Logika

Michał Lipnicki

Zakład Logiki Stosowanej UAM

30 grudnia 2013

Tautologie KRP

Tautologią KRP nazywamy taką formułę, która jest schematem wyłącznie zdań prawdziwych (dla której nie istnieje kontrmodel, tj. wszystkie interpretacje są jej modelami).
Kontrtautologią KRP nazywamy taką formułę, która jest schematem wyłącznie zdań fałszywych (dla której nie istnieje model, czyli wszystkie możliwe interpretacje są jej kontrmodelami).

Podstawowe tautologie KRP:

- $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$.
- $\neg \exists P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$.
- $\exists x \forall y R(x, y) \equiv \forall y \exists x R(x, y)$.

Tautologie KRP

Uwaga!

KRP jest rachunkiem nierozstrzygalnym. Znaczy to, iż nie dysponujemy efektywną metodą pozwalającą dla dowolnej formuły α określić, czy jest ona tautologią lub kontrtautologią.

Można natomiast wskazać pewne rozstrzygalne podzbiory formuł KRP, np. wszystkie tautologie KRZ są również tautologiami KRP.

- $P(x) \to \big(\exists y Q(y) \vee P(x)\big)$,
- $P(x) \to \big(\exists x \forall y R(x, y) \vee P(x)\big)$,
- $P(x) \to \big(\forall x \big[P(x) \to \exists y[Q(y) \wedge R(x, y)]\big] \vee P(x)\big)$

Powyższe formuły są tautologiami KRP, ponieważ stanowią podstawienie tautologii KRZ — $p \to (q \vee p)$

Tautologie KRP

Oczywiście to, że formuła KRP nie jest podstawieniem tautologii KRZ nie znaczy, że nie jest ona tautologią specyficzną KRP, czego nie sposób udowodnić.

Zamiast tego, pokazujemy, że dana formuła α nie jest tautologią (znajdując jej kontrmodel), lub że α nie jest kontrtautologią (znajdując jej model).

Tautologie KRP — ćwiczenie

Pokaż, że poniższe formuły nie są ani tautologiami, ani kontrtautologiami.

- $\forall x \exists y R(x, y)$.
- $\forall x \exists y [R(x, y) \vee R(y, x)]$.
- $\neg \forall x P(x) \to \forall x \neg P(x)$.
- $\exists x [P(x) \to Q(x)] \to \exists x [P(x) \wedge Q(x)]$.
- $\forall x \forall y \forall z [R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z)]$.

Prawdziwość funkcji zdaniowych

Funkcja zdaniowa jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy po poprzedzeniu jej kwantyfikatorem uniwersalnym, wiążącym wszystkie występujące w niej zmienne, staje się zdaniem prawdziwym. Mówiąc inaczej funkcja zdaniowa jest zdaniem prawdziwym, gdy jest spełniona przez dowolny obiekt uniwersum.

Prawdziwa funkcja zdaniowa:

Jeżeli x jest bogatszy od y a z jest bogatszy niż x, to z jest bogatszy niż y.

Fałszywa funkcja zdaniowa:

Jeżeli x jest kochankiem y a z jest kochankiem x, to z jest kochankiem y.

Niektóre tautologie KRP

- Prawo *dictum de omni* (orzekanie ze wszystkiego):
  - (1) $\forall\ x\alpha \to \alpha$
  - (2) $\forall x\ \alpha \to \alpha(x/t)$ (o ile term t jest podstawialny za x w α).
- Prawo *dictum de singulo* (orzekanie z pojedynczego):
  - (3) $\alpha \to \exists x\ \alpha$
  - (4) $\alpha(x/t) \to \exists x\ \alpha$ (o ile term t jest podstawialny za x w α).
- (5) $\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha$ (prawo subalternacji).
- (6) $\forall x\ \neg\alpha \to \exists x\ \neg\alpha$ (*dictum de nulo* — orzekanie z niczego).
- Prawo zamiany zmiennych związanych:
  - (7) $\forall x\ \alpha \equiv \forall y\ \alpha$ (o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α);
  - (8) $\exists x\ \alpha \equiv \exists y\ \alpha$ (o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α).
- Prawa de Morgana w KRP:
  - (9) $\neg\exists x\ \alpha \equiv \forall x\ \neg\alpha$;
  - (10) $\neg\forall x\ \alpha \equiv \exists x\ \neg\alpha$.

Niektóre tautologie KRP

- Prawa zastępowania kwantyfikaorów:
  - (11) $\exists x\ \alpha \equiv \neg\forall x\ \neg\alpha$;
  - (12) $\forall x\ \alpha \equiv \neg\exists x\ \neg\alpha$.
- (13) $\forall x \forall y\ \alpha \equiv \forall y \forall x\ \alpha$ (prawo przestawiania kwantyfikatorów uniwersalnych).
- (14) $\exists x \exists y\ \alpha \equiv \exists y \exists x\ \alpha$ (prawo przestawiania kwantyfikatorów egzystencjalnych).
- (15) $\exists x \forall y\ \alpha \rightarrow \forall y \exists x\ \alpha$.
- (16) $\forall x(\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \wedge \forall x\ \beta)$.
- (17) $\exists x(\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta)$.
- (18) $\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta) \rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$.
- (19) $\exists x(\alpha \wedge \beta \rightarrow (\exists x\ \alpha \wedge \exists x\ \beta)$.
- (20) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\ \alpha \rightarrow \forall x\ \beta)$.

Niektóre tautologie KRP

- (21) $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\ \alpha \to \exists x\ \beta)$.
- (22) $(\forall x(\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$.
- (23) $\forall x(\alpha \to \beta) \wedge \forall x(\beta \to \varphi) \to \forall x(\alpha \to \varphi)$.
- Prawa ekstensjonalności dla kwantyfikatorów:
  - (24) $\forall x(\alpha \equiv \beta) \to (\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta)$;
  - (25) $\forall x(\alpha \equiv \beta) \to (\exists x\ \alpha \equiv \exists x\ \beta)$;
  - (26) $\forall x(\alpha \equiv \beta) \to \forall x(\alpha \to \beta) \wedge \forall x(\beta \to \alpha)$.

Wynikanie logiczne w KRP

Mówimy, że α wynika logicznie z X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model X jest też modelem $\{\alpha\}$, co zapisujemy symbolicznie $X \models_{krp} \alpha$. Jeżeli między X oraz α nie zachodzi wynikanie logiczne, to piszemy: $X \not\models_{krp} \alpha$.

Pojęcie wynikania logicznego można uogólnić na zbiory formuł. Wówczas mówimy, że ze zbioru X wynika logicznie (na gruncie KRP) zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem zbioru Y, co zapisujemy $X \models_{krp} Y$ oraz odpowiednia, jeśli nie zachodzi wynikanie: $X \not\models_{krp} Y$.

Badając, czy między formułami KRP $\{\alpha, \beta\}$ oraz $\{\varphi\}$ zachodzi wynikanie logiczne musimy stwierdzić, czy dla każdej interpretacji $\Im_n$ takiej, że:

- $\Im_n \models \alpha$;
- $\Im_n \models \beta$;

zachodzi także $\Im_n \models \varphi$.

Wynikanie logiczne w KRP

Badając czy między zdaniami α i β zachodzi stosunek wynikania logicznego musimy zbadać, czy kwantyfikatorowy schemat implikacji, której poprzednikiem jest zdanie α a następnikiem β, jest schematem tautologicznym.

Analogicznie postępujemy, gdy badamy wynikanie jakiegoś zdania β z pewnego zbioru zdań X. Badamy tautologiczność formuły, w której poprzedniku znajduje się koniunkcja zdań ze zbioru X, a w następniku zdanie β.

Wynikanie logiczne w KRP — ćwiczenie

Proszę zbadać, czy ze zdanie Y wynika logicznie ze zbioru zdań X, gdy:

- (1) $X = \{\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta), \forall x\ (\beta \rightarrow \gamma)\}$, $Y = \{\forall x\ (\alpha \rightarrow \gamma)\}$.
- (2) $X = \{\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta), \alpha\}$, $Y = \{\beta\}$.

Wykaż, że ze zbioru X nie wynika logicznie formuła α, dla:

- (1) $X = \{\forall x \exists y\ P(x, y), \exists x\ P(x, x)\}$, α postaci $\forall x\ P(x, x)$
- (2) $X = \{\exists x\ P(x), \forall x\ (P(x) \vee Q(x))\}$, α postaci $Q(x)$

Ćwiczenia pochodzą z: J. Pogonowski, 2008.

Wnioskowanie dedukcyjne w KRP

Podobnie jak w przypadku KRZ, tak i w KRP badanie dedukcyjności wnioskowania można sprowadzić do badania, czy między danymi zdaniami zachodzi stosunek wynikania logicznego

Wnioskowanie nazwiemy dedukcyjnym, jeżeli między jego przesłankami i wnioskiem zachodzi stosunek wynikania logicznego. Tak więc badanie dedukcyjności wnioskowania polega na badaniu tautologiczności formuły KRP, gdzie w poprzedniku mamy koniunkcję przesłanek, a w następniku wniosek.

Przyjmujemy, że jeśli formuła zadaniowa α zawiera nazwę indywiduową a, to jest ona prawdą logiczną wtedy i tylko wtedy, gdy formuła β powstająca z α przez konsekwentne zastąpienie nazwy a zmienną x (która nie występuje w α jako wolna i nie stanie się związana w β) jest prawdą logiczną.

Reguły wnioskowania

W systemie założeniowym KRP opieramy się na tych samych pojęciach, co w przypadku KRZ:

- dowód wprost i nie wprost;
- pierwotna i wtórna reguła wnioskowania;

Regułę $\Re$ nazywamy niezawodną wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego sekwentu $(X, \alpha) \in \Re$: $X \models_{krp} \alpha$.

Reguła o sekwencie (X, α) zachowuje własność bycia tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli wszystkie elementy zbioru X są tautologiami KRP, to formuła α również jest tautologią.

Reguły wnioskowania

Reguła opuszczania kwantyfikatora uniwersalnego (O∀).

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha(x/t)}$$

Reguła dołączania kwantyfikatora uniwersalnego (D∀).

$$\frac{\alpha}{\forall x \alpha}$$

Uwaga: powyższa reguła może być stosowana tylko wtedy, gdy x nie jest zmienną wolną w założeniach dowodu.

Reguły wnioskowania

Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego (D∃).

$$\frac{\alpha(x/t)}{\exists x \alpha}$$

Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego (O∃)

$$\frac{\exists x \alpha}{\alpha(x/t(x_1, \ldots, x_n))}$$

Gdzie $t(x_1, \ldots, x_n)$ jest stałą indywiduową zależną od wszystkich zmiennych wolnych formuły $\exists x \alpha$.

Uwaga: Przy każdym zastosowaniu reguły opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego RO∃ należy używać nowej stałej, nie występującej dotąd w dowodzie. Stała ta nie może ponadto wystąpić w dowodzonej tezie.

Reguły wnioskowania

Oto sposoby wykorzystania czterech powyższych reguł:

Reguła opuszczania kwantyfikatora uniwersalnego (O∀).

$$\frac{\forall x P(x)}{P(x)} \qquad \frac{\forall x P(x)}{P(y)} \qquad \frac{\forall x P(x)}{P(a)}$$

Reguła dołączania kwantyfikatora uniwersalnego (O∀).

$$\frac{P(x)}{\forall x P(x)}$$

Reguły wnioskowania

Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego (D∃).

$$\frac{P(x)}{\exists x P(x)} \quad \frac{P(y)}{\exists x P(x)} \quad \frac{P(a)}{\exists x P(x)}$$

Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego (O∃).

$$\frac{\exists x Q(x)}{Q(a)} \quad \frac{\exists x Q(x,y,z)}{Q(a_{y,z},y,z)} \quad \frac{\exists x \forall y Q(x,y,z)}{\forall y Q(a_z,y,z)} \quad \frac{\exists x \forall y \exists z Q(x,y,z)}{\forall y \exists z Q(a,y,z)}$$

Dowody założeniowe nie wprost

Dany jest pewien zbiór formuł KRP $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ zwanych założeniami oraz formuła KRP β zwana wnioskiem. **Dowodem założeniowym nie wprost** wniosku β z założeń $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ jest ciąg formuł logicznych spełniający następujące warunki:

- Pierwszymi formułami dowodu są jego założenia oraz założenie dowodu nie wprost w postaci negacji wniosku.
- Każda następna formuła jest albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo formułą otrzymaną z poprzedzających ją formuł przy użyciu dopuszczalnych reguł wnioskowania.
- Ostatnią formułą dowodu jest jakaś formuła sprzeczna z jedną z formuł ją poprzedzających.

Dowody założeniowe nie wprost

Przy okazji ćwiczenia dowodzenia metodą nie wprost wprowadzimy do naszego systemu założeniowego dwie reguły wtórne: (1) regułę negowania kwantyfikatora generalnego (N$\forall$) oraz regułę negowania kwantyfikatora egzystencjalnego (N$\exists$).

$$\text{N}\forall \qquad \frac{\neg\forall x\ \alpha}{\exists x \neg\alpha} \qquad\qquad \text{N}\exists \qquad \frac{\neg\exists x\ \alpha}{\forall x\ \neg\alpha}$$

Reguły negowania kwantyfikatorów

Aby wprowadzić obie reguły do systemu musimy udowodnić dwie równoważności:

(1) $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$,
(2) $\neg\exists x\ P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$.

Naszym celem będzie zatem dowiedzenie czterech implikacji:

- (1a) $\neg\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$,
- (1b) $\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg\forall x\ P(x)$,
- (2a) $\neg\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$,
- (2b) $\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg\exists x\ P(x)$.

Reguły negowania kwantyfikatorów

Dowód (1a) oraz (1b):

(1a)	$\neg\forall x\ P(x)$	zał.
(2a)	$\neg\exists x\ \neg P(x)$	z.d.n.
($3a_1$)	$\neg P(x)$	zał.dod.
($3a_2$)	$\exists x\ \neg P(x)$	D∃
(4a)	$\neg P(x) \rightarrow \exists x\ \neg P(x)$	$3a_1 \Rightarrow 3a_2$
(5a)	$P(x)$	MT 4a, 2a
(6a)	$\forall x\ P(x)$	D∀ 5
	sprzeczność	1a, 6a

(1b)	$\exists x\ \neg P(x)$	zał.
(2b)	$\neg\neg\forall x\ P(x)$	z.d.n.
(3b)	$\forall x\ P(x)$	NN 2b
(4b)	$\neg P(a)$	O∃ 1b
(5b)	$P(a)$	O∀ 3b
	sprzeczność	4b, 5b.

Ponieważ dowiedliśmy (1a) oraz (1b), zatem tezą jest $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$, czyli możemy wprowadzić do systemu regułę N∀.

Reguły negowania kwantyfikatorów

Dowód (2a) oraz (2b):

(1a)	$\neg\exists x\ P(x)$	zał.
(2a)	$\neg\forall x \neg P(x)$	z.d.n.
(3a)	$\exists x \neg\neg P(x)$	N$\forall$ 2a
(4a)	$\neg\neg P(a)$	O$\exists$ 3a
(5a)	$P(a)$	NN 4a
(6a)	$\exists x\ P(x)$	D$\exists$ 5a
	sprzeczność	1a, 6a.

(1b)	$\forall x \neg P(x)$	zał.
(2b)	$\exists x\ P(x)$	z.d.n.
(3b)	$P(a)$	O$\exists$ 2b
(4b)	$\neg P(a)$	O$\forall$ 3b
	sprzeczność	3b, 4b

Ponieważ dowiedliśmy (2a) oraz (2b), zatem tezą jest
$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$, czyli możemy wprowadzić do systemu regułę N$\exists$.

Pokaż, że między formułami ze zbioru X a formułą α zachodzi wynikanie logiczne.

- $X = \{\forall x P(x) \to \neg \forall x Q(x), \forall x Q(x)\}$, $\alpha = \neg \forall x P(x)$.
- $X = \{(\forall x P(x) \land \exists x Q(x))\}$, $\alpha = \exists x (P(x) \land Q(x))$.
- $X = \{\forall x (P(x) \land Q(x)), \forall x (P(x) \to R(x))\}$, $\alpha = \exists x (R(x) \land Q(x))$.