla wszystkich $m, n > m_0$ zachodzi $|f(n) - f(m)| < \frac{1}{k+1}\}$.

Na zbiorze $\mathcal{SEQ}$ określamy relację $\approx_3$ wzorem:
$f \approx_3 g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $m_0 \in \mathbb{N}$ taka, że dla wszystkich $n > m_0$ zachodzi: $|f(n) - f(m)| < \frac{1}{k+1}$.

$\approx_3$ jest relacją równoważności na $\mathcal{SEQ}$. *Definiujemy* zbiór wszystkich liczb *rzeczywistych*: $\mathbb{R} = \mathcal{SEQ}/\approx_3$.

Funkcja $\varphi_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $\varphi_3(q) = [c_q]_{\approx_3}$ (gdzie c_q jest ciągiem stale równym q) jest iniekcją.

Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Definiujemy działania arytmetyczne w $\mathbb{R}$:

- $[f]_{\approx_3} \oplus_3 [g]_{\approx_3} = [f \uplus g]_{\approx_3}$ (*dodawanie*)
- $[f]_{\approx_3} \odot_3 [g]_{\approx_3} = [f \otimes g]_{\approx_3}$ (*mnożenie*)

gdzie dodawanie $\uplus$ i mnożenie $\otimes$ *funkcji* (ze zbioru $\mathbb{N}$ w zbiór $\mathbb{Q}$) rozumiane jest następująco:

- $(f \uplus g)(n) = f(n) \oplus_2 g(n)$, dla $n \in \mathbb{N}$
- $(f \otimes g)(n) = f(n) \odot_2 g(n)$, dla $n \in \mathbb{N}$.

Jak poprzednio, należy dowieść, że wszystkie te definicje są poprawne i że „adekwatnie" określają działania arytmetyczne w $\mathbb{R}$.

Później poznamy inną jeszcze definicję liczb rzeczywistych.

Równoważności

W rodzinie $\prod(X)$ wszystkich relacji równoważności na zbiorze X wprowadzamy relację $\sqsubseteq$ następująco:
$R_1 \sqsubseteq R_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in X$: jeśli xR_1y, to xR_1y.

Wtedy:

- $\sqsubseteq$ jest częściowym porządkiem zbioru $\prod(X)$
- i_X jest elementem $\sqsubseteq$-najmniejszym, a $X \times X$ jest elementem $\sqsubseteq$-największym
- $R_1 \sqsubseteq R_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy podział X/R_1 jest *wpisany* w podział X/R_2, czyli gdy każdy element X/R_2 jest sumą pewnych elementów X/R_1.

Własności algebraiczne układów postaci $\langle \prod(X), \sqsubseteq \rangle$ poznamy później.

Operacje na równoważnościach

Niech R i S będą równoważnościami na X.

- $R \cup S$ jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = S \circ R$
- $R \circ S$ jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = R \cup S$
- $R \odot S$ i $R \oplus S$ są równoważnościami.
- $R \oplus i_X = R$.
- $R \oplus S = (R \odot S)^{tr}$.
- Jeśli $R \circ S = S \circ R$, to $R \circ S = R \oplus S$.

Operacje na równoważnościach

Udowodnimy, dla przykładu, że: złożenie $R_1 \circ R_2$ równoważności R_1 i R_2 jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Najpierw pokazujemy, że jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to zachodzą następujące równości:

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1.$$

Operacje na równoważnościach

Niech $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Pokażemy, że $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością. Po pierwsze, mamy:

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest symetryczna.

Po drugie, mamy:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 = (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest przechodnia.

Zwrotność $R_1 \circ R_2$ jest oczywista, ponieważ R_1 oraz R_2 są zwrotne z założenia.

Podobieństwa i opozycje

Zarówno podobieństwa, jak i opozycje można reprezentować przez systemy postaci $\mathbb{S} = \langle O, F, \phi \rangle$, gdzie:

- O jest zbiorem obiektów;
- F jest zbiorem cech;
- $O = dom(\phi)$ oraz $F = rng(\phi)$;
- relacja $\phi \subseteq O \times F$ zachodzi między obiektem $x \in O$ a cechą $f \in F$ gdy x ma cechę f.

Wtedy:

- $x\ sim_{\mathbb{S}}\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi^{\rightarrow}(x) \cap \phi^{\rightarrow}(y) \neq \emptyset$ jest relacją podobieństwa (posiadanie co najmniej jednej cechy wspólnej)
- $x\ op_{\mathbb{S}}\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi^{\rightarrow}(x) \div \phi^{\rightarrow}(y) \neq \emptyset$ jest relacją opozycji (różnienie się co najmniej jedną cechą).

Podobieństwa

Jeśli R jest relacją podobieństwa w X, to układ $\langle X, R\rangle$ nazywamy *przestrzenią podobieństwa* (*tolerancji*).

Niech (X, R) będzie przestrzenią podobieństwa. Wtedy:

- Rodzina $X//R$ wszystkich R-klas jest pokryciem X.
- $R^+ \subseteq R \subseteq R^{tr}$. Relacje R^+ i R^{tr} sa równoważnościami.
- xRy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $A \in X//R$ taka, że $x, y \in A$.

Bazą przestrzeni $\langle X, R\rangle$ nazywamy każdą $\subseteq$-minimalną rodzinę R-klas $\mathbf{B}$ taką, że dla dowolnych $x, y \in X$:
xRy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $A \in \mathbf{B}$ taka, że $x, y \in A$.
W każdej przestrzeni podobieństwa istnieje (co najmniej jedna) baza.

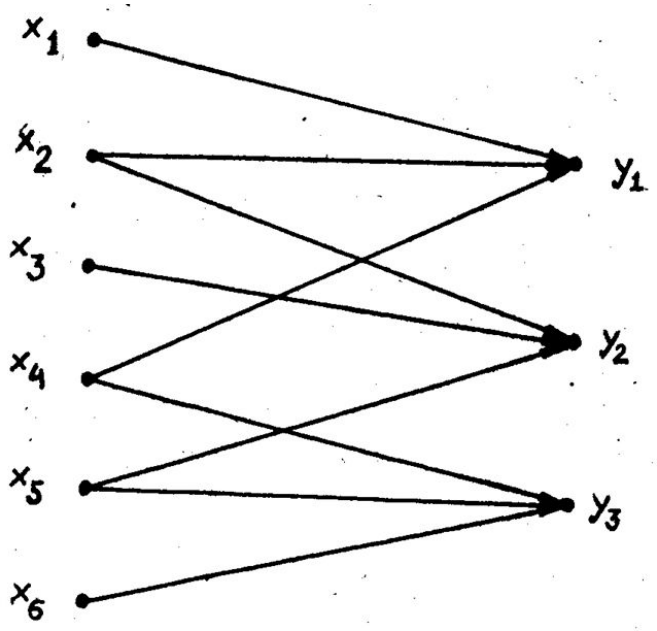
Podobieństwa: przykład

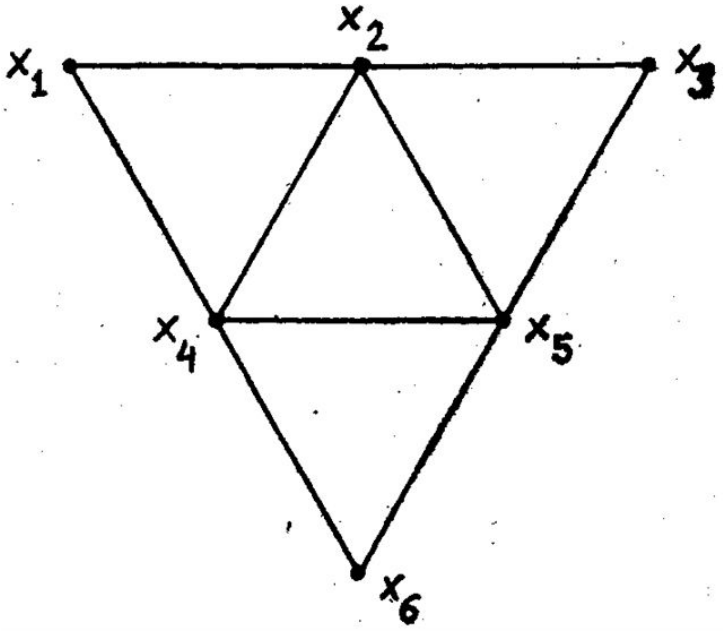
Rozważmy układ $\mathbb{S} = \langle X, Y, \phi \rangle$ złożony ze zbioru obiektów $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, zbioru cech $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ oraz przypisania ϕ cech obiektom:

- $\phi^{\leftarrow}(y_1) = \{x_1, x_2, x_4\}$
- $\phi^{\leftarrow}(y_2) = \{x_2, x_3, x_5\}$
- $\phi^{\leftarrow}(y_3) = \{x_4, x_5, x_6\}$.

Wtedy zbiorem $sim_{\mathbb{S}}$-klas jest rodzina:
$\{\{x_1, x_2, x_4\}, \{x_2, x_3, x_5\}, \{x_4, x_5, x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}\}$.
Jedyną bazą przestrzeni $X, sim_{\mathbb{S}}$ jest rodzina:
$\{\{x_1, x_2, x_4\}, \{x_2, x_3, x_5\}, \{x_4, x_5, x_6\}\}$.

Podobieństwa: przykład

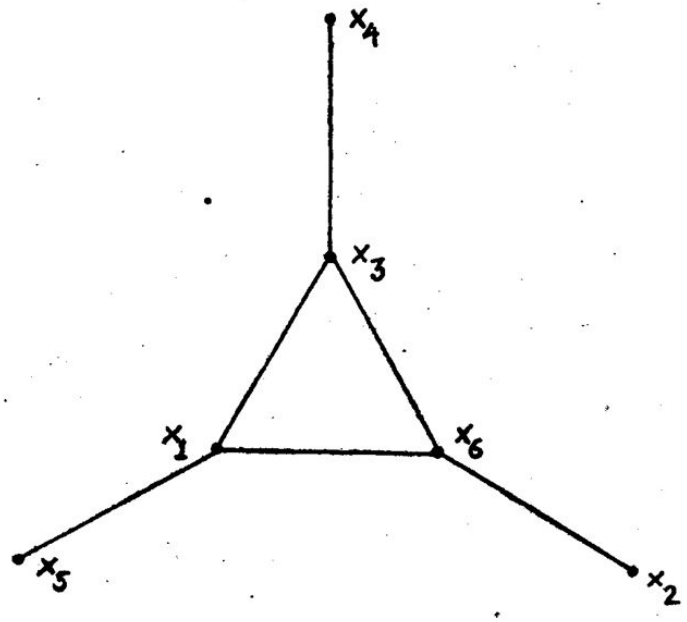




Układ $\mathbb{S} = \langle X, Y, \phi \rangle$ i odpowiadająca mu przestrzeń $\langle X, sim_{\mathbb{S}} \rangle$.

Podobieństwa: przykład

Przestrzeń $\langle X, (sim_{\mathbb{S}})' \cup i_X \rangle$. $(sim_{\mathbb{S}})' \cup i_X$-klasy tej przestrzeni to dokładnie zbiory: minimalne $sim_{\mathbb{S}}$-pochłaniające i jednocześnie maksymalne $sim_{\mathbb{S}}$-rozproszone.



W tej przestrzeni rodzina wszystkich $(sim_{\mathbb{S}})' \cup i_X$-klas jest jedyną bazą.

Podobieństwa a pokrycia

- Jeśli $\langle X, R\rangle$ jest przestrzenią podobieństwa, to pokryciami X są: $X//R$, X/R^{tr}, X/R^{+}, dowolna baza $\mathbf{B}$ tej przestrzeni.
- Jeśli $\mathbf{A}$ jest pokryciem X, to relacją podobieństwa w X jest następująca relacja: $xR_{\mathbf{A}}y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $A \in \mathbf{A}$ taki, że $x, y \in A$.

Niech $\langle X, R\rangle$ będzie przestrzenią podobieństwa, a $\mathbf{A}$ pokryciem X. Równość $X//R_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:

- dla dowolnego $A \in \mathbf{A}$, jeśli $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ oraz $A \subseteq \bigcup \mathbf{B}$, to $\bigcap \mathbf{B} \subseteq A$
- jeśli $B \subseteq X$ nie jest podzbiorem żadnego $A \in \mathbf{A}$, to dla pewnych różnych $x, y \in B$ zbiór $\{x, y\}$ nie jest podzbiorem żadnego $A \in \mathbf{A}$.

Podobieństwa

Dla dowolnej przestrzeni podobieństwa $\langle X, R\rangle$ definiujemy funkcje $G_R : \wp(X) \to \wp(X)$ oraz $cl_R : \wp(X) \to \wp(X)$

- $G_R(A) = \{y \in X : xRy$ dla wszystkich $x \in A\}$
- $cl_R(A) = \{x \in X : yRx$ dla pewnego $y \in A\}$ (*R-domknięcie A*).

Wtedy:

- Dla dowolnego A, A jest R-klasą wtedy i tylko wtedy, gdy $G_R(A) = A$.
- R jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $cl_R(cl_R(A)) = cl_R(A)$ dla wszystkich $A \subseteq X$.

Para (G_R, G_R) jest *odpowiedniością Galois*, a system (X, cl_R) jest *przestrzenią domknięć* (pojęcia te poznamy później).

Podobieństwa

W dowolnej przestrzeni podobieństwa $\langle X, R\rangle$ definiujemy:

- $int_R(A) = \{x \in A :$ dla wszystkich $y \in X$, jeśli xRy, to $y \in A\}$ (*R-wnętrze A*)
- $fr_R(A) = cl_R(A) - int_R(A)$ (*R*-brzeg *A*)
- Dla R dyskretnej niech $d_R(x, y) =$ najmniejsza n taka, że istnieją $x_0, x_1, \ldots x_n$ takie, iż $x = x_0$, $y = x_n$ oraz $x_i R x_{i+1}$ dla $0 \leqslant i < n$ (lub ∞, gdy nie ma takiej n)
- $dist_R(A, B) = \min\{d_R(x, y) : x \in A, y \in B\}$
- $Dist_R(A, B) = \max(\{dist_R(\{x\}, B) : x \in A\} \cup \{dist(A, \{y\}) : y \in B\})$
- $A\ ind_R\ B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq cl_R(B)$ i $B \subseteq cl_R(A)$
- $A\ ins_R\ B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $cl_R(A) \cap B \neq \emptyset$
- $A\ pr_R\ B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $cl_R(A) \cap cl_R B \neq \emptyset$

Podobieństwa

Wtedy:

- $int_R(A) \subseteq A \subseteq cl_R(A)$.
- $d_R(x, y) \neq \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $xR^{tr}y$.
- Relacje ind_R, ins_R oraz pr_R są podobieństwami w rodzinie $\wp(X)$.
- $ind_R \subseteq ins_R \subseteq pr_R$.
- $A\ ins_R\ B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $dist_R(A, B) \leqslant 1$.
- Jeśli $A \cap B \neq \emptyset$, to $A\ ins_R\ B$.
- Następujące warunki są równoważne, dla wszystkich $A, B \neq \emptyset$:
  - $A\ ind_R\ B$
  - $A \cup B \subseteq cl_R(A) \cap cl_R(B)$
  - $Dist_R(A, B) \leqslant 1$.

Podobieństwa

Mówimy, że przestrzeń podobieństwa $\langle X, R\rangle$ jest:

- *prosta*, gdy $R^+ = i_X$
- *regularna*, gdy $(R^+)^{\rightarrow}(x) = \bigcap\{A \in X//R : x \in A\}$ dla wszystkich $x \in X$
- *spójna*, gdy $R^{tr} = X^2$.

Te pojęcia, wraz z wprowadzonymi wcześniej, pozwalają na opis relacji podobieństwa w terminach *algebraicznych* oraz *topologicznych*, o czym przekonamy się nieco później.

Podobieństwa

- Złożenie $R \circ S$ relacji podobieństwa jest relacją podobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = S \circ R$.
- Dla dowolnej relacji zwrotnej R, podobieństwami są: $R \cup R^{-1}$, $R \cap R^{-1}$, $R \circ S \cup S \circ R$.
- Każda relacja podobieństwa jest sumą pewnej rodziny relacji równoważności.

Opozycje

Jeśli R jest relacją opozycji w X i zbiór X ma co najmniej dwa elementy, to układ $\langle X, R\rangle$ nazywamy *przestrzenią opozycji*.

Przez *diagram opozycji* rozumiemy każdy układ $\langle X, F, \phi\rangle$ taki, że:

- X oraz F mają co najmniej dwa elementy
- nie istnieje $x \in X$ taki, że dla wszystkich $y \in X$ oraz wszystkich $a \in F$: $x\ \phi\ a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y\ \phi\ a$
- $dom(\phi) = X$ oraz $rng(\phi) = F$.

Informacje o opozycjach ograniczymy do podania najogólniejszych typów opozycji wyznaczonych przez diagramy opozycji oraz do dwóch przykładów.

Opozycje

Niech $\langle X, F, \phi \rangle$ będzie diagramem opozycji. Wtedy relacjami opozycji na zbiorze X są:

- $x\ op_1\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi^{\rightarrow}(x) \cap \phi^{\rightarrow}(y) = \emptyset$
  (obiekty x i y nie mają żadnych wspólnych cech z F)
- $x\ op_2\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi^{\rightarrow}(x) - \phi^{\rightarrow}(y) \neq \emptyset$ oraz $\phi^{\rightarrow}(y) - \phi^{\rightarrow}(x) \neq \emptyset$
  (x ma cechę, której nie ma y oraz y ma cechę, której nie ma x)
- $x\ op_3\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi^{\rightarrow}(x) \div \phi^{\rightarrow}(y) \neq \emptyset$
  (x i y różnią się co najmniej jedną cechą)
- $x\ op_A\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $a \in A$ taka, że $a \in \phi^{\rightarrow}(x) \div \phi^{\rightarrow}(y)$, gdzie $\emptyset \neq A \subseteq F$
  (x i y różnią się co najmniej jedną cechą z ustalonego podzbioru A wszystkich cech).

Opozycje parametryczne

Opozycje parametryczne są wyznaczone przez układy postaci $\langle X, F, \phi, \mathbf{A}\rangle$, gdzie:

- $\langle X, F, \phi\rangle$ jest diagramem opozycji
- $\mathbf{A}$ jest podziałem F o co najmniej dwóch elementach
- każdy element $\mathbf{A}$ ma co najmniej dwa elementy
- dla każdego $x \in X$ oraz każdego $A \in \mathbf{A}$ istnieje dokładnie jedna $a \in A$ taka, że $x \ \phi \ a$
- dla każdego $A \in \mathbf{A}$, $\bigcup\limits_{a \in A} \phi^{\leftarrow}(a) = X$.

Elementy rodziny $\mathbf{A}$ interpretujemy tu jako *rodzaje cech*, mogących przysługiwać obiektom z X.

Opozycje kontekstowe

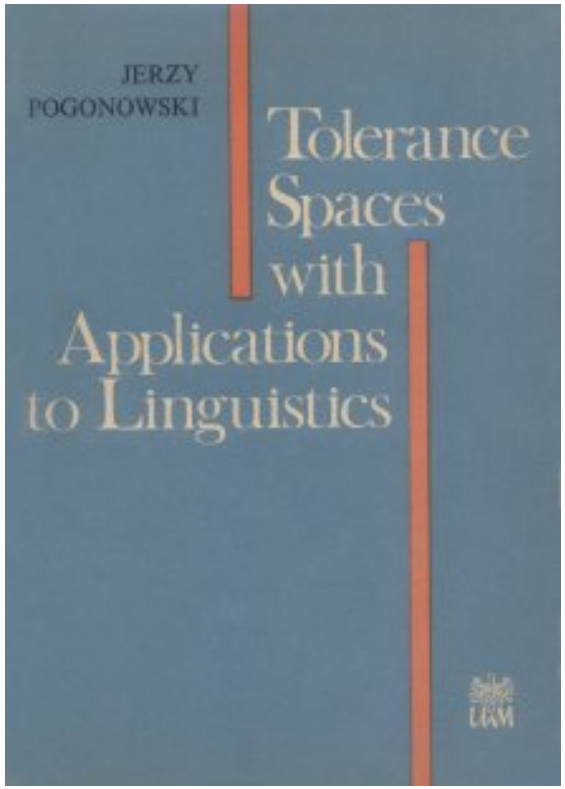
Opozycje kontekstowe są wyznaczone przez układy postaci $\langle X, F, \phi, S\rangle$, gdzie:

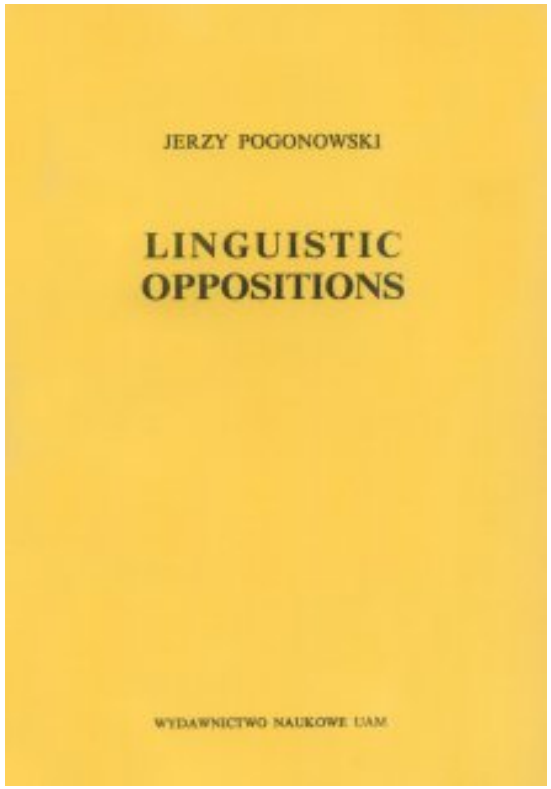
- $\langle X, F, \phi\rangle$ jest diagramem opozycji
- S jest podzbiorem zbioru wszystkich słów $FS(X)$ nad alfabetem X
- $F = \{(u, v) \in (FS(X))^2 : uxv \in S$ dla pewnego $x \in X\}$ (rodzina *kontekstów*)
- dla wszystkich $x \in X$ oraz wszystkich $(u, v) \in (FS(X))^2$: $x\ \phi\ (u, v)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $uxv \in S$.

Ciąg uv jest *konkatenacją* słów u i v.
Opozycje wyznaczane przez tego typu systemy to różnorakie opozycje *dystrybucyjne*.

Podobieństwa i opozycje

O matematycznej teorii relacji podobieństwa oraz opozycji, a także jej zastosowaniach poczytać możesz np. w:





Porządki częściowe

Przykłady.

- Dla każdego X, inkluzja $\subseteq$ jest porządkiem częściowym $\wp(X)$.
- Dla każdego X, inkluzja właściwa $\subset$ jest ostrym porządkiem częściowym $\wp(X)$.
- Relacja R określona (dla liczb naturalnych dodatnich) warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x dzieli bez reszty y jest porządkiem częściowym w $\mathbb{N} - \{0\}$.

Niech R będzie częściowym porządkiem na X. Wtedy istnieje rodzina $\mathbf{A} \subseteq \wp(X)$ oraz bijekcja $f : X \to \mathbf{A}$ takie, że dla wszystkich $x, y \in X$: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) \subseteq\restriction \mathbf{A}\ f(y)$.

Porządki częściowe

Niech R będzie częściowym porządkiem zbioru U i niech $A \subseteq U$. Mówimy, że element $u \in U$ jest:

- *ograniczeniem dolnym* zbioru A, gdy uRx dla wszystkich $x \in A$
- *ograniczeniem górnym* zbioru A, gdy xRu dla wszystkich $x \in A$
- *kresem dolnym* (*infimum*) zbioru A, gdy u jest R-największym z kresów dolnych zbioru A
- *kresem górnym* (*supremum*) zbioru A, gdy u jest R-najmniejszym z kresów górnych zbioru A.

Porządki częściowe

Przykłady.

- Iloczyn $A \cap B$ jest kresem dolnym zbioru $\{A, B\}$ w rodzinie wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru U uporządkowanej częściowo przez relację inkluzji.
- Suma $A \cup B$ jest kresem górnym zbioru $\{A, B\}$ w rodzinie wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru U uporządkowanej częściowo przez relację inkluzji.
- Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb wymiernych x takich, że $x^2 < 2$. Wtedy liczba rzeczywista $\sqrt{2}$ jest kresem górnym zbioru A.
- Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb wymiernych x takich, że $x^2 > 2$. Wtedy liczba rzeczywista $\sqrt{2}$ jest kresem dolnym zbioru A.

Porządki częściowe

Jeśli relacja $\sqsubseteq$ jest preporządkiem na X, to równoważnością na X jest relacja $\equiv$:
$x \equiv y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sqsubseteq y$ oraz $y \sqsubseteq x$.
Następująca relacja $\preceq \subseteq (X/\equiv)^2$ jest wtedy porządkiem częściowym:
$[x]_\equiv \preceq [y]_\equiv$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sqsubseteq y$.

Produktem $\prod\limits_{i \in I}(X_i, \leqslant_i)$ rodziny częściowych porządków $(X_i, \leqslant_i)_{i \in I}$ nazywamy układ $(\prod\limits_{i \in I} X_i, \leqslant)$, gdzie relacja $\leqslant$ zdefiniowana jest przez:
$f \leqslant g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(i) \leqslant_i g(i)$ dla wszystkich $i \in I$.

Produkt $\prod\limits_{i \in I}(X_i, \leqslant_i)$ rodziny częściowych porządków jest częściowym porządkiem.

Porządki liniowe

Przykłady.

- Relacja mniejszości $<$ jest ostrym porządkiem liniowym w $\mathbb{N}$.
- Relacja niewiększości $\leqslant$ jest porządkiem liniowym w $\mathbb{N}$.

Niech A będzie niepustym zbiorem, nazwanym *alfabetem*. Zbiór $A^* = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A^{\{0,1,\ldots,n-1\}}$ nazywamy *przestrzenią słów* nad alfabetem A.
Elementem A^* jest *słowo puste* ε. Zbiór A^* jest uporządkowany częściowo przez inkluzję. Jeśli $\alpha : \{0, 1, \ldots, n\} \to A$ oraz $\beta : \{0, 1, \ldots, n\} \to A$ są słowami z A^*, to ich *konkatenacją* jest słowo:
$\alpha\beta = \alpha \cup \{(i + n + 1, \beta(i)) : i < m\}$.

Jeśli alfabet A jest liniowo uporządkowany, to można określić porządek liniowy również na przestrzeni słów nad alfabetem A:

Porządki liniowe

Niech $\preceq$ będzie liniowym porządkiem w alfabecie A. *Porządkiem leksykograficznym* wyznaczonym przez $\preceq$ nazywamy następującą relację w przestrzeni słów nad A:

$\alpha \preceq_\ell \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi alternatywa:

- $\alpha \subseteq \beta$ lub
- istnieje $n \in dom(\alpha) \cap dom(\beta)$ taka, że:
  - $\alpha(n) \preceq \beta(n)$ oraz
  - dla każdej $k < n$ zachodzi równość $\alpha(k) = \beta(k)$.

Jeśli $\preceq$ jest liniowym porządkiem w alfabecie A, to $\preceq_\ell$ jest liniowym porządkiem w przestrzeni słów nad A.

Porządki liniowe

Zbiór $A \subseteq X$ jest *odcinkiem początkowym* zbioru liniowo uporządkowanego $(X, \leqslant)$, gdy dla wszystkich $x, y \in X$: jeśli $x \in A$ oraz $y \leqslant x$, to $y \in A$.

Zbiór $A \subseteq X$ jest *odcinkiem końcowym* zbioru liniowo uporządkowanego $(X, \leqslant)$, gdy dla wszystkich $x, y \in X$: jeśli $x \in A$ oraz $x \leqslant y$, to $y \in A$.

Zbiór $A \subseteq X$ jest *przedziałem* (domkniętym) zbioru liniowo uporządkowanego $(X, \leqslant)$, gdy
$A = \{x \in X : a \leqslant x \text{ oraz } x \leqslant b \text{ dla pewnych } a, b \in X\}$.

Dobre porządki

Przykłady.

- Relacja $\leqslant$ jest dobrym porządkiem na zbiorze wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$.
- Zbiór wszystkich liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest liniowo uporządkowany przez relację $\leqslant$. Uporządkowanie to nie jest dobrym porządkiem na tym zbiorze.
- Każdy liniowy porządek na zbiorze skończonym jest dobrym porządkiem.

Zasadą dobrego uporządkowania nazywamy zdanie:

W każdym zbiorze istnieje dobry porządek.

Dobre porządki

Selektorem rodziny zbiorów $\{X_i : i \in I\}$ nazywamy każdy zbiór S taki, że:

- dla każdego $i \in I$ istnieje x taki, że $S \cap X_i = \{x\}$
- $S \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$.

Aksjomat wyboru jest następującym zdaniem:

Dla każdej rodziny niepustych i parami rozłącznych zbiorów istnieje selektor.

W innym sformułowaniu: dla każdej relacji równoważności istnieje selektor dla rodziny jej klas.

Dobre porządki

Lemat Kuratowskiego-Zorna. Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Jeśli każdy $\preceq$-łańcuch ma ograniczenie górne, to w X istnieje element $\preceq$-maksymalny.

Następujące twierdzenia są równoważne:

- Zasada dobrego uporządkowania.
- Aksjomat wyboru.
- Lemat Kuratowskiego-Zorna.
- Produkt kartezjański dowolnej rodziny zbiorów niepustych jest niepusty.

Porządki gęste, dyskretne, ciągłe

Przykłady.

- Zbiór wszystkich liczb całkowitych (i każdy jego podzbiór) jest uporządkowany w sposób dyskretny przez relację mniejszości $<$.
- Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przez relację mniejszości $<$ uporządkowany w sposób gęsty.
- Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych także jest uporządkowany w sposób gęsty przez relację mniejszości $<$. Ale liczb rzeczywistych jest ***istotnie więcej*** niż liczb wymiernych.

Konstrukcja liczb rzeczywistych Dedekinda

Przekrojem Dedekinda nazywamy każdą parę (A, B) niepustych podzbiorów zbioru ostro liniowo uporządkowanego $(X, \prec)$ taką, że:

- $A \cup B = X$
- $a \prec b$ dla wszystkich $a \in A$ oraz $b \in B$.

A jest klasą *dolną*, a B klasą *górną* przekroju (A, B).

- Element $x \in X$ jest *elementem rozdzielającym* przekroju (A, B), gdy x jest największym elementem w A lub najmniejszym elementem w B.
- Przekroje w $(X, \prec)$ mogą:
  - mieć dokładnie jeden element rozdzielający;
  - mieć dwa różne elementy rozdzielające; takie przekroje nazywamy *skokami*;
  - nie mieć żadnego elementu rozdzielającego; takie przekroje nazywamy *lukami*.

Konstrukcja liczb rzeczywistych Dedekinda

Widać, że zbiór jest uporządkowany w sposób gęsty, gdy żaden jego przekrój nie jest skokiem.

Mówimy, że zbiór jest uporządkowany w sposób *ciągły*, gdy żaden jego przekrój nie jest ani skokiem, ani luką.

Liczbą rzeczywistą (Dedekinda) nazywamy każdy taki przekrój zbioru wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ uporządkowanego przez relację mniejszości, którego klasa górna nie zawiera elementu najmniejszego. Ogół tych liczb oznaczamy przez $\mathbb{R}_D$.

Przekrój zbioru wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ uporządkowanego przez relację mniejszości jest liczbą *wymierną* (Dedekinda), gdy ma element rozdzielający. Pozostałe liczby rzeczywiste Dedekinda to *liczby niewymierne*.

Konstrukcja liczb rzeczywistych Dedekinda

W zbiorze liczb rzeczywistych Dedekinda trzeba jeszcze określić relacje i operacje arytmetyczne:

- $(A, B) \leqslant_{\mathbb{R}_D} (C, D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq C$
- $(A, B) \oplus_{\mathbb{R}_D} (C, D) = (\{x \oplus_3 y : x \in A, y \in B\}, \{x \oplus_3 y : x \in C, y \in D\})$
- $-_{\mathbb{R}_D}(A, B) = (\{\ominus_3 x : x \in A\}, \{\ominus_3 x : x \in B\})$
- $(A, B) \odot_{\mathbb{R}_D} (C, D) =$
$$= (\mathbb{Q} - \{x \odot_3 y : x \in B, y \in D\}, \{x \odot_3 y : x \in B, y \in D\})$$

gdzie $\oplus_3, \odot_3, \ominus_3$ są dodawaniem, mnożeniem i odejmowaniem liczb wymiernych.

Trzeba też udowodnić, że wszystkie te definicje są poprawne i „adekwatne”.

Operacje na porządkach

- Jeśli R jest preporządkiem (porządkiem częściowym), to R^{-1} jest preporządkiem (porządkiem częściowym).
- Jeśli R i S są preporządkami (porządkami częściowymi, ostrymi porządkami częściowymi), to $R \cap S$ jest preporządkiem (porządkiem częściowym, ostryn porządkiem częściowym)
- Jeśli R i S są porządkami częściowymi (ostrymi porządkami częściowymi), to $R \cup S$ jest porządkiem częściowym (ostryn porządkiem częściowym) wtedy i tylko wtedy, gdy: $(R \circ S) \cup (S \circ R) \subseteq R \cup S$.
- Jeśli R i S są porządkami częściowymi, to $R \cup S$ jest porządkiem częściowym wtedy i tylko wtedy, gdy: $(R \circ S) \cup (S \circ R) \subseteq R \cup S$ oraz $R \cap S^{-1} \subseteq i_X$.
- Jeśli R i S są ostrymi porządkami częściowymi oraz $R \circ S = S \circ R$ i $R \cap S^{-1} = \emptyset$, to $R \circ S$ jest ostrym porządkiem częściowym.

Drzewa

Drzewem nazywamy każdy układ $(X, \preceq)$ taki, że:

- $\preceq$ jest częściowym porządkiem X
- w X istnieje element $\preceq$-najmniejszy (*korzeń* drzewa)
- dla każdego $x \in X$, zbiór $\{y \in X : y \preceq x\}$ jest dobrze uporządkowany.

Elementy drzewa nazywamy jego *wierzchołkami*. Wierzchołki, które nie mają $\preceq$-następników nazywamy *liśćmi* drzewa.

Niech $(X, \preceq)$ będzie drzewem i niech $\prec = \preceq - i_X$. Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w X nazywamy *gałęzią* w X. Jeśli $x \preceq y$, to y nazywamy *potomkiem* x, a x *przodkiem* y. Jeśli $x \preceq -(\preceq)^2 y$, to y nazywamy *bezpośrednim potomkiem* x, a x *bezpośrednim przodkiem* y.

Drzewa

Wysokością wierzchołka x nazywamy liczbę $h(x)$ elementów zbioru $\{y \in X : y \prec x\}$.
n-tym piętrem drzewa nazywamy zbiór $X_n = \{x \in X : h(x) = n\}$.
Supremum wartości $\{n : X_n \neq \emptyset\}$ nazywamy *wysokością* drzewa.

Rzędem wierzchołka x nazywamy moc zbioru wszystkich potomków x.
Rzędem drzewa jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa.
Drzewo jest *skończone*, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony.
Drzewo jest *nieskończone*, jeśli zbiór jego wierzchołków jest nieskończony.
Drzewo jest *rzędu skończonego*, jeśli jego rząd jest liczbą skończoną.

Lemat Königa. Jeśli drzewo rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

Drzewom poświęcone zostaną osobne zajęcia.

Koniec

Zadanie domowe.

- Zapamiętać ze Zrozumieniem definicje typów relacji: równoważności, podobieństwa, opozycji, różnych rodzajów porządku.
- Rozwiązać zadania

205–211 (równoważności)	212–217 (porządki)	243–258 (różne)

ze zbioru *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz.

Uwaga. Bez umiejętności rozwiązywania zadań nie uzyskasz zaliczenia z tego przedmiotu. Wybór należy do ciebie.