Aksjomaty ekstremalne

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Filozofia matematyki II

Czym są aksjomaty ekstremalne?

Aksjomaty ekstremalne miały zapewniać, że model teorii jest (w określonym sensie, o czym niżej) *minimalny* lub *maksymalny*.

Klasyczne przykłady:

- *Aksjomat zupełności* w *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta (zastąpiony później *aksjomatem ciągłości*). To aksjomat *maksymalności*.
- *Aksjomat (schemat) indukcji* w arytmetyce. To aksjomat *minimalności*.
- *Aksjomat ograniczenia* Fraenkla. (Nie istnieją żadne inne zbiory poza tymi, których istnienie da się dowieść z aksjomatów teorii mnogości). To aksjomat *minimalności*.

Praca Carnap, Bachmann 1936

- Carnap, R. 1958. *Introduction to Symbolic Logic and its Applications*. Courier Dover Publications,
- Carnap, R., Bachmann, F. 1936. Über Extremalaxiome. *Erkenntnis* **6**, 166–188. Przekład angielski (H.G. Bohnert): On Extremal Axioms. *History and Philosophy of Logic* **2** (1981), 67–85.
- Tarski, A., Lindenbaum, A. 1936. Über die Beschränkheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **7**, 15–22.
- Carnap, R. 1930. Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik. *Erkenntnis* **1**, 303–310.
- Carnap, R. 2000. *Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik.* (Hrsg. Thomas Bonk und Jesus Mosterin), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

- Własność Fraenkla-Carnapa; algebry Dedekinda.

Praca Carnap, Bachmann 1936

- Wykorzystanie teorii typów.
- Przykład porównywania modeli: liczby i wektory.

- Korelacje.
- Izomorfizmy zupełne; relacja $\mathit{Ism}_v(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

- Struktury: klasy relacji Ism_v (=klasy modeli zupełnie izomorficznych).
- Relacja $\sqsubset$ (między modelami).
- Podstruktury. Struktury podzielne i niepodzielne.
- Formuły (aksjomaty) strukturalne i diagramy strukturalne.
- Relacja bycia właściwą podstrukturą. Struktury: początkowe, końcowe, izolowane, minimalne, maksymalne.

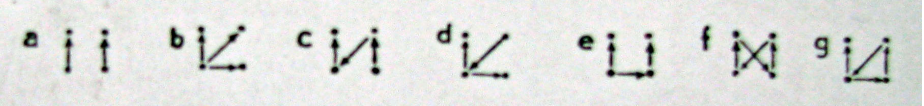
Przykład

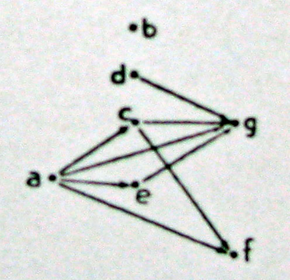
Autorzy rozważają następujący układ aksjomatów dla relacji R:

- $\forall x \forall y \forall z\, ((R(y,x) \wedge R(z,x)) \rightarrow y = z)$
- $\forall x \forall y\, (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$
- $\forall x\, \neg R(x,x)$
- pole relacji R ma dokładnie 4 elementy.

Jest (z dokładnością do izomorfizmu) siedem modeli tych aksjomatów. Które z nich można homomorficznie odwzorować na które? Które modele są względem tej zależności (w terminologii C-B): początkowe, końcowe, izolowane?

Przykład





Rodzaje aksjomatów ekstremalnych

Carnap i Bachmann określają cztery rodzaje aksjomatów ekstremalnych (wszędzie niżej zakłada się, że $\mathfrak{M}$ jest modelem T):

- *Aksjomat modelu minimalnego*.
  $Min_m(T, \mathfrak{M}) \equiv_{df} \neg \exists \mathfrak{N} \, (\mathfrak{N} \sqsubset \mathfrak{M} \wedge \mathfrak{N} \neq \mathfrak{M} \wedge \mathfrak{N} \models T)$
- *Aksjomat modelu maksymalnego*.
  $Max_m(T, \mathfrak{M}) \equiv_{df} \neg \exists \mathfrak{N} \, (\mathfrak{M} \sqsubset \mathfrak{N} \wedge \mathfrak{N} \neq \mathfrak{M} \wedge \mathfrak{N} \models T)$

- *Aksjomat struktury minimalnej*.
  $Min_s(T, \mathfrak{M}) \equiv_{df} \neg \exists \mathfrak{N} \, (\mathfrak{N} \sqsubset \mathfrak{M} \wedge Ism_v(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \wedge \mathfrak{N} \models T)$
- *Aksjomat struktury maksymalnej*.
  $Max_s(T, \mathfrak{M}) \equiv_{df} \neg \exists \mathfrak{N} \, (\mathfrak{M} \sqsubset \mathfrak{N} \wedge Ism_v(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \wedge \mathfrak{N} \models T)$

Przykład

Autorzy piszą, że jeśli dodać do aksjomatów w powyższym przykładzie relacji na zbiorze czteroelementowym:

- aksjomat minimalnego modelu, to system ten spełniają: a, b, d.
- aksjomat maksymalnego modelu, to system ten spełniają: b, f, g.
- oba aksjomaty (minimalnego i maksymalnego modelu), to system ten spełnia jedynie b.

Inny przykład autorów: aksjomat minimalnej struktury dla $1-1$ relacji R z dokładnie jednym elementem początkowym i bez elementu końcowego.

Autorzy twierdzą, że aksjomat zupełności Hilberta to aksjomat maksymalnego modelu, a aksjomat ograniczenia Fraenkla to aksjomat minimalnego modelu.

Dygresja (ograniczona do FOL)

Sformułowania autorów mogą sugerować różne interpretacje dla pojęć modelu i struktury minimalnej (w sensie C-B), np.:

- model *minimalny* ($\mathfrak{A} \in Mod(T)$ jest minimalny dokładnie wtedy, gdy żadna właściwa elementarna podstruktura modelu $\mathfrak{A}$ nie jest modelem dla T);
- model *atomowy* ($\mathfrak{A} \in Mod(T)$ jest atomowy dokładnie wtedy, gdy każdy typ zupełny realizowany w $\mathfrak{A}$ jest główny);
- model *pierwszy* ($\mathfrak{A} \in Mod(T)$ jest pierwszy dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{A}$ jest elementarnie wkładalny w każdy model dla T).

- Warunki istnienia. Związki z $\aleph_0$-kategorycznością.
- Np. model standardowy PA jest pierwszy i atomowy.

Dygresja (ograniczona do FOL)

Niech $\mathfrak{M}$ będzie modelem T, a κ nieskończoną liczbą kardynalną.

- $\mathfrak{M}$ *jest modelem maksymalnym (w sensie C-B)* $\equiv_{df}$ dla każdego $\mathfrak{N} \models T$, $\mathfrak{M}$ może zostać rozszerzony do modelu dla $D^+(\mathfrak{N})$ (gdzie $D^+(\mathfrak{A})$ jest pozytywnym diagramem $\mathfrak{A}$).
- $\mathfrak{M}$ *jest strukturą κ-maksymalną (w sensie C-B)* $\equiv_{df}$ $\mathfrak{M}$ jest κ-uniwersalny (czyli dla każdego $\mathfrak{N}$ takiego, że $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ oraz $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \kappa$, $\mathfrak{N}$ jest elementarnie wkładalny w $\mathfrak{M}$).

- $\mathfrak{M}$ jest modelem maksymalnym dokładnie wtedy, gdy każdy model T jest homomorficznie wkładalny w $\mathfrak{M}$.
- Można rozważać pojęcie modelu *κ-maksymalnego* (przez dodanie warunku $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \kappa$ w powyższej definicji).

Dygresja (ograniczona do FOL)

Filtr właściwy ∇ na I jest κ-regularny, gdy istnieje zbiór $E \subseteq \nabla$ mocy κ taki, że każdy $i \in I$ należy tylko do skończenie wielu $e \in E$. Dla dowolnego zbioru I nieskończonej mocy κ istnieje κ-regularny ultrafiltr na I.

- Niech $\overline{\overline{L}} \leqslant \kappa$, ∇ ultrafiltr κ-regularny. Dla każdego modelu $\mathfrak{A}$, ultrapotęga $\prod_\nabla \mathfrak{A}$ jest κ^+-uniwersalna.
- **Twierdzenie Frayne'a**. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{A}$ jest elementarnie wkładalny w pewną ultrapotęgę $\prod_\nabla \mathfrak{B}$.
- Modele κ-nasycone są κ^+-uniwersalne.
- Niech $\overline{\overline{L}} \leqslant \kappa$. Model $\mathfrak{A}$ jest κ-nasycony dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{A}$ jest κ-jednorodny i κ-uniwersalny.

Adekwatność i ewentualna użyteczność proponowanej rekonstrukcji może być oczywiście krytykowana. To tylko dygresja.

Aksjomat ograniczenia Fraenkla

- **Fraenkel, A.A.** 1922. Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. *Mathematische Annalen* **86**, 230–237.
- **Fraenkel, A.A.** 1928. *Einleitung in die Mengenlehre*. Verlag von Julius Springer, Berlin.
  Axiom der Beschränkheit. Außer den durch die Axiome II bis VII (bzw. VIII) gefordeten Mengen existieren keine weitere Mengen.

- Uwagi Fraenkla dotyczące ufundowania. Motywacje dla ewentualnego przyjęcia aksjomatu ograniczenia.
- Rozważania Fraenkla dotyczące rozumienia pojęcia *zupełności* (w przypadku teorii mnogości).

Aksjomat konstruowalności Gödla

- **Gödel, K.** 1940. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory. *Annals of Mathematics Studies* 3, Princeton.
- *Aksjomat konstruowalności ($V = L$)* głosi, że wszystkie zbiory sa konstruowalne.
- W L zachodzą: AC oraz GCH, a więc są one niesprzeczne z ZF.
- $V = L$ implikuje m.in.: istnienie niemierzalnego Δ^1_2 zbioru liczb rzeczywistych, nieistnienie (nieprzeliczalnych) kardynalnych liczb mierzalnych oraz negację hipotezy Suslina.

- L to uniwersum zbiorów *definiowalnych* (z parametrami). L zawiera wszystkie liczby porządkowe.

Aksjomat kanoniczności Suszki

- **Suszko, R.** 1951. Canonic axiomatic systems. *Studia Philosophica* **IV**, 301–330.

- System (M) teorii mnogości.
- Metasystem (μM) $=$ (M)$+$ „morfologia" systemu (M).
- System zbiorów konstruowalnych (M^*).
- *Aksjomat kanoniczności*: wszystkie zbiory są k-desygnowane przez k-nazwy.
- Kanoniczny system ($\overline{M^*}$).
- Problemy otwarte w podejściu Suszki.
- Niezależnie: propozycja Myhilla.

Krytyka: von Neumann, Zermelo

- **von Neumann, J.** (1925). Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **154**, 219–240.
- Uwagi dotyczące: podsystemów, (braku) kategoryczności, relatywności mocy, ufundowania.
- Aksjomat von Neumanna (klasa jest właściwa dokładnie wtedy, gdy jest równoliczna z klasą wszystkich obiektów) jest (wedle Halleta) *aksjomatem maksymalności*.

- **Zermelo, E.** (1930). Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Fundamenta Mathematicae* **16**, 29–47.
- Właściwą ontologią dla teorii mnogości ZF jest **cała** pozaskończona hierarchia dziedzin normalnych, z założeniem istnienia pozaskończenie wielu liczb mocno nieosiągalnych.

Krytyka: Levy

- **Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y., Levy, A.** 1973. *Foundations of set theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London.

- *I aksjomat ograniczenia*. Klasa wszystkich zbiorów definiowana przez pewne warunki domknięcia (podane w Fraenkel, Bar Hillel, Levy 1973: 114) jest tożsama z klasą wszystkich zbiorów.
- *II aksjomat ograniczenia*. Wszystkie zbiory są konstruowalne i nie istnieje zbiór przechodni, będący modelem ZF.
- II aksjomat implikuje I. Aksjomat I jest równoważny koniunkcji aksjomatu ufundowania i zdania stwierdzającego, że nie istnieją liczby mocno nieosiągalne.
- Autorzy argumentują za odrzuceniem tych aksjomatów — Fraenkel, Bar Hillel, Levy 1973, 117:

In the case of the axiom of induction in arithmetic and the axiom of completeness in geometry, we adopt these axioms not because they make the axiom systems categorical or because of some metamathematical properties of these axioms, but because, once these axioms are added, we obtain axiomatic systems which perfectly ***fit our intuitive ideas about arithmetic and geometry***. In analogy, we shall have to judge the axioms of restriction in set theory on the basis of how the set theory obtained after adding these axioms ***fits our intuitive ideas about sets***. To restrict our notion of set to the narrowest notion compatible with the axioms of ZFC just for the sake of economy is appropriate only if we have absolute faith that the axioms of ZFC (and the statements they imply) are the only mathematically interesting statements about sets. It is difficult to conceive of such absolute faith in the sufficiency of the axioms of ZFC (as one would have in, say, the full axiom of comprehension if it were not inconsistent). Even if one had such a faith in the axioms of ZFC, it is likely that he would settle rather for something like the axiom of completeness, if there were some reasonable way of formulating it. [Podkreślenie: jp]

Modele wewnętrzne

- **Sheperdson, J.C.** 1951–1953. Inner models for set theory. *Journal of Symbolic Logic* **16** (1951), 161–190; **17** (1952), 225–237; **18** (1953), 145–167.

- Jeśli VNB niesprzeczna, to w VNB nie można dowieść negacji II aksjomatu ograniczenia, czyli VNB *non* $\vdash$ „Jeśli $V = L$, to istnieje zbiór przechodni, który jest modelem ZF."
- Metodą modeli wewnętrznych nie można pokazać, że $V = L$ nie jest twierdzeniem ZFC [Solovay: 14–15 w *Collected Works II*, Gödla].
- Metodą Cohena nie można pokazać, że jakieś zdanie jest niezależne od $V = L$ [Solovay: 16, w *Collected Works II*, Gödla].
- Scott (1961): Jeśli istnieje (nieprzeliczalna) liczba mierzalna, to $V \neq L$.

Duże liczby kardynalne i zasady odbicia

- Czy aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych (np. mocno nieosiągalnych, mierzalnych, itd.) są podobne do aksjomatów ekstremalnych w sensie Carnapa-Bachmanna? [por. Kurt Gödel *What is Cantor's Continuum Problem?*]
- Jeśli ZFC jest niesprzeczna, to w ZFC nie można udowodnić zdania: „istnieje liczba mocno nieosiągalna" (konsekwencja II Twierdzenia Gödla). Nie traktujemy tego jednak jako argumentu ***za*** jakimś aksjomatem ograniczenia (minimalności) w teorii mnogości.

- Niektóre silne aksjomaty nieskończoności są w sprzeczności z aksjomatami ograniczenia typu $V = L$.
- Zermelo 1930: wyniki dotyczące kategoryczności hierarchii dziedzin normalnych.

Twierdzenia o reprezentacji

- **Twierdzenie Stone'a**. Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z ciałem zbiorów.
- **Lemat Mostowskiego**. Każda ekstensjonalna relacja ufundowana jest izomorficzna z relacją $\in$ na zbiorze przechodnim.

- Twierdzenia o reprezentacji (choć nie są aksjomatami ekstremalnymi) mówią, że modele wybranej teorii są ściśle określonego, tego samego, typu.
- Nadto, niektóre ważne struktury matematyczne mogą zostać *jednoznacznie* określone poprzez swoje własności (algebraiczne, porządkowe, topologiczne): por. np. charakterystyki ciał uporządkowanych, ciał topologicznych.

Model zamierzony: pojęcie czysto pragmatyczne?

- **Twierdzenie Tennenbauma** (1959). Żaden przeliczalny niestandardowy model PA nie jest rekurencyjny.
- Model standardowy PA jest modelem pierwszym.

- Czy powyższe własności wystarczają, aby uznać, że model standardowy PA jest jej *modelem zamierzonym*? Czy też konieczne jest w tym celu dodanie Tezy Churcha? A może pojęcie modelu zamierzonego ma nieusuwalny/nieprzekładalny komponent pragmatyczny?
- Czy możliwe jest podanie podobnych (bez odwołań pragmatycznych!) charakterystyk dla modeli zamierzonych innych teorii?