Wstęp do Matematyki (1)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Wprowadzenie

Cel

Celem zajęć jest oswojenie słuchaczek z wybranymi podstawowymi pojęciami matematycznymi, m.in.:

- zbiory, relacje, funkcje, nieskończoność;
- struktury relacyjne, algebry, morfizmy;
- miara, prawdopodobieństwo;
- grafy, kraty, drzewa;
- indukcja i rekurencja.

Staramy się wskazać na wszechstronne zastosowania tych pojęć.

Plan

Plan przewiduje 15 zajęć. Na zajęciach 5, 10 i 15 będą sprawdziany. Zaliczenie co najmniej 2 sprawdzianów owocuje zaliczeniem przedmiotu. Rozwiązanie co najmniej połowy zadań na sprawdzianie oznacza zaliczenie sprawdzianu. Rozwiązanie zadania to podanie poprawnej odpowiedzi wraz z prawidłowym uzasadnieniem.

Tematy zajęć:

- 1. Dzisiejsza powtórka. Pojęcie nieskończoności.
- 2. Własności relacji i operacje na relacjach.
- 3. Równoważności, podobieństwa, opozycje, porządki.
- 4. Liczby porządkowe i kardynalne.

Plan

- 6. Sruktury relacyjne i morfizmy.
- 7. Operacje na strukturach.
- 8. Ważne typy struktur.
- 9. Przestrzenie z miarą. Prawdopodobieństwo.

- 11. Porządki i kraty.
- 12. Drzewa.
- 13. Indukcja.
- 14. Rekurencja.

Większość powyższych tematów dotyczy matematyki dyskretnej.
Wiadomości te będą przydatne m.in. na zajęciach z:
Logiki Matematycznej, Lingwistyki Matematycznej, Wstępu do Informatyki, Wstępu do Językoznawstwa, Filozofii.

Literatura zalecana

Zaleca się rozwiązywanie zadań:

- Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Ławrow, A.I., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Marek, W., Onyszkiewicz, J. 2004. *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Stanosz, B. 2005. *Ćwiczenia z logiki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Można korzystać również z literatury obcojęzycznej. Nie ma zakazu.

Literatura zalecana

- Cichoń, J. 2003. *Wykłady ze wstępu do matematyki.* Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław.
- Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kraszewski, J. 2007. *Wstęp do matematyki.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Wrszawa.
- Mirkowska, G. 2003. *Elementy matematyki dyskretnej.* Wydawnictwo Polsko-Japońskiej Wyższej Szkoły Technik Komputerowych, Warszawa.
- Murawski, R., Świrydowicz, K. 2005. *Wstęp do teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Zwróć uwagę także na odnośniki na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM: http://www.logic.amu.edu.pl/index.php/Linki

Przypomnienie: zbiory

O elementarnym rachunku zbiorów oraz funkcjach mówiono w szkole. Przypomnijmy:

- Jeśli przedmiot x jest *elementem* zbioru X, to piszemy $x \in X$. W przeciwnym przypadku piszemy $x \notin X$.
- Zbiór złożony z przedmiotów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczamy przez $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- Niech U będzie zbiorem. Zbiór (wszystkich) elementów U, które spełniają warunek $\varphi(x)$ oznaczamy przez $\{x \in U : \varphi(x)\}$.
- Zbiór X jest *identyczny* ze zbiorem Y wtedy i tylko wtedy, gdy X oraz Y posiadają dokładnie te same elementy. Piszemy wtedy $X = Y$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \neq Y$.
- Elementami zbiorów mogą być zbiory. Zamiast „zbiór zbiorów" mówimy też „rodzina zbiorów".

Przypomnienie: zbiory

- Zbiór $\{x, y\}$ nazywamy *parą nieuporządkowaną* złożoną z x oraz y.
- Niech (x, y) oznacza zbiór $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Wtedy (x, y) nazywamy *parą uporządkowaną* o elemencie pierwszym x oraz elemencie drugim y.
- Zbiór X jest *zawarty* w zbiorze Y, gdy każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y. Piszemy wtedy $X \subseteq Y$ i mówimy, że X jest *podzbiorem* Y. Jeśli $X \subseteq Y$ oraz $X \neq Y$, to piszemy $X \subset Y$ i mówimy, że X jest *podzbiorem właściwym* Y. Relację $\subseteq$ nazywamy inkluzją, a $\subset$ *inkluzją właściwą*.
- *Zbiór pusty* $\emptyset$ to zbiór, który nie ma żadnego elementu.
- *Zbiór wszystkich podzbiorów* zbioru X oznaczamy przez $\wp(X)$ (czasami także przez: 2^X). Zbiór $\wp(X)$ nazywamy *zbiorem potęgowym* zbioru X.

Przypomnienie: zbiory

Niech X oraz Y będą podzbiorami uniwersum U. Definiujemy operacje:

- $X \cap Y = \{x \in U : x \in X \text{ oraz } x \in Y\}$
  (*przekrój (iloczyn) X i Y*)
- $X \cup Y = \{x \in U : x \in X \text{ lub } x \in Y\}$
  (*suma X i Y*)
- $X - Y = \{x \in U : x \in X \text{ oraz } x \notin Y\}$
  (*różnica X i Y*)
- $X' = \{x \in U : x \notin X\}$
  (*dopełnienie X*; inne oznaczenie: $-X$)
- $X \div Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$
  (*różnica symetryczna X i Y*)
- $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ oraz } x \in Y\}$
  (*iloczyn kartezjański X i Y*).

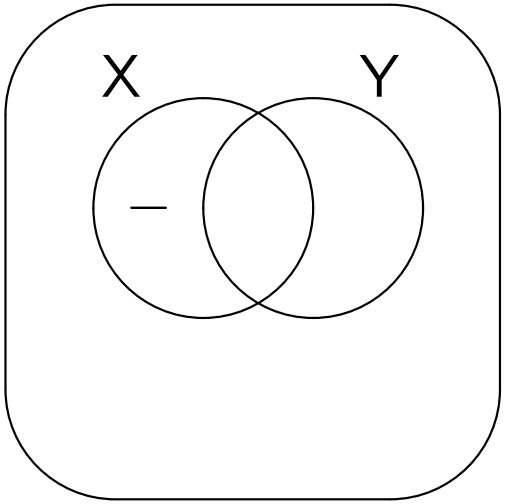
Przypomnienie: zbiory

Niech I będzie zbiorem, a $\mathbf{A} = \{A_i : i \in I\}$ rodziną zbiorów (podzbiorów ustalonego uniwersum U).

- $\bigcup \mathbf{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in U : x \in A_i$ dla co najmniej jednego $i \in I\}$ (suma rodziny $\mathbf{A}$)
- $\bigcap \mathbf{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in U : x \in A_i$ dla wszystkich $i \in I\}$ (przekrój (iloczyn) rodziny $\mathbf{A}$).

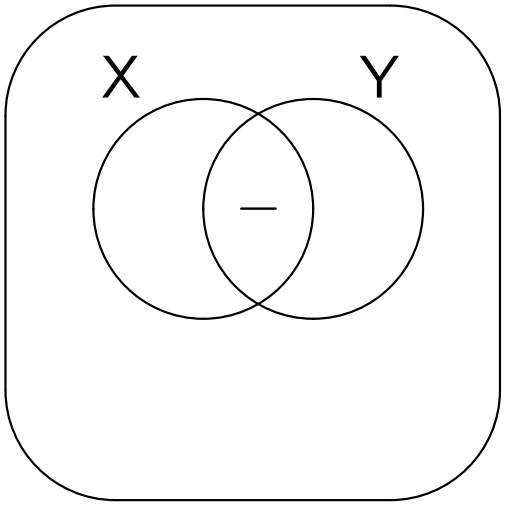
Diagramy Venna (dla dwóch zbiorów)

Warunki prawdziwości zdań stwierdzających zachodzenie pewnych relacji między zbiorami reprezentować można na diagramach (znak „+" stawiamy w obszarze niepustym, a „–" w obszarze pustym):



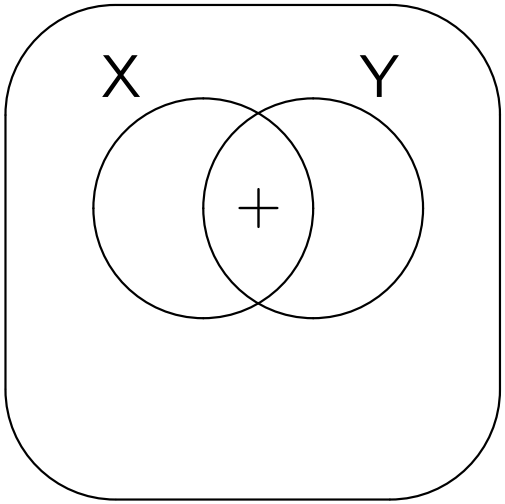
Wszystkie X są Y, czyli $X \subseteq Y$, lub, równoważnie, $X - Y = \emptyset$.

Diagramy Venna (dla dwóch zbiorów)



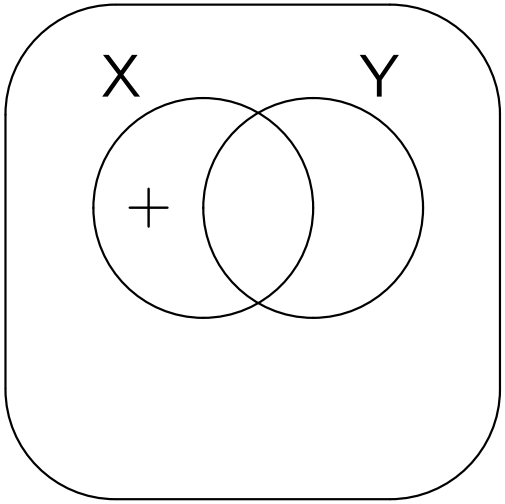
Żaden X nie jest Y, czyli $X \cap Y = \emptyset$.

Diagramy Venna (dla dwóch zbiorów)



Niektóre X są Y, czyli $X \cap Y \neq \emptyset$.

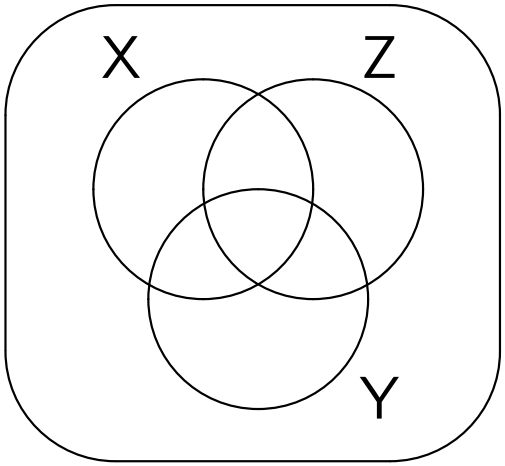
Diagramy Venna (dla dwóch zbiorów)



Nie wszystkie X są Y (*Pewien X nie jest Y*), czyli $X - Y \neq \emptyset$.

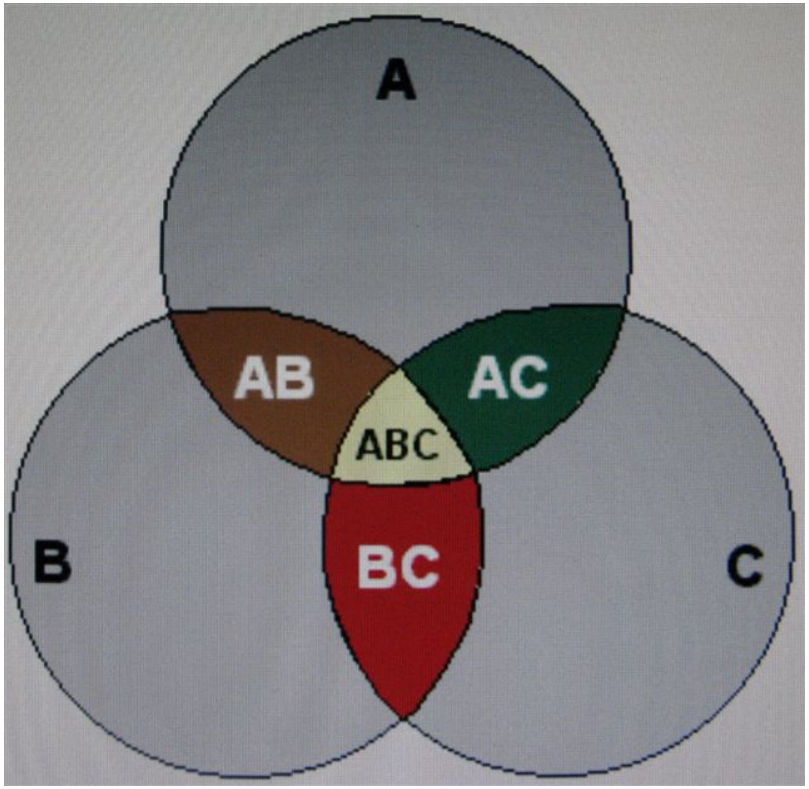
Diagramy Venna (dla trzech zbiorów)

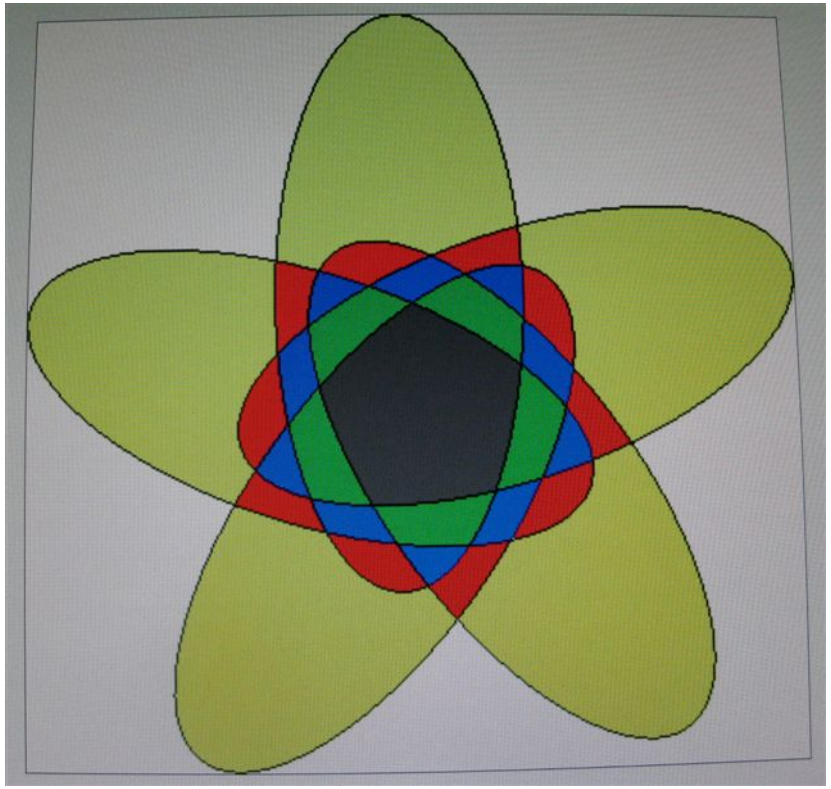
Diagramów Venna można używać także dla zaznaczania zachodzenia pewnych relacji między dowolną liczbą zbiorów:



Na diagramie należy uwzględnić wszystkie możliwe iloczyny zbiorów.

Diagramy Venna (dla trzech i pięciu zbiorów)





Diagramy Venna (dla trzech i pięciu zbiorów).

Diagramy Venna: przykład

- Czy z poniższych przesłanek wynika logicznie jakiś wniosek dotyczący zależności między inteligentnymi a sympatycznymi?
- Ponadto: co można powiedzieć o uczciwych, którzy nie są sympatyczni (o ile poniższe przesłanki są prawdziwe)?

Co najmniej jeden uczciwy jest sympatyczny. Nie wszyscy są uczciwi. Każdy jest uczciwy lub inteligentny lub sympatyczny. Wszyscy inteligentni są uczciwi lub sympatyczni. Wszyscy uczciwi inteligentni są sympatyczni. Wszyscy sympatyczni są uczciwi lub inteligentni. Żaden uczciwy sympatyczny nie jest inteligentny.

Diagramy Venna: przykład

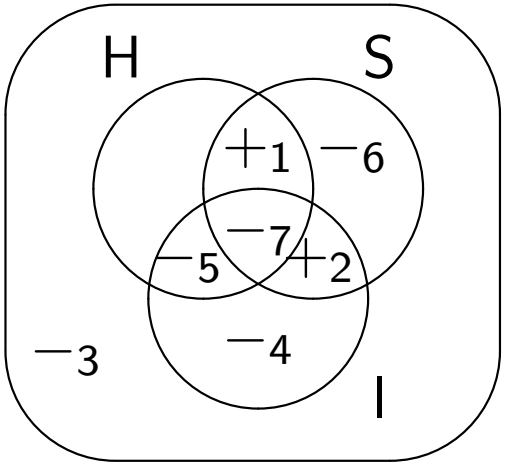
Wprowadźmy oznaczenia:

- H — zbiór uczciwych
- I — zbiór inteligentnych
- S — zbiór sympatycznych.

Rozważane przesłanki mają następujące schematy:

- (1) $H \cap S \neq \emptyset$
- (2) $H' \neq \emptyset$
- (3) $(H \cup I \cup S)' = \emptyset$
- (4) $I \subseteq (H \cup S)$
- (5) $(H \cap I) \subseteq S$
- (6) $S \subseteq (H \cup I)$
- (7) $H \cap (S \cap I) \neq \emptyset$.

Diagramy Venna: przykład



Z powyższego diagramu widać, że (przy prawdziwości przesłanek):

- *Istnieją inteligentni i sympatyczni. Wszyscy inteligentni są sympatyczni. Istnieją sympatyczni, którzy nie są inteligentni.*
- *Jeśli ktoś jest uczciwy, ale nie jest sympatyczny, to nie jest inteligentny. Nie wiadomo jednak, czy istnieją uczciwi niesympatyczni.*

Przypomnienie: relacje

n-tkę uporządkowaną $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definiujemy przez indukcję:

- $(x_1, x_2) = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$
- $(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2), x_3)$
- $\ldots$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ((x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{n+1})$

Iloczyn kartezjański zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ to zbiór:
$\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1 \text{ oraz } x_2 \in X_2 \text{ oraz} \ldots \text{oraz } x_n \in X_n\}$.

Iloczyny kartezjańskie dowolnych rodzin zbiorów zostaną określone później.

Przypomnienie: relacje

- *Relacją* (relacją binarną, dwuargumentową) miedzy elementami zbiorów X oraz Y nazywamy dowolny podzbiór zbioru $X \times Y$.
- Relacją n-argumentową między elementami zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy dowolny podzbiór zbioru $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.
- Jeśli $R \subseteq X \times X$, to mówimy, że R jest *relacją na zbiorze* X.
- Jeśli $R \subseteq X \times X$ jest relacją i $(x, y) \in R$, to piszemy też xRy. Mówimy wtedy, że x jest *R-poprzednikiem* y, a y jest *R-następnikiem* x.
- Niech $R \subseteq X \times Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.
  - $dom(R) = \{x \in X : xRy$ dla pewnego $y \in Y\}$ (*dziedzina* R)
  - $rng(R) = \{y \in Y : xRy$ dla pewnego $x \in X\}$ (*przeciwdziedzina* R)
  - $fld(R) = dom(R) \cup rng(R)$ (*pole* R)
  - $R[A] = \{y \in Y : xRy$ dla pewnego $x \in A\}$ (*obraz* A względem R)
  - $R^{-1}[B] = \{x \in X : xRy$ dla pewnego $y \in B\}$ (*przeciwobraz* B względem R).

Przypomnienie: relacje

Dla dowolnej relacji $R \subseteq X \times X$, mówimy że element $x \in X$ jest:

- *R-minimalny*, gdy nie istnieje $y \in X$ taki, że yRx
- *R-maksymalny*, gdy nie istnieje $y \in X$ taki, że xRy
- *R-najmniejszy*, gdy xRy dla wszystkich $y \in X$
- *R-największy*, gdy yRx dla wszystkich $y \in X$.

Podzbiory ustalonego zbioru X nazywamy *jednoargumentowymi* relacjami na X.

Uwaga. Wszelkie relacje są zbiorami. Można więc na nich wykonywać operacje określone dla zbiorów. Później poznamy jeszcze inne operacje na relacjach.

Przypomnienie: relacje

Niech $R \subseteq X \times Y$. Mówimy, że:

- y jest *bezpośrednim R-poprzednikiem x*, gdy y jest elementem R-największym w zbiorze wszystkich R-poprzedników x
- y jest *bezpośrednim R-następnikiem x*, gdy y jest elementem R-najmniejszym w zbiorze wszystkich R-następników x.

Przykład.

- W zbiorze wszystkich liczb całkowitych każdy element ma bezpośredni $<$-poprzednik oraz bezpośredni $<$-następnik.
- W zbiorze wszystkich liczb wymiernych żaden element nie ma ani bezpośredniego $<$-poprzednika, ani bezpośredniego $<$-następnika.

Przypomnienie: relacje

Jeśli $R \subseteq X \times Y$, $x \in dom(R)$, $y \in rng(R)$, to niech:

- $R^{\rightarrow}(x) = \{z : xRz\}$ (zbiór wszystkich R-następników x)
- $R^{\leftarrow}(y) = \{z : zRy\}$ (zbiór wszystkich R-poprzedników y)
- $R^{\Rightarrow}(x) =$ zbiór wszystkich bezpośrednich następników x
- $R^{\Leftarrow}(y) =$ zbiór wszystkich bezpośrednich poprzedników y.

Przypomnienie: relacje

Jeśli $R \subseteq X \times Y$, to relację R można reprezentować przez *macierz*:

- wiersze macierzy odpowiadają elementom X
- kolumny macierzy odpowiadają elementom Y
- jeśli xRy, to elementem macierzy odpowiadającym wierszowi x i kolumnie y jest 1; w przeciwnym przypadku elementem tym jest 0.

Jeśli $R \subseteq X \times Y$, to relację R można reprezentować przez *graf*:

- wierzchołkami grafu są elementy zbioru $X \cup Y$
- wierzchołki x oraz y połączone są krawędzią zorientowaną (od x do y) wtedy i tylko wtedy, gdy xRy.

Przypomnienie: funkcje

Niech $R \subseteq X \times Y$ oraz $X = dom(R)$. Mówimy, że R jest *funkcją* z X w Y i piszemy $R : X \to Y$, gdy dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden $y \in Y$ taki, że xRy. Ten jedyny element nazywamy *wartością* funkcji R dla argumentu x i oznaczamy $R(x)$.

Niech $R : X \to Y$. Mówimy, że:

- R jest *iniekcją* (odwzorowaniem $1-1$), gdy dla wszystkich $x_1, x_2 \in X$: jeśli $R(x_1) = R(x_2)$, to $x_1 = x_2$.
- R jest *suriekcją* (odwzorowaniem na), gdy $Y = rng(R)$.
- R jest *bijekcją*, gdy R jest iniekcją i suriekcją.
- Jeśli $R : X \to X$ jest bijekcją, to nazywamy ją też *permutacją* zbioru X.

Zbiór wszystkich funkcji ze zbioru X w zbiór Y oznaczamy przez Y^X.

Przypomnienie: funkcje

Niech I będzie dowolnym zbiorem. Produktem kartezjańskim rodziny zbiorów $\mathbf{A} = \{A_i : i \in I\}$ nazywamy zbiór:
$\prod \mathbf{A} = \prod_{i \in I} A_i = \{R : \ R : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ oraz $R(i) \in A_i$ dla wszystkich $i \in I\}$.

- Zamiast $X \times X \times \ldots \times X$ (n czynników) piszemy X^n.
- Jeśli $R : X_1 \times X_2 \times \ldots X_n \to Y$, to mówimy, że R jest n-argumentową funkcją (z $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ w Y).
- Jeśli $R : X_1 \times X_2 \times \ldots X_n \to Y$, to zamiast $R((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ piszemy $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Niech X będzie podzbiorem uniwersum U. Funkcją charakterystyczną zbioru X jest funkcja $\chi_U : U \to \{TAK, NIE\}$ określona następująco:

- jeśli $x \in X$, to $\chi_U(x) = TAK$
- jeśli $x \notin X$, to $\chi_U(x) = NIE$.

Pojęcie nieskończoności

Ze szkoły wyniosłaś prawdopodobnie jedynie intuicyjne określenia nieskończoności. Potrzebne nam będzie jednak precyzyjne określenie tego pojęcia. Nadto, stosowna definicja ma być czysto numeryczna, a więc nie odwołująca się np. do:

- zależności czasowych,
- zależności przestrzennych,
- jakości liczonych obiektów, itd.

Standardowym przykładem zbioru, który jest nieskończony jest zbiór wszystkich liczb naturalnych: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$.
Jego *definicję* (w teorii mnogości) poznamy później.

Jak jednak możemy **dowodzić**, że jakiś zbiór jest nieskończony?

Przykład: Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele

Przypuśćmy, że jest tylko skończenie wiele liczb pierwszych (tj. takich liczb n, które mają dokładnie dwa podzielniki: 1 oraz n): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,. . . ,p.
Zatem p jest (rzekomo) największą liczbą pierwszą.
Tworzymy iloczyn: $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot p$ (rzekomo) wszystkich liczb pierwszych.
Liczba $m + 1$ jest liczbą pierwszą, ponieważ nie dzieli się bez reszty przez żadną z liczb pierwszych 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,. . . ,p. Nadto, $m + 1$ jest większa od p.
Otrzymujemy **sprzeczność**: $m + 1$ jest liczbą pierwszą **większą** od (rzekomo) największej liczby pierwszej p. Zatem, musimy odrzucić przypuszczenie, iż liczb pierwszych jest skończenie wiele. W konsekwencji, liczb pierwszych jest **nieskończenie wiele**. Nie istnieje największa liczba pierwsza.

Pojęcie równoliczności

Dwa zbiory są **równoliczne**, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja z jednego z nich na drugi.

Widać, że gdy zbiór X ma n elementów, a Y ma m elementów oraz $n \neq m$, to X i Y nie są równoliczne.

Widać też, że niektóre różne zbiory nieskończone mogą być równoliczne. Dla przykładu, równoliczność zbioru wszystkich liczb naturalnych ze zbiorem wszystkich liczb parzystych ustala bijekcja: $f(n) = 2n$.

Czy jednak **każde** dwa zbiory nieskończone (w intuicyjnym na razie rozumieniu tego pojęcia) są równoliczne?

Twierdzenie Cantora

Twierdzenie Cantora.
Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.

Dowód. Weźmy dowolny zbiór X i przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje bijekcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Określmy następujący element rodziny $\wp(X)$:

$$X_f = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}.$$

Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Stąd i z definicji zbioru X_f otrzymujemy, iż:
$x_f \in X_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_f \notin X_f$,
a to jest **sprzeczność**. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.

Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne

Zbiór nazywamy **przeliczalnym**, jeśli jest on równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$.
Zbiór jest **nieprzeliczalny**, gdy jest nieskończony i nie jest przeliczalny.

Przykłady zbiorów nieprzeliczalnych:

- zbiór potęgowy zbioru wszystkich liczb naturalnych;
- zbiór wszystkich nieskończonych (przeliczalnych) ciągów dodatnich liczb naturalnych;
- zbiór wszystkich nieskończonych (przeliczalnych) ciągów o wyrazach 0 lub 1.

Istnienie zbiorów nieprzeliczalnych jest konsekwencją aksjomatu nieskończoności, aksjomatu zbioru potęgowego (które poznamy później) oraz Twierdzenia Cantora.

Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne

Uwaga! Pojęcie równoliczności jest określone dla dowolnych zbiorów. Równoliczność **nie jest** jednak relacją, w tym sensie, że **ogół wszystkich zbiorów** nie jest zbiorem.

Równoliczność ograniczona do ustalonej rodziny zbiorów oczywiście **jest** relacją, czyli podzbiorem stosownego iloczynu kartezjańskiego.

Wykazywanie, że jakiś zbiór nieskończony X jest nieprzeliczalny wymaga pokazania, że żaden zbiór par uporządkowanych nie jest bijekcją z X na zbiór wszystkich liczb naturalnych. Wymaga to więc „przejrzenia" uniwersum wszystkich zbiorów (które samo nie jest zbiorem).

Definicja nieskończoności: Frege

Definicja Fregego. Zbiór jest **skończony**, gdy ma n elementów, dla pewnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$. W przeciwnym przypadku jest **nieskończony**.

Ta definicja zakłada, że wiemy, czym są liczby naturalne.

Otóż wcale nie jest bezdyskusyjne, jaki jest status tej wiedzy. Problematyka ta należy do filozofii matematyki i nie może tu być omawiana. Podamy jedynie definicję zbioru $\mathbb{N}$, korzystającą z pojęć teorii mnogości.

Liczby naturalne stworzył Pan Bóg, cała reszta jest dziełem człowieka — napisał kiedyś Leopold Kronecker.

Definicja nieskończoności: Dedekind

Definicja Dedekinda. Zbiór jest **nieskończony**, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest **skończony**.

Na „paradoksalną" własność pewnych zbiorów, polegającą na tym, iż są one równoliczne z jakimś swoim podzbiorem właściwym, zwracano uwagę już wcześniej (Galileusz, Bolzano).

Można, jak się okazuje, przyjąć tę własność jako cechę definicyjną zbiorów nieskończonych.

Niech to będzie definicja zbiorów nieskończonych, którą powinnaś zapamiętać.

Definicja nieskończoności: von Neumann

Definicja von Neumanna. Dla dowolnego zbioru X, niech $X^* = X \cup \{X\}$. Iteracje operacji * określamy indukcyjnie:

- $X^0 = X$
- $X^1 = X^*$
- $X^{n+1} = (X^n)^*$.

Zbiór jest **skończony**, gdy jest równoliczny z $\emptyset^n$, dla pewnego n, gdzie $\emptyset$ jest zbiorem pustym. W przeciwnym przypadku, jest **nieskończony**.

Uwaga. W definicji von Neumanna tylko z pozoru odwołujemy się do liczb naturalnych: w poprawnej, nieuproszczonej wersji definicja ta używa tylko pojęć teoriomnogościowych i zasady indukcji pozaskończonej; liczby naturalne zostają wtedy zdefiniowane (na gruncie teorii mnogości).

Definicja nieskończoności: von Neumann

Iterujmy operację *, wychodząc od zbioru pustego:

$\emptyset$, $(\emptyset)^* = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$, $((\emptyset)^*)^* = (\{\emptyset\})^* = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
$(((\emptyset)^*)^*)^* = (\{\emptyset, \{\emptyset\}\})^* = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$

Każdy element tego ciągu jest zbiorem, którego elementami są wszystkie poprzednie wyrazy tego ciągu. Wprowadźmy *oznaczenia*:
$0 = \emptyset$, $1 = 0^* = (\emptyset)^*$, $2 = 1^* = ((\emptyset)^*)^*$, $3 = 2^* = (((\emptyset)^*)^*)^*, \ldots$
Wtedy: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}, \ldots$

Otrzymujemy rodzinę $\mathbb{N}$ zbiorów $0, 1, 2, 3, \ldots$, które możemy identyfikować z *liczbami naturalnymi*. Nadto, rodzina ta jest *dobrze uporządkowana* przez relację $\in$: *definiujemy* $m < n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in n$, dla $m, n \in \mathbb{N}$.

Definicja nieskończoności: von Neumann

Zbiór A nazywamy *liczbą porządkową w sensie von Neumanna*, gdy:

- Każdy element zbioru A jest zbiorem.
- Jeśli $X \in A$, to $X \subseteq A$.
- Jeśli $X, Y \in A$, to: $X = Y$ lub $X \in Y$ lub $Y \in X$.
- Jeśli $B \neq \emptyset$ i $B \subseteq A$, to istnieje $X \in B$ taki, że $X \cap B = \emptyset$.

Liczbami porządkowymi w sensie von Neumanna są, m.in:.

- Wszystkie elementy zbioru $\mathbb{N}$ oraz sam zbiór $\mathbb{N}$.
- Zbiory: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$, $(\mathbb{N}^*)^* = \{\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}\}\}$, itd.
- Zbiór $\omega + \omega = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* \cup (\mathbb{N}^*)^* \cup ((\mathbb{N}^*)^*)^* \cup \ldots$
- Zbiory: $(\omega + \omega)^*, ((\omega + \omega)^*)^*, (((\omega + \omega)^*)^*)^*$, itd.

Definicja nieskończoności: Tarski

Definicja Tarskiego. Zbiór jest **skończony**, gdy każdy $\subseteq$-łańcuch w rodzinie jego podzbiorów jest domknięty na kres górny. W przeciwnym przypadku jest **nieskończony**.

Podobnie jak von Neumanna, definicja Tarskiego wykorzystuje jedynie pojęcia teoriomnogościowe.

Proszę zauważyć, że np. ciąg zbiorów:

$$\{\{k \ : \ k \leqslant n\} \ : \ n \geqslant 0\}$$

nie jest domknięty na kres górny; kresem górnym (względem porządku $\subseteq$) tego ciągu jest jego teoriomnogościowa suma, a nie jest ona jednym z elementów tego ciągu.

Definicja nieskończoności: Tarski

Pojęcia użyte w definicji Tarskiego wymagają objaśnienia:

- Rodzina $\mathbf{X}$ jest *$\subseteq$-łańcuchem*, gdy dla dowolnych $X, Y \in \mathbf{X}$ zachodzi: albo $X \subseteq Y$ albo $Y \subseteq X$.
- *Kresem górnym* rodziny zbiorów $\mathbf{X}$ (ze względu na inkluzję $\subseteq$) jest suma $\bigcup \mathbf{X}$.
- Rodzina zbiorów $\mathbf{X}$ jest *domknięta ze względu na kres górny*, gdy suma $\bigcup \mathbf{X}$ jest elementem rodziny $\mathbf{X}$.

Później poznamy te pojęcia w nieco większej ogólności.

Koniec

Zadanie domowe.

- Zapamiętać ze Zrozumieniem wszystkie pojęcia dotyczące: zbiorów, relacji i funkcji wymienione w Przypomnieniu.
- Zapamiętać ze Zrozumieniem definicję zbioru nieskończonego wedle Dedekinda oraz zbioru $\mathbb{N}$ (wedle von Neumanna).
- Przeczytać ze Zrozumieniem prezentację Wstęp do Matematyki (2).
- Rozwiązać zadania:

124–146 (zbiory)	182–189 (relacje)	218–230 (funkcje)

ze zbioru *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz.

Uwaga. Bez umiejętności rozwiązywania zadań nie uzyskasz zaliczenia z tego przedmiotu. Wybór należy do ciebie.