Logika algebraiczna 8b

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

- Niech $\mathfrak{M}_i = (\mathbf{A}_i, D_i)$, $i \in I$ będzie rodziną SCI-modeli, gdzie $\mathbf{A}_i = (A_i, \neg^{\mathbf{A}_i}, \rightarrow^{\mathbf{A}_i}, \equiv^{\mathbf{A}_i})$.
- Załóżmy ponadto, że $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $i, j \in I$. Mówimy wtedy, że modele $\mathfrak{M}_i$ i $\mathfrak{M}_j$ są rozłączne.
- Zdefiniujemy model $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$, gdzie $\mathbf{A} = (A, \neg^{\mathbf{A}}, \rightarrow^{\mathbf{A}}, \equiv^{\mathbf{A}})$, w sposób następujący:
    - $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$
    - $D = \bigcup\limits_{i \in I} D_i$
    - Operacje $\neg^{\mathbf{A}}, \rightarrow^{\mathbf{A}}, \equiv^{\mathbf{A}}$ zostaną określone tak, aby D był ultrafiltrem normalnym w $\mathbf{A}$.
    - W poniższych definicjach zakładamy, że $a_i, b_i \in A_i$, $i \in I$.
    - Niech $\mathbf{1}$ będzie ustalonym elementem zbioru D, zaś $\mathbf{0}$ ustalonym elementem zbioru $A - D$.

- $\neg^{\mathbf{A}} a_i = \neg^{\mathbf{A}_i} a_i$
- Dla $a_i, b_j \in A$:
  - $a_i \to^{\mathbf{A}} b_j = a_i \to^{\mathbf{A}_i} b_i$, gdy $i = j$,
  - $a_i \to^{\mathbf{A}} b_j = \mathbf{0}$, gdy $a_i \in D_i$, ale $b_j \notin D_j$,
  - $a_i \to^{\mathbf{A}} b_j = \mathbf{1}$, w pozostałych przypadkach.
- Dla $a_i, b_j \in A$:
  - $a_i \equiv^{\mathbf{A}} b_j = a_i \equiv^{\mathbf{A}_i} b_i$, gdy $i = j$,
  - $a_i \equiv^{\mathbf{A}} b_j = \mathbf{0}$, w przeciwnym przypadku.
- Nietrudno sprawdzić, że zachodzą równoważności:
  - $a_i \notin D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\neg^{\mathbf{A}} a_i \in D$,
  - $a_i \to^{\mathbf{A}} b_j \notin D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \in D$ oraz $b_j \notin D$,
  - $a_i \equiv^{\mathbf{A}} b_j \notin D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \neq b_j$.
- Znaczy to, że D jest normalnym ultrafiltrem w $\mathbf{A}$, czyli że $\mathfrak{M}$ jest SCI-modelem (nazywanym sumą prostą rodziny modeli $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$).

- Nośnikiem zbioru formuł Φ nazywamy zbiór $V(\Phi)$ złożony z tych zmiennych zdaniowych, które występują w co najmniej jednej formule z Φ.
- **Twierdzenie**. Niech Φ_1 i Φ_2 będą zbiorami formuł SCI-języka $\mathcal{L}$. Jeśli oba te zbiory są niesprzeczne i $V(\Phi_1) \cap V(\Phi_2) = \emptyset$, to zbiór $\Phi_1 \cup \Phi_2$ jest niesprzeczny.
- **Dowód**. Jeśli Φ_1 i Φ_2 są niesprzeczne, to istnieją SCI-modele $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ oraz wartościowania v_1 i v_2 takie, że Φ_1 jest spełniony w $\mathfrak{M}_1$ przez v_1, zaś Φ_2 jest spełniony w $\mathfrak{M}_2$ przez v_2.
- Możemy oczywiście założyć, że $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ są rozłączne. Niech $\mathfrak{M}$ będzie sumą prostą $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$.
- Niech v będzie dowolnym wartościowaniem w $\mathfrak{M}$ takim, że $v(p) = v_i(p)$ dla każdej zmiennej $p \in V(\Phi_i)$, $i \in \{1, 2\}$.
- Ponieważ $V(\Phi_1) \cap V(\Phi_2) = \emptyset$, więc istnieje co najmniej jedno takie wartościowanie v. Wtedy v spełnia $\Phi_1 \cup \Phi_2$ w $\mathfrak{M}$, ponieważ v_i spełnia Φ_i w $\mathfrak{M}_i$, a operacje w $\mathfrak{M}$ są zgodne z operacjami w $\mathfrak{M}_i$ ($i \in \{1, 2\}$).
- Na mocy pełności SCI, suma $\Phi_1 \cup \Phi_2$ jest więc zbiorem niesprzecznym. $\square$

Dowodzi się, że jeśli $V(\Phi_1) \cap V(\Phi_2) = \emptyset$, to następujące warunki są równoważne:

- Jeśli Φ_1 i Φ_2 są niesprzeczne, to suma $\Phi_1 \cup \Phi_2$ jest niesprzeczna.
- Jeśli $\varphi \in C(\Phi_1 \cup \Phi_2)$ oraz $V(\{\varphi\}) \cap V(\Phi_2) = \emptyset$, to albo $\varphi \in C(\Phi_1)$ albo Φ_2 jest sprzeczny.

Zachęcamy słuchaczy do lektury artykułów:

- Hawranek, J., Zygmunt, J. 2001. Problematyka adekwatności matryc logicznych w pracach Romana Suszki. W: Omyła, M. (Red.) *Idee logiczne Romana Suszki*, Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 53–71.
- Wójcicki, R. 1970. Some remarks on the consequence operation in sentential logics. *Fundamenta Mathematicae* 58, 269–279.
- Zygmunt, J. 2012. Structural consequence operations and logical matrices adequate for them. W: Jean-Yves Béziau (Ed.) *Universal logic: an anthology. From Paul Hertz to Dov Gabbay*. Birkhäuser, Basel Dordrecht Heidelberg London New York, 163–175.

- **Twierdzenie**. C ma model silnie adekwatny.
- **Dowód**. Niech $\{\Phi_i : i \in I\}$ bedzie rodziną wszystkich maksymalnych teorii C-niesprzecznych w $\mathcal{L}$.
- Na mocy pełności SCI, dla każdego $i \in I$ istnieje model $\mathfrak{M}_i$ oraz wartościowanie v_i w $\mathfrak{M}_i$ takie, że v_i spełnia Φ_i w $\mathfrak{M}_i$.
- Możemy oczywiście założyć, że wszystkie modele $\mathfrak{M}_i = (\mathbf{A}_i, D_i)$ są wzajemnie rozłączne.
- Niech $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ będzie sumą prostą rodziny $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$.
- Pokażemy, że $C = C_{\mathfrak{M}}$.
- Na mocy pełności SCI mamy: $C \leqslant C_{\mathfrak{M}}$, wystarczy więc pokazać, że $C_{\mathfrak{M}} \leqslant C$.
- Przypuśćmy, że $\varphi \notin C(\Gamma)$ dla pewnej formuły φ oraz zbioru formuł Γ.
- Pokażemy, że wtedy $\varphi \notin C_{\mathfrak{M}}(\Gamma)$.

- Jeśli $\varphi \notin C(\Gamma)$, to istnieje maksymalny zbiór C-niesprzeczny Φ_{i_0} taki, że $\Gamma \subseteq \Phi_{i_0}$ i $\varphi \notin \Phi_{i_0}$.
- Niech h będzie wartościowaniem w $\mathfrak{M}$ określonym warunkiem $h(p) = v_{i_0}(p)$ dla każdej zmiennej p.
- Ponieważ wartość każdej formuły przy wartościowaniu v_{i_0} należy do A_{i_0}, więc $\Phi_{i_0} \subseteq h^{-1}(D)$, a to znaczy, że $\Phi_{i_0} \subseteq Sat_h(\mathfrak{M})$.
- Skoro D jest ultrafiltrem, to $h^{-1}(D)$ jest maksymalnym zbiorem C-niesprzecznym, a ponieważ Φ_{i_0} sam jest maksymalnym zbiorem C-niesprzecznym, więc $\Phi_{i_0} = h^{-1}(D)$, a to znaczy, że $\Phi_{i_0} = Sat_h(\mathfrak{M})$.
- Ponieważ $\varphi \notin \Phi_{i_0}$, więc $\varphi \notin Sat_h(\mathfrak{M})$.
- To zaś znaczy, że $\varphi \notin C_{\mathfrak{M}}(\Phi_{i_0})$, czyli $\varphi \notin C_{\mathfrak{M}}(\Gamma)$, co kończy dowód. $\square$